

Машинное обучение: линейные модели final

Н. Поваров

* По материалам: Elements of Statistical Learning, Introduction to Statistical Learning, курсы ВШЭ, Википедия, личный опыт, ...

СПб,
2019

Что было до этого

- Эндогенность
- Автокорреляция
- Гетероскедастичность
- Мультиколлинеарность
- Свойства параметров линейной модели
- Closed form solution для линейных моделей

Как было до этого

- Поломка предпосылок
- Поломка свойств
- Как определять
- Как чинить
- С чем придётся смириться

Как будет сейчас

Разброд и шатание

Что мы пропустили

- Доверительные интервалы для параметров

Доверительные интервалы

- Асимптотические свойства

$$[\hat{\beta}_j - z_{cr}se(\hat{\beta}_j), \hat{\beta}_j + z_{cr}se(\hat{\beta}_j)]$$

- При нормальности ошибок

$$[\hat{\beta}_j - t_{cr}se(\hat{\beta}_j), \hat{\beta}_j + t_{cr}se(\hat{\beta}_j)]$$

Доверительные интервалы недостающее

- $se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j | X)}$
- $Var(\hat{\beta}_j | X) = \frac{\sigma^2}{RSS_j}$
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-m}$

Что мы пропустили

- ~~Доверительные интервалы для параметров~~
- Доверительные интервалы для прогноза

«Доверительные интервалы» для прогноза

- Доверительный интервал
- Предиктивный интервал

Доверительный интервал для прогноза

- Асимптотические свойства

$$[\hat{y}_i - z_{cr}se(\hat{y}_i), \hat{y}_i + z_{cr}se(\hat{y}_i)]$$

- При нормальности ошибок

$$[\hat{y}_i - t_{cr}se(\hat{y}_i), \hat{y}_i + t_{cr}se(\hat{y}_i)]$$

$$\text{Var}(\hat{y}_i) = \text{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \dots)$$

Предиктивный интервал для прогноза

- Асимптотические свойства

$$[\hat{y}_i - z_{cr}se(\hat{y}_i - \varepsilon_i), \hat{y}_i + z_{cr}se(\hat{y}_i - \varepsilon_i)]$$

- При нормальности ошибок

$$[\hat{y}_i - t_{cr}se(\hat{y}_i - \varepsilon_i), \hat{y}_i + t_{cr}se(\hat{y}_i - \varepsilon_i)]$$

$$\text{Var}(\hat{y}_i - \varepsilon_i) = \text{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \dots) + \text{Var}(\varepsilon_i)$$

Что мы пропустили

- ~~Доверительные интервалы для параметров~~
- ~~Доверительные интервалы для прогноза~~
- Интерпретация значений параметров

Логарифмирование

- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$
- $\ln(y_i) = \beta_0 + \beta_1 \ln(x_i) + \varepsilon_i$
- $\ln(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln(x_i) + \varepsilon_i$

Бинаризация факторов

- $\widehat{\text{Балл}}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{ряд}_i + \beta_2 \text{рост}_i + \varepsilon_i$
- $\widehat{\text{Балл}}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{ряд}_i + \beta_2 \text{рост}_i + \beta_3 \text{пол}_i + \varepsilon_i$
 - $\widehat{\text{Балл}}_i = (\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 \text{ряд}_i + \beta_2 \text{рост}_i + \varepsilon_i$
 - $\widehat{\text{Балл}}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{ряд}_i + \beta_2 \text{рост}_i + \varepsilon_i$
- $\widehat{\text{Балл}}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{ряд}_i + \beta_2 \text{рост}_i + \beta_3 \text{пол}_i + \beta_4 \text{рост}_i \text{пол}_i + \varepsilon_i$
 - $\widehat{\text{Балл}}_i = (\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 \text{ряд}_i + (\beta_2 + \beta_4) \text{рост}_i + \varepsilon_i$
 - $\widehat{\text{Балл}}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{ряд}_i + \beta_2 \text{рост}_i + \varepsilon_i$

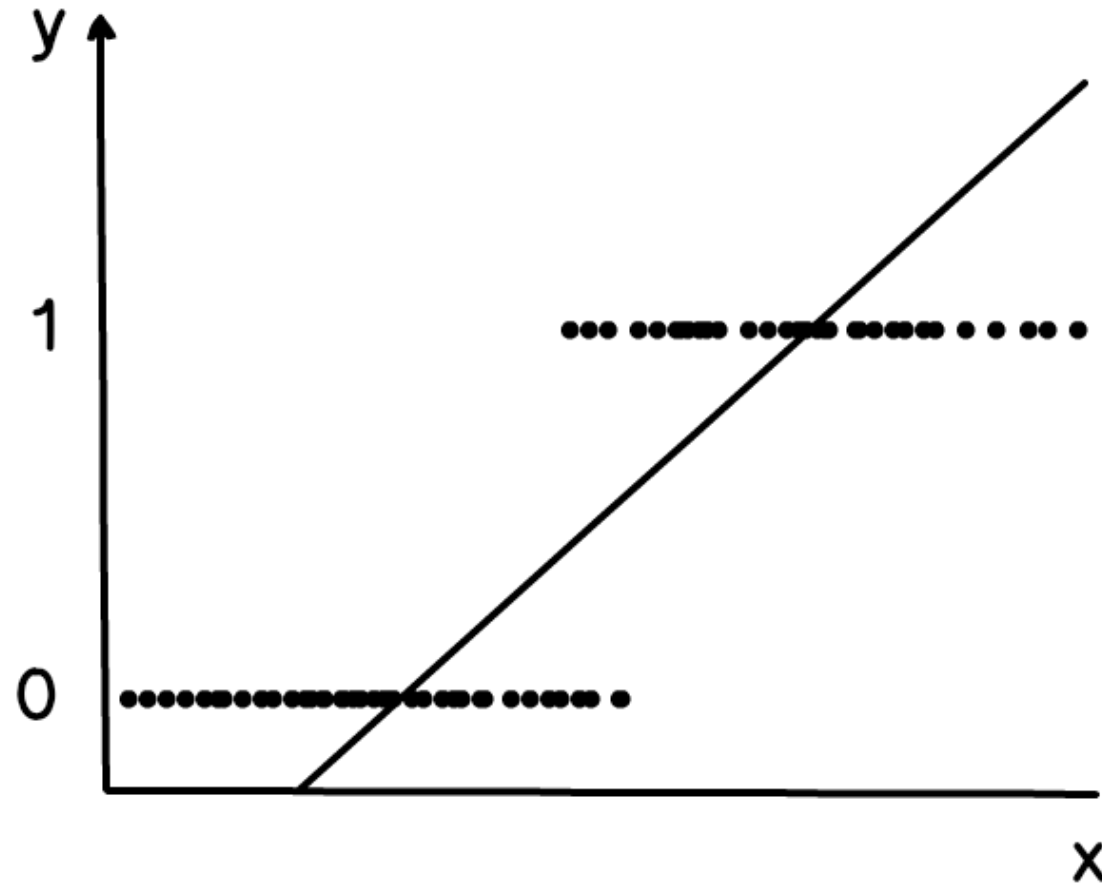
Что мы пропустили

- ~~Доверительные интервалы для параметров~~
- ~~Доверительные интервалы для прогнозов~~
- ~~Интерпретация значений параметров~~
- Классификация

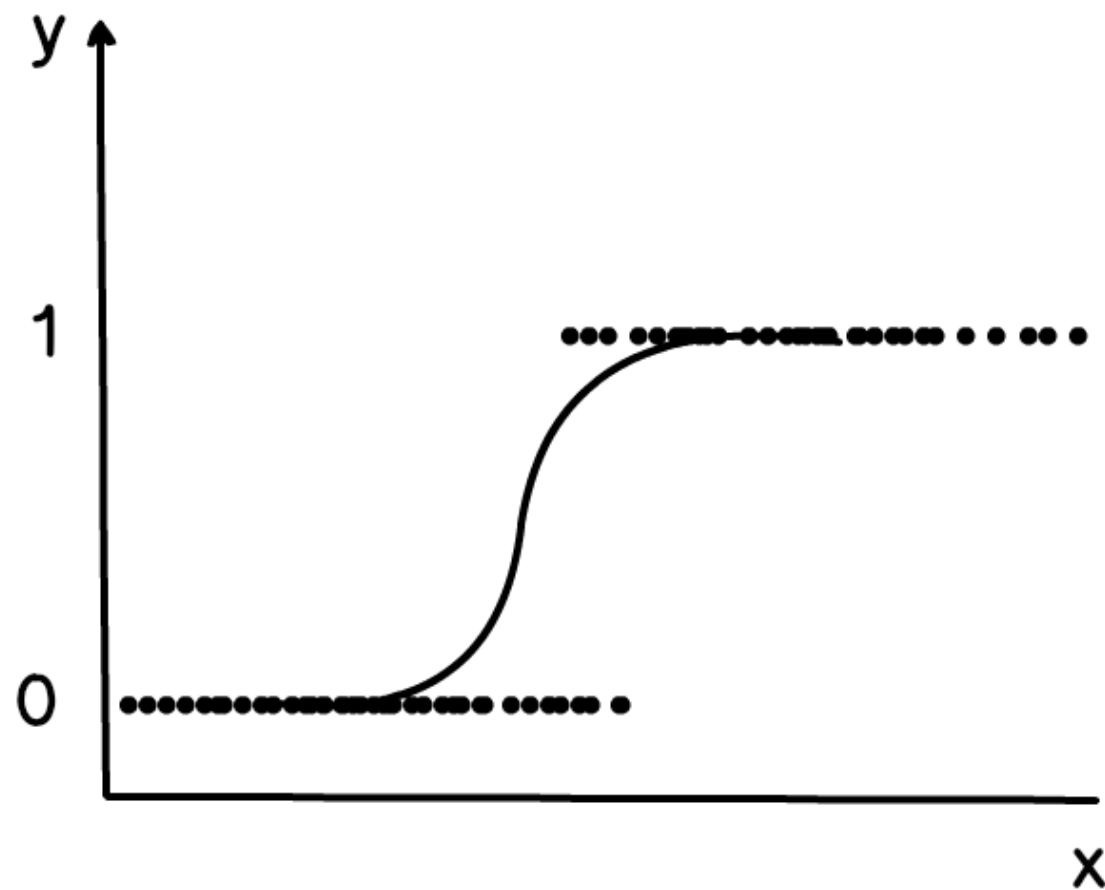
Задача классификации

- Иногда перед нами стоит задача классификации
- Регрессия может быть классификацией
- Хотим вероятности

Пара картинок



Пара картинок



Логистическая регрессия

•

$$h(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} = \frac{e^z}{1 + e^z}$$

$$z = \beta_0 + \beta_1 x_i + \dots + \varepsilon_i$$

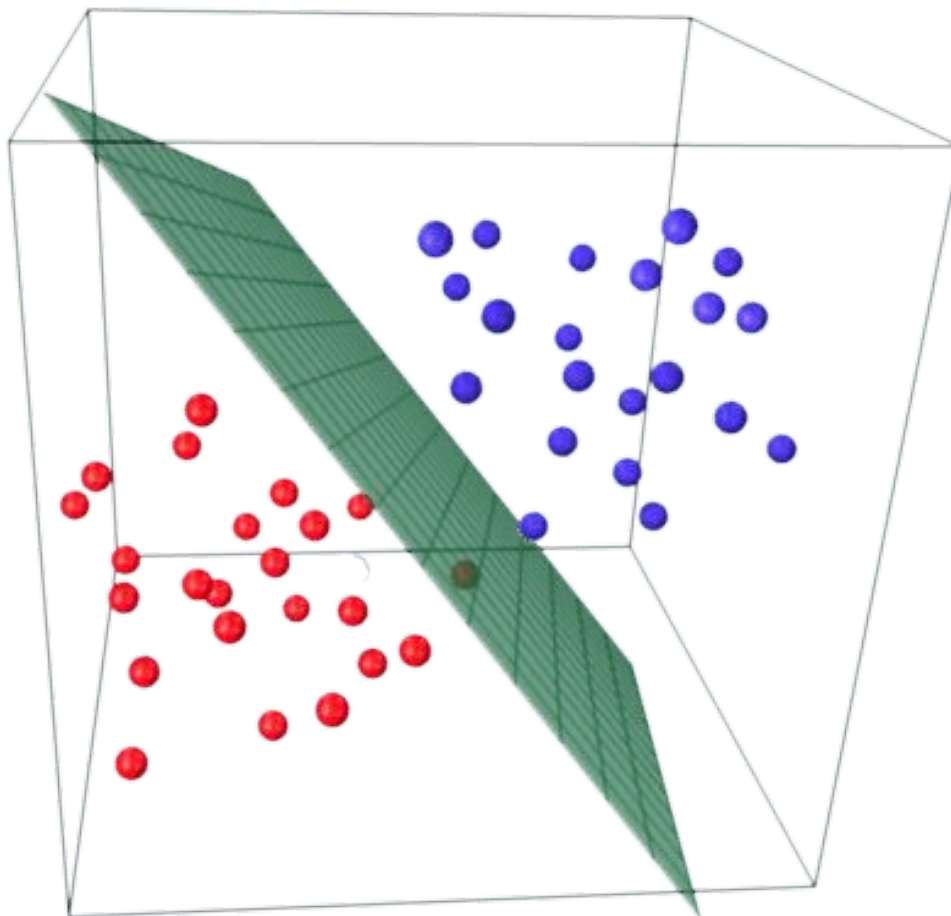
$$\ln \frac{p(y_i = 1)}{p(y_i = 0)} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \dots + \varepsilon_i$$

Как найти параметры

•

$$\beta_j := \beta_j + \alpha(y_i - h_{\beta}(\vec{x}_i))x_j$$

Ещё один взгляд на классификацию



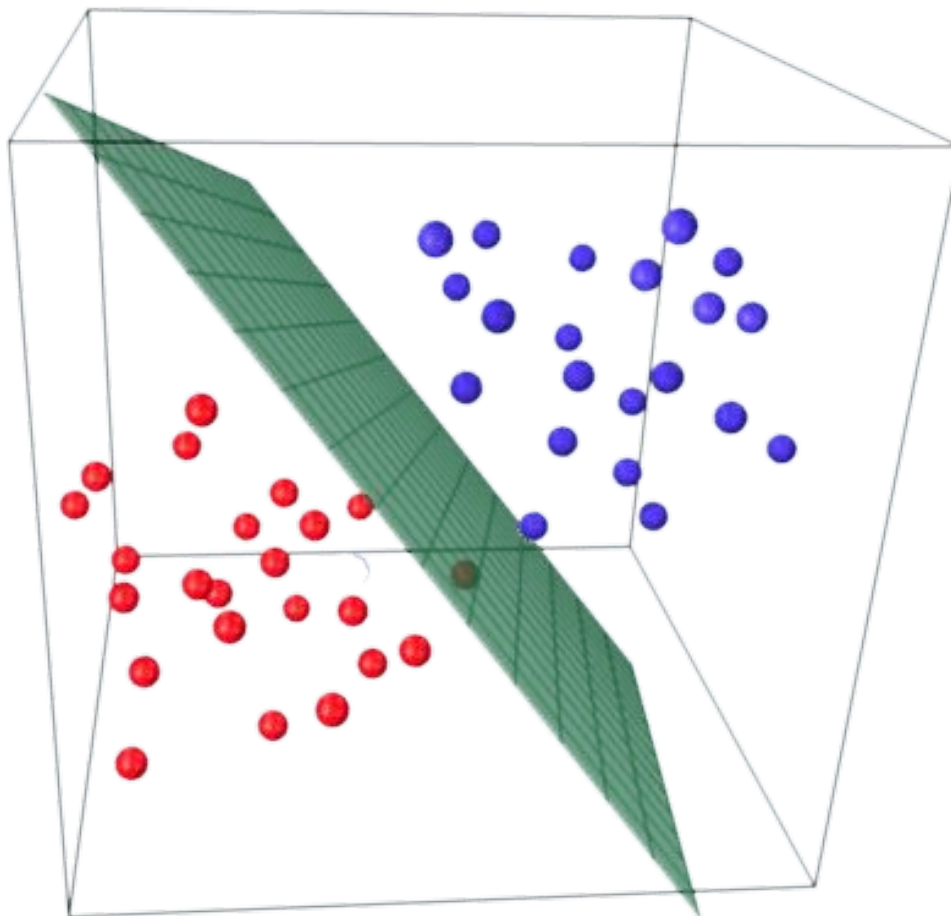
Попишем формулы

-

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [F_{\beta}(\vec{x}_i) \neq y_i]$$

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i (\vec{\beta}, \vec{x}_i) < 0]$$

Ещё один взгляд на классификацию



Добавим обозначений

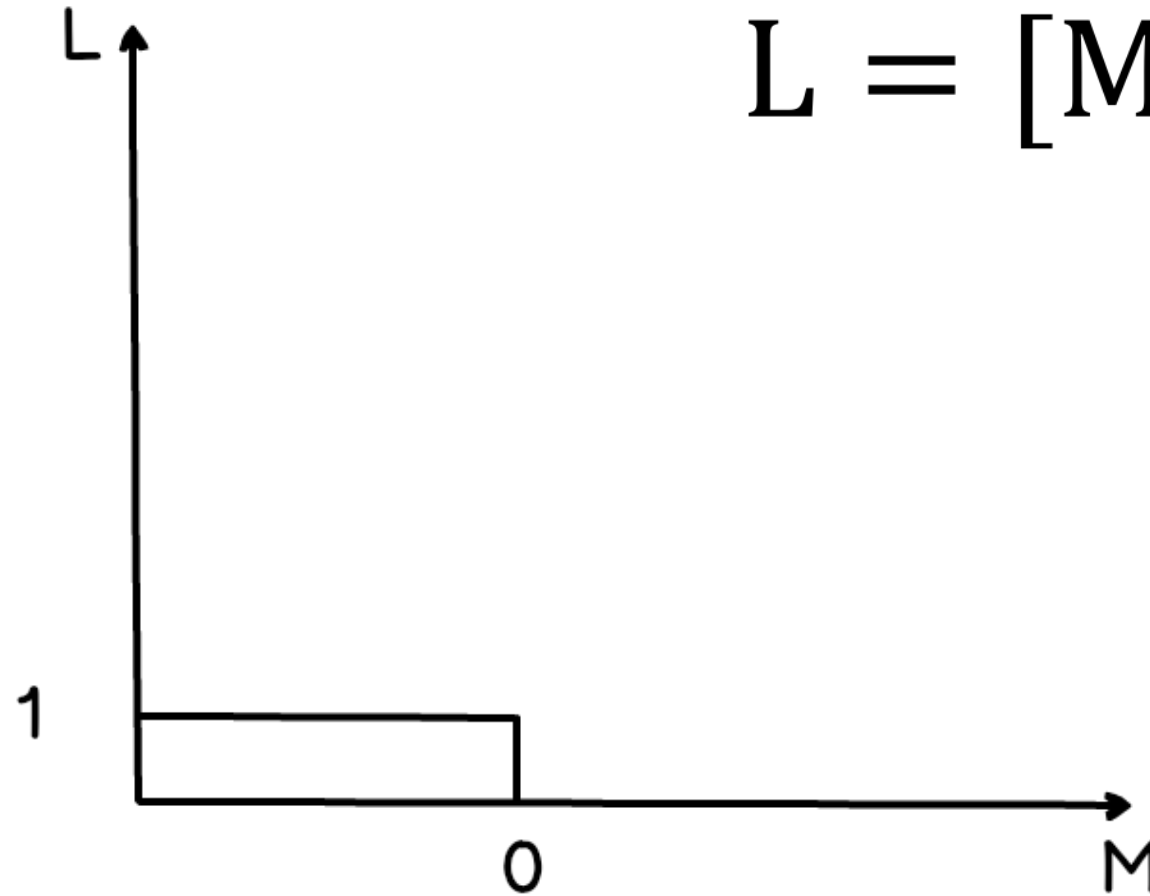
•

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i(\vec{\beta}, \vec{x}_i) < 0]$$

$$M = y_i(\vec{\beta}, \vec{x}_i)$$

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L$$

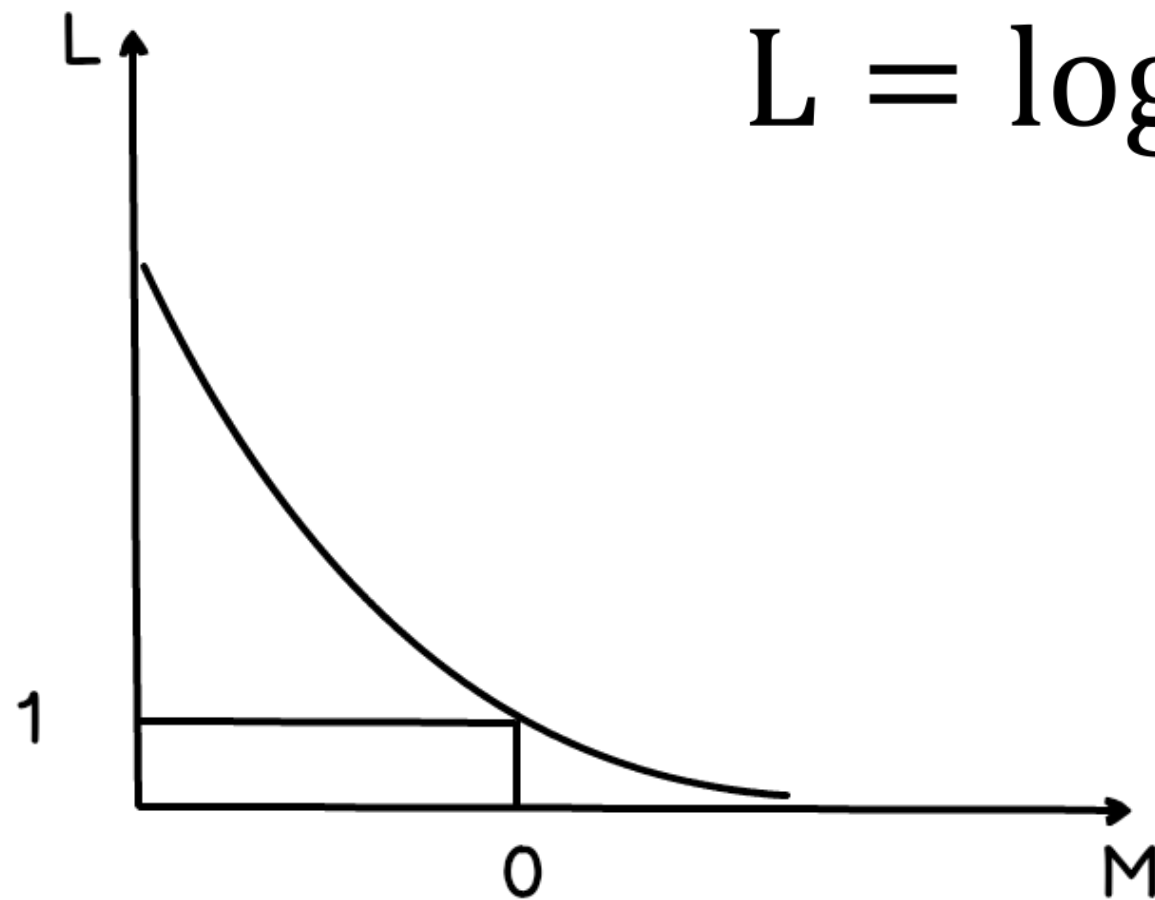
Функция потерь



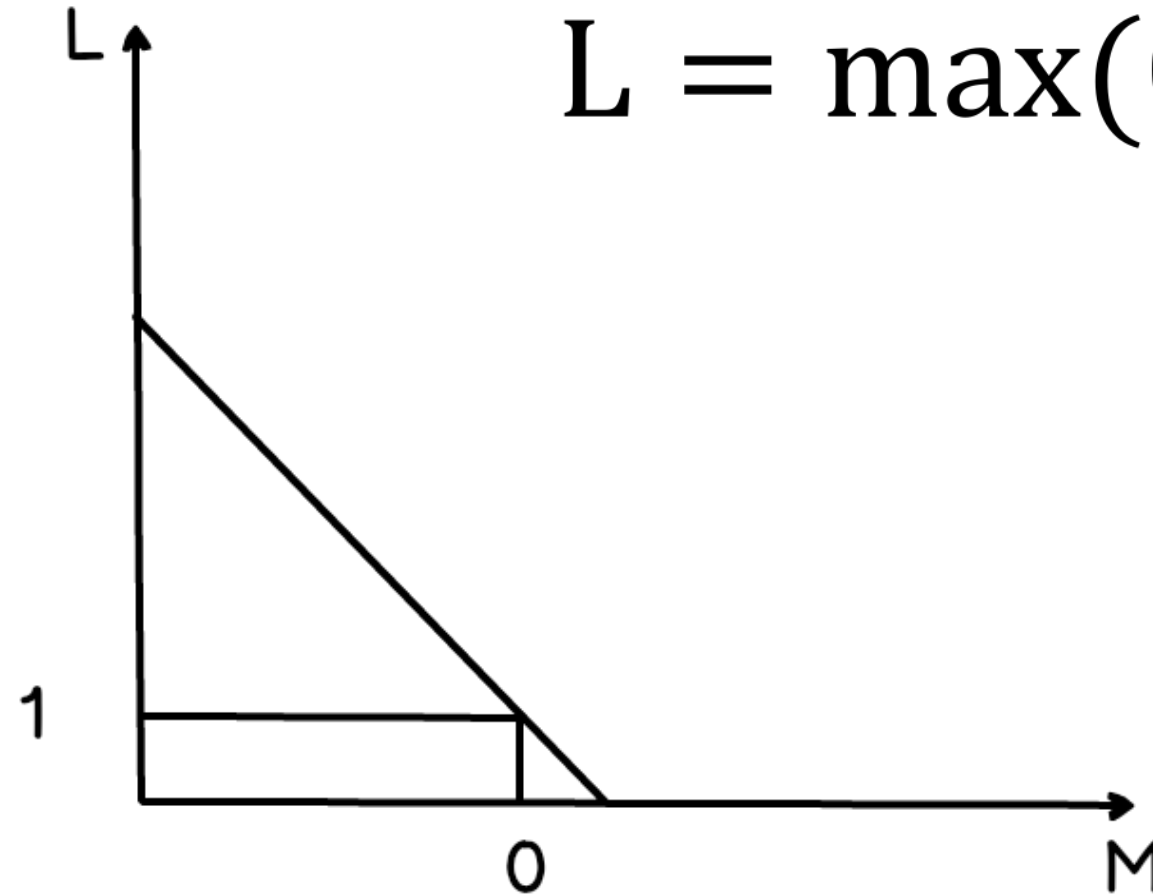
$$L = [M < 0]$$

Логистическая функция

$$L = \log(1 + e^{-M})$$



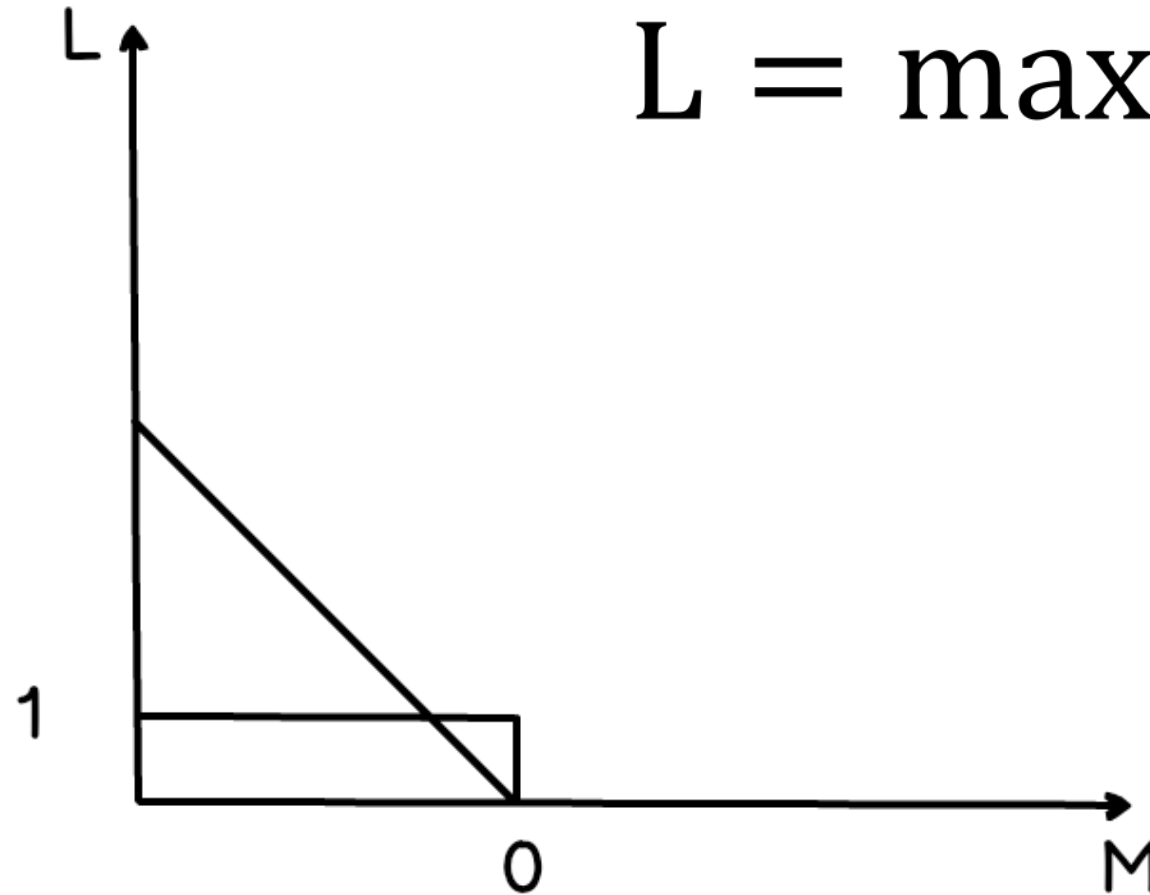
Hinge Loss



$$L = \max(0, 1 - M)$$

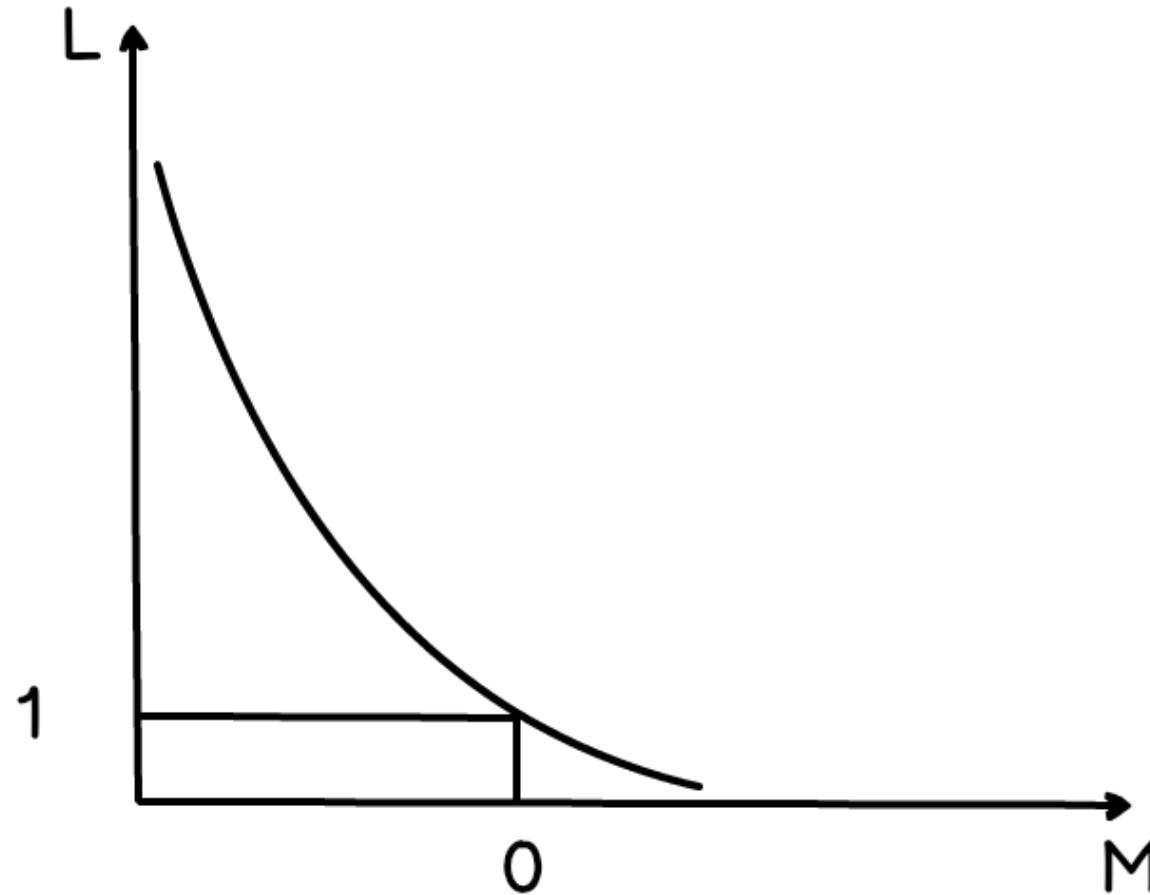
В перцептронах

$$L = \max(0, -M)$$

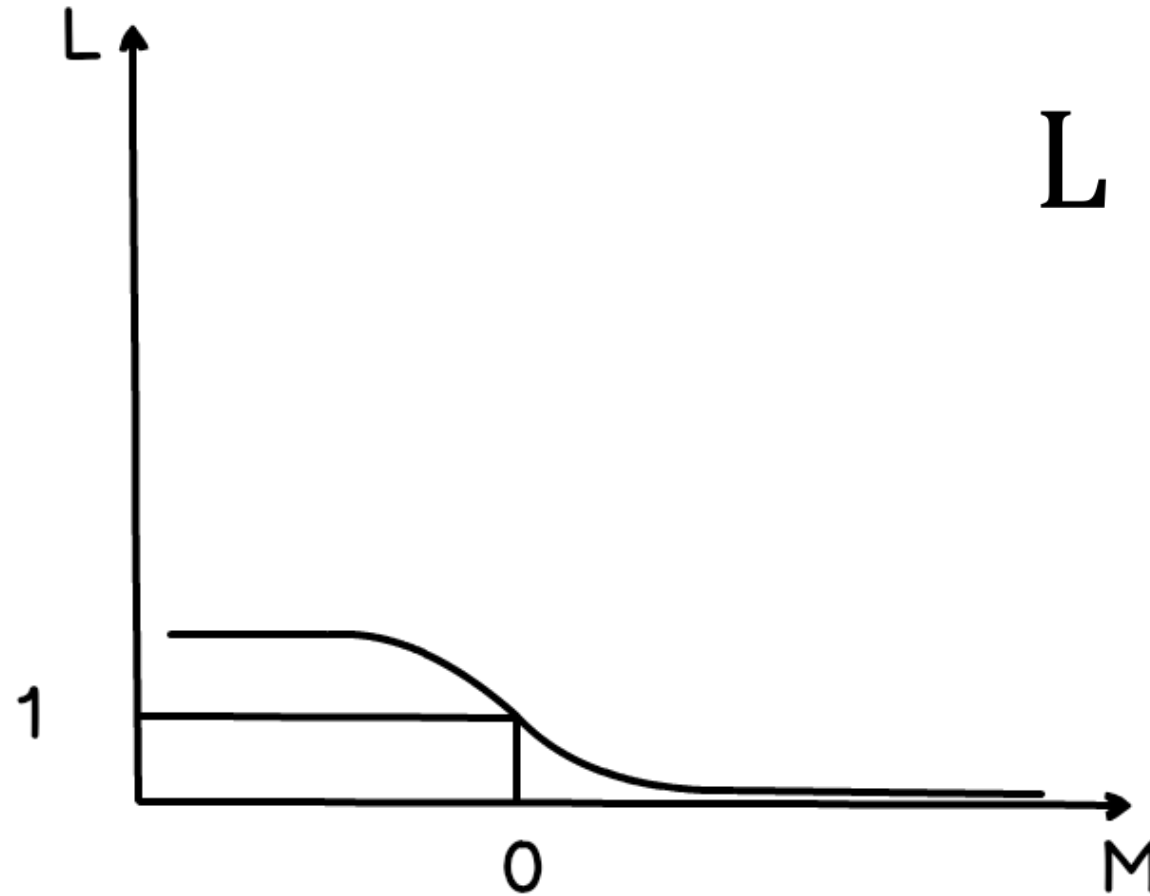


Экспоненциальная

$$L = e^{-M}$$



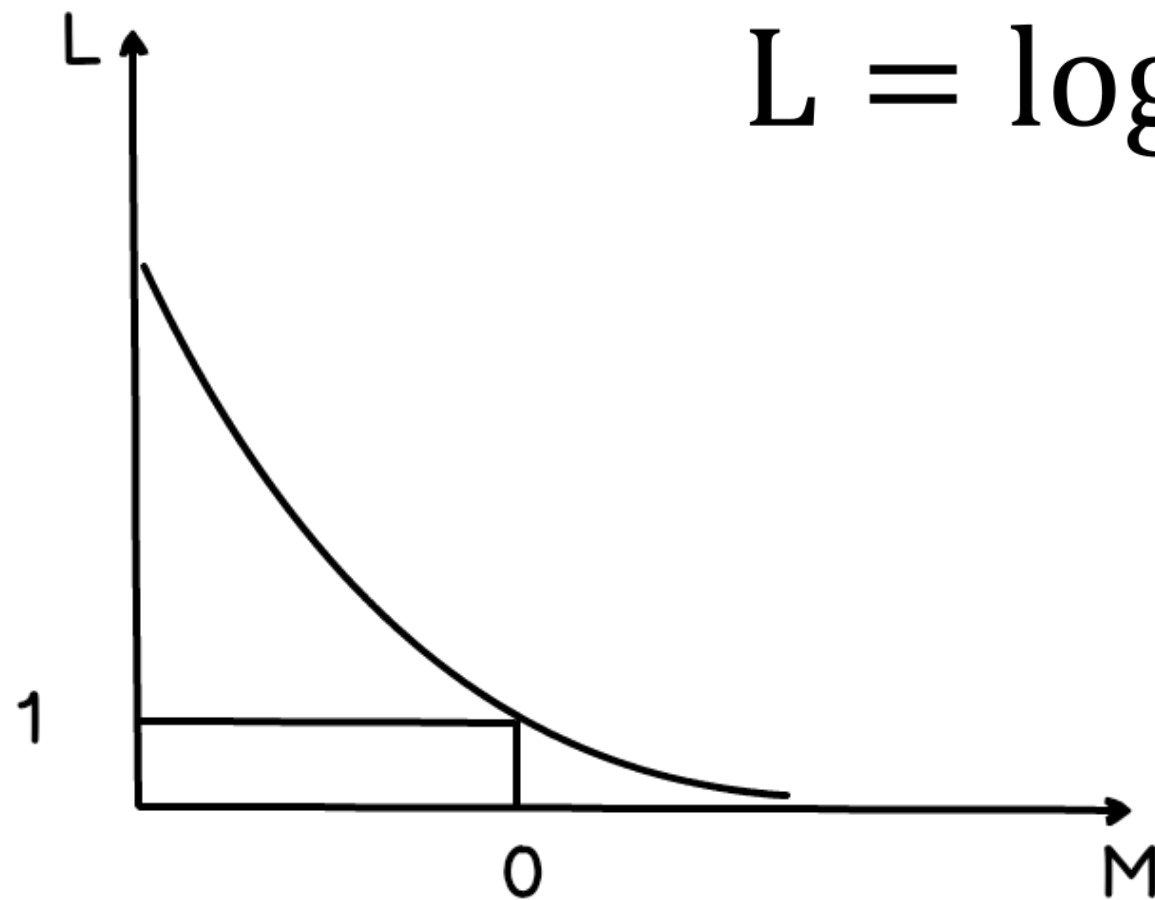
Сигмоидная



$$L = \frac{2}{1 + e^M}$$

Логистическая функция

$$L = \log(1 + e^{-M})$$



Hinge Loss В ЯВНОМ ВИДЕ

•

$$\min_{\vec{\beta}} \sum_{i=1}^n \max(0, 1 - y_i(\vec{\beta}, \vec{x}_i))$$

Hinge Loss + L2 регуляризация

•

$$\min_{\vec{\beta}} \sum_{i=1}^n \max(0, 1 - y_i(\vec{\beta}, \vec{x}_i)) + \lambda \sum_{j=1}^m \hat{\beta}_j^2$$

Hinge Loss + L2 регуляризация

•

$$\min_{\vec{\beta}} C \sum_{i=1}^n \max(0, 1 - y_i(\vec{\beta}, \vec{x}_i)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \hat{\beta}_j^2$$

~~Hinge Loss + L2 регуляризация~~

•

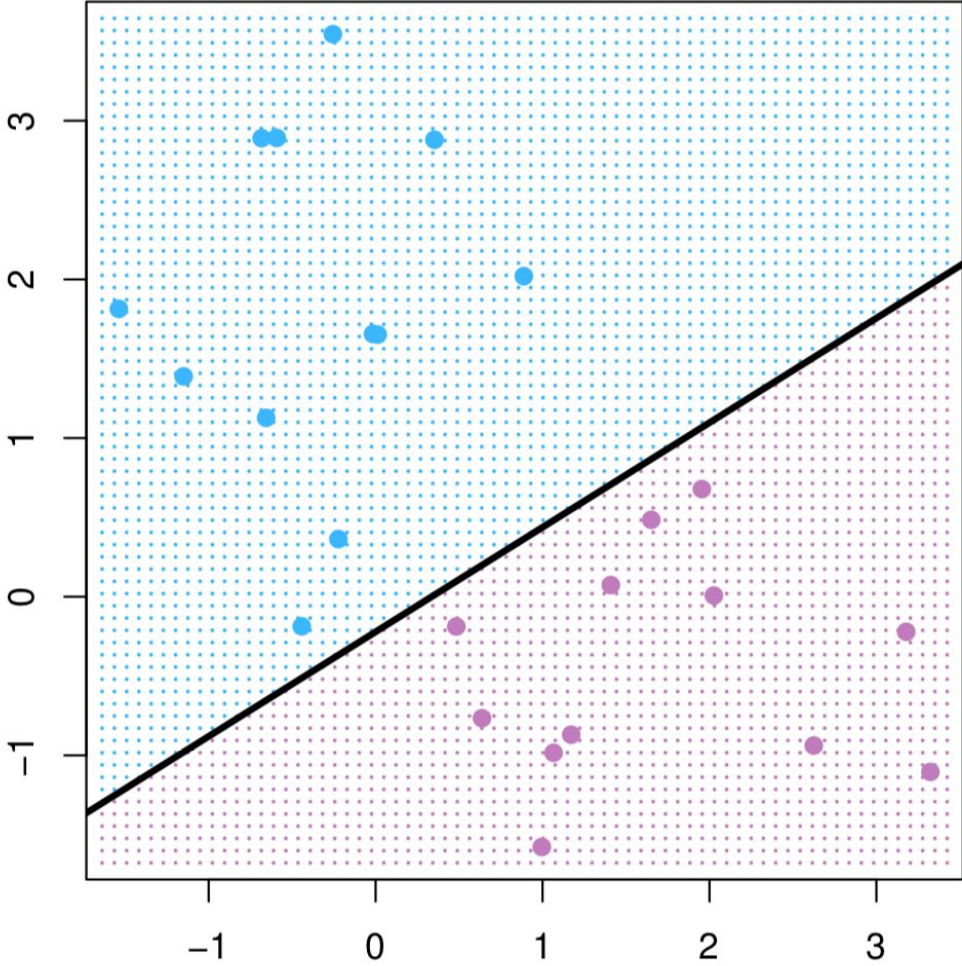
$$\min_{\vec{\beta}} C \sum_{i=1}^n \max(0, 1 - y_i(\vec{\beta}, \vec{x}_i)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \hat{\beta}_j^2$$

SVM

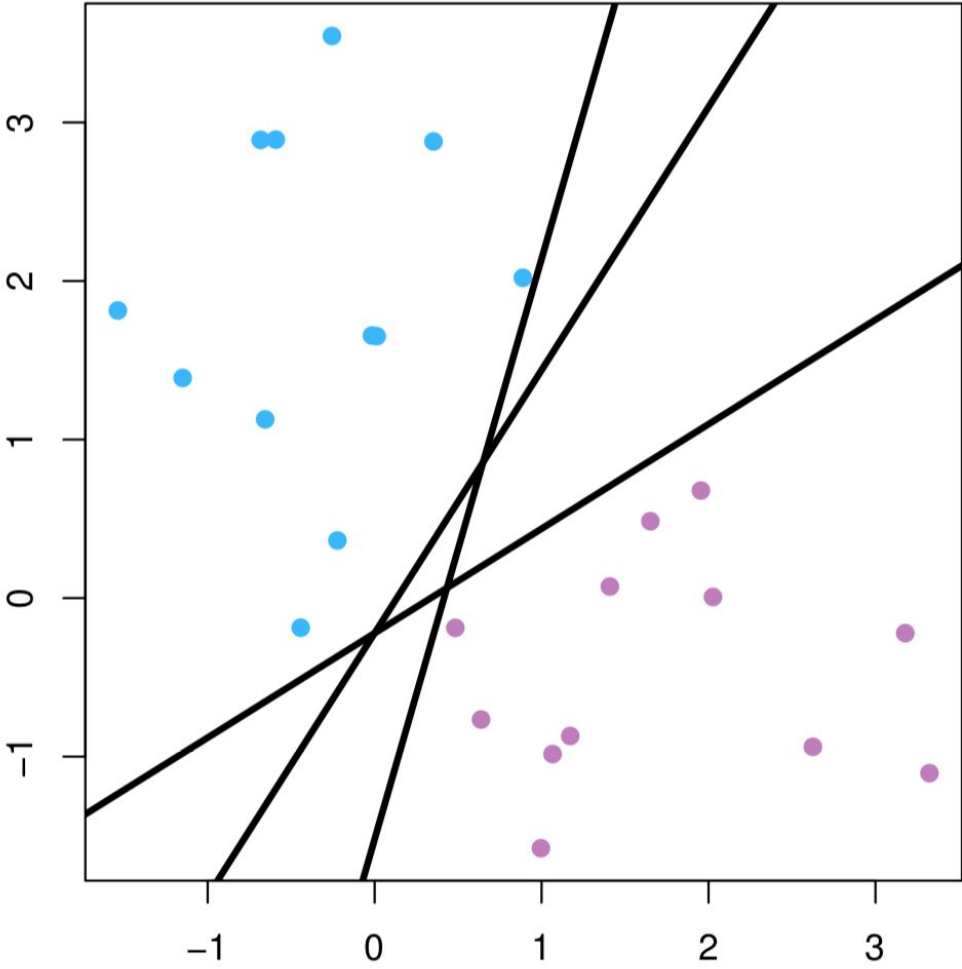
-

$$\min_{\vec{\beta}} C \sum_{i=1}^n \max(0, 1 - y_i(\vec{\beta}, \vec{x}_i)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \hat{\beta}_j^2$$

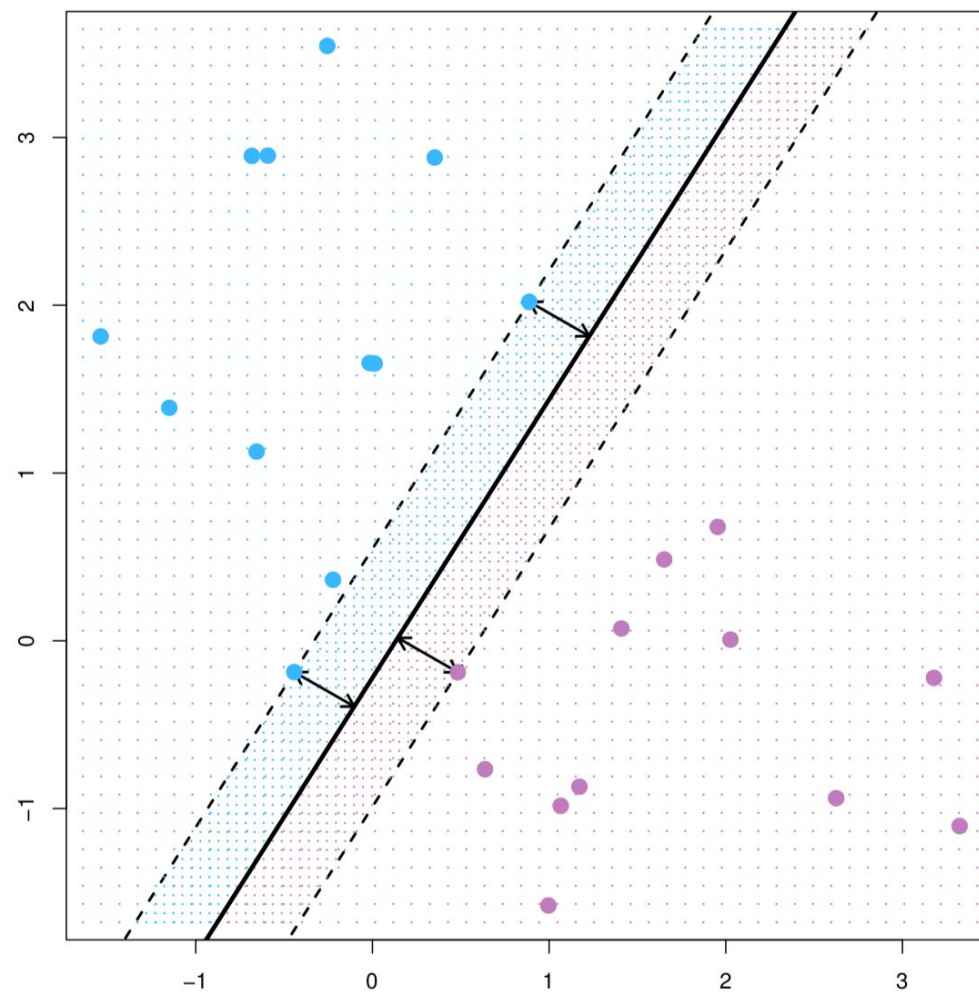
SVM исторически



SVM исторически



SVM исторически



Оценка качества классификатора

		y	
		P	N
\hat{y}	P	TP	FP
	N	FN	TN

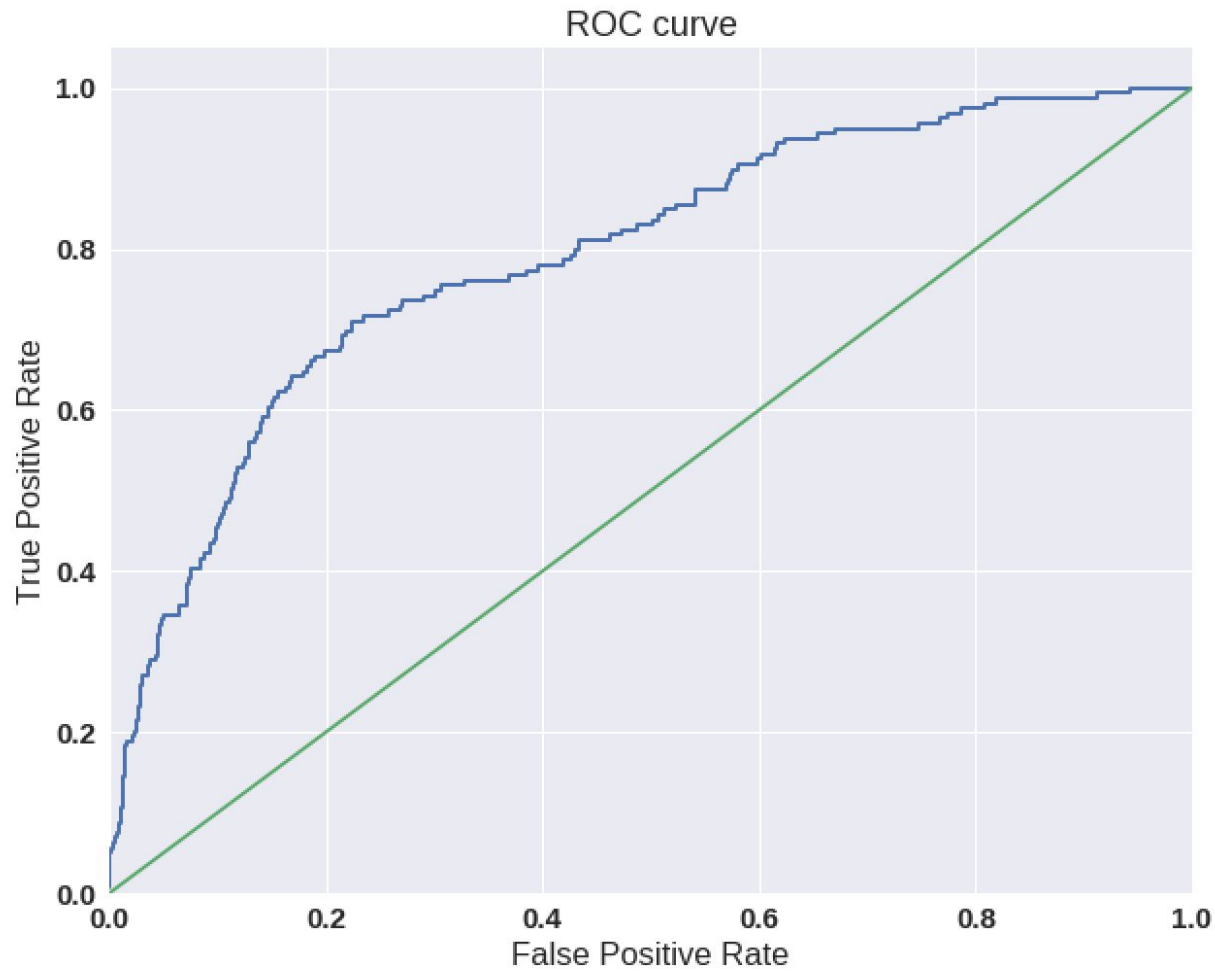
Метрики классификатора

- Precision = $\frac{TP}{TP+FP}$
- Recall = $\frac{TP}{TP+FN}$
- Accuracy = $\frac{TP+TN}{TP+FN+TN+FP}$
- $F_1 = \frac{2*Pr*Re}{Pr + Re}$

Хорошие метрики классификатора

- AUC
- LL

AUC



$$\text{TPR} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}}$$

$$\text{FPR} = \frac{\text{FP}}{\text{FP} + \text{TN}}$$

LogLoss

-

$$LL = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i)$$

Что мы вспомнили

- Доверительные интервалы для параметров
- Доверительные интервалы для прогнозов
- Интерпретация значений параметров
- Логистическая регрессия
- SVM
- Метрики классификации

Что не рассказано

- SVM регрессия
- SVM kernel trick
- Свойства параметров логистической регрессии
- Мультиклассификация
- Временные ряды
- Медианная и квантильная регрессия
- Compressed Sensing
- Байесовский подход
- ...

Вопросы?