

ВоГУ

Лекция 21 (3)

**Работа в электростатическом
поле**

Потенциал

**Связь между напряженностью
и потенциалом**

Диполь

Кузина Л.А.,

к.ф.-м.н.,

доцент

2017 г.

План

1. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле
2. Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции
3. Потенциал
4. Связь между напряженностью и потенциалом
5. Электрический диполь.
 - 5.1. Диполь в электрическом поле. Энергия диполя
 - 5.2. Поле диполя

Работа по перемещению заряда в

электростатическом поле

Работа электростатических сил по перемещению точечного заряда q в поле заряда Q :

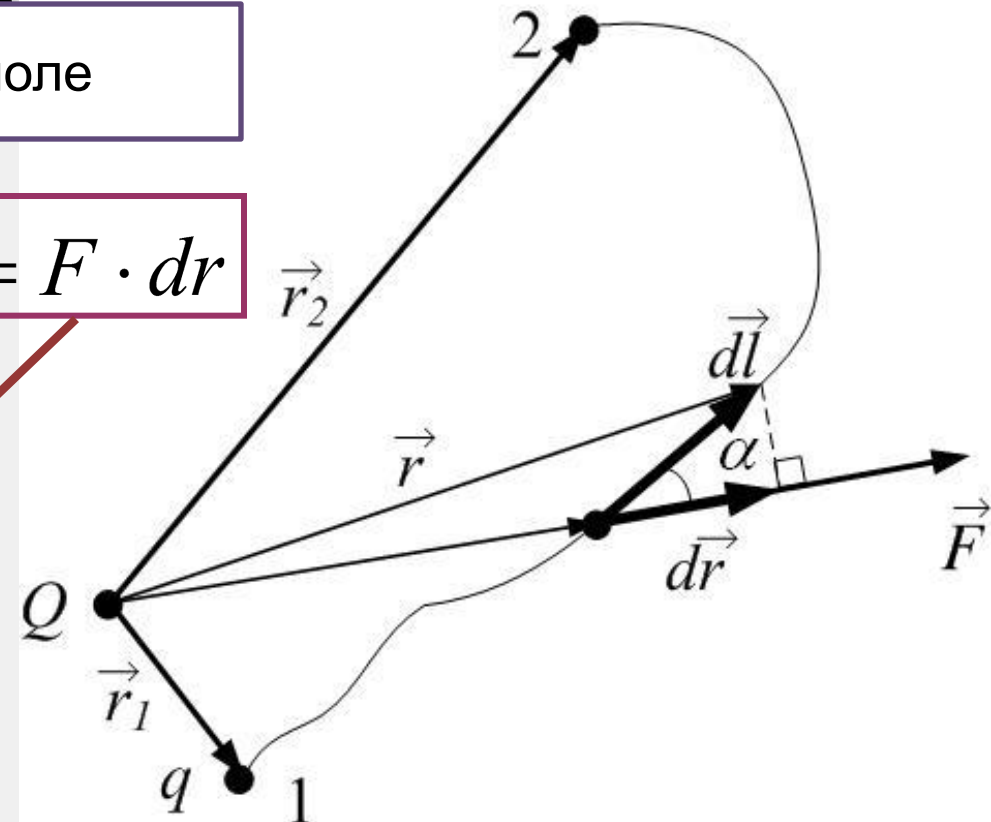
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot \cos \alpha \cdot dl = F \cdot dr$$

$$F = qE$$

$$dA = qE \cdot dr$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA$$



$$dA = qE \cdot dr$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} qE \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr$$

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$A_{12} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

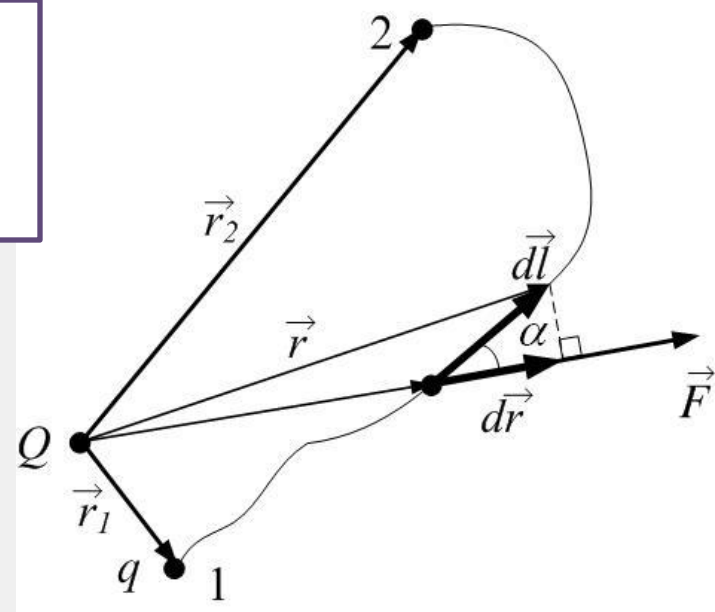
По закону сохранения энергии работа совершается за счёт уменьшения потенциальной энергии взаимодействия зарядов:

$$A_{12} = -\Delta W = -(W_2 - W_1)$$

$$A_{12} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$W = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \text{const}$$

$$W = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$



$$W_\infty = 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty$$

Потенциальный характер электростатического поля.

Теорема о циркуляции

$$A_{12} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Работа не зависит от траектории, а только от начального и конечного положения заряда q .

Электростатическое поле потенциально

Потенциальны поля только неподвижных зарядов

Для замкнутой траектории: $r_1 = r_2$

$$A = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = 0$$

$$A = \oint_L dA = 0$$

$$A = \oint_L dA = 0$$

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

$$A = \oint_L dA = \oint_L qE dl = q \oint_L E dl = 0$$

Циркуляция вектора
напряжённости:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

Теорема о циркуляции:
***циркуляция вектора напряжённости
электростатического поля по произвольному
замкнутому контуру равна нулю***

Для того, чтобы векторное поле было потенциально, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция вектора напряжённости поля по произвольному замкнутому контуру была равна нулю, то есть:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$



Поле
потенциально

Потенциальны только поля **НЕПОДВИЖНЫХ**
зарядов

Потенциал

Определение

Потенциал данной точки поля – это энергия единичного положительного точечного пробного заряда, помещённого в данную точку:

$$\varphi = \frac{W}{q}$$

$$[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}$$

Потенциал –
скалярная
энергетическая
характеристика поля

Энергия заряда q в точке поля с потенциалом φ :

$$W = q \cdot \varphi$$

Потенциал

Ещё определение:

Потенциал данной точки поля численно равен работе по перемещению единичного точечного пробного положительного заряда из данной точки поля на бесконечность

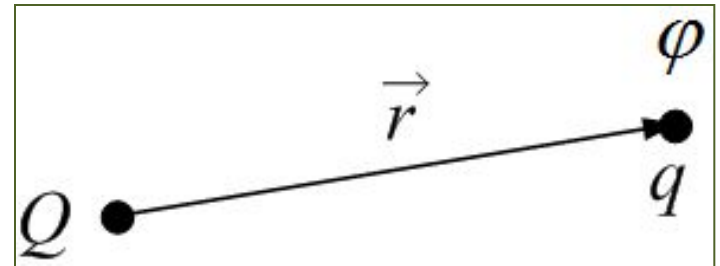
$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q}$$

Определения эквивалентны:

$$A_{\infty} = -\Delta W = -(W_{\infty} - W) = W$$

$$\varphi = \frac{W}{q}$$

Потенциал поля, созданного точечным зарядом Q на расстоянии r :



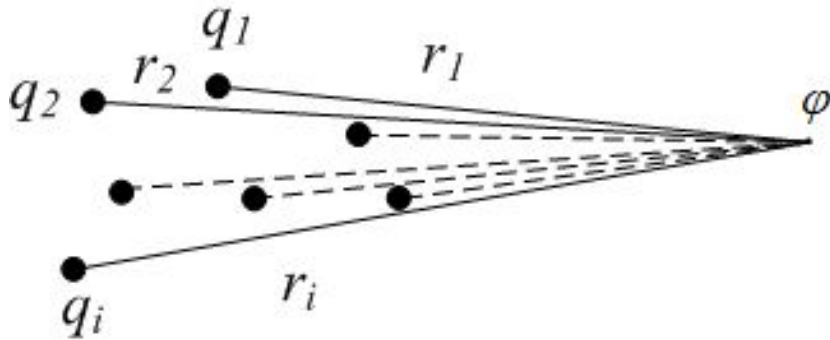
$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{W}{q} \\ W &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \end{aligned} \right\}$$

\Rightarrow

$$\varphi_{\text{точечн.зар.}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Принцип суперпозиции

Потенциал, созданный в данной точке системой зарядов q_i , равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в данной точке каждым зарядом системы в отдельности



$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$

В случае непрерывно распределённых зарядов:

$$\varphi = \int_V d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Энергия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \cdot \varphi_i$$

Потенциал, созданный всеми зарядами системы, кроме заряда q_i , в точке, где находится i -тый заряд

Связь между напряженностью и потенциалом

$$\left. \begin{array}{l} dA = F \cdot dl = F \cdot dr \\ F = qE \end{array} \right\} \Rightarrow dA = qE \cdot dr$$

$$\left. \begin{array}{l} dA = -dW \\ W = q\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow dA = -qd\varphi$$

$$qE \cdot dr = -qd\varphi$$

$$E \cdot dr = -d\varphi$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi$$

Градиент (grad) скалярной величины – вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания этой величины, показывает быстроту изменения этой величины в пространстве

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\text{grad} \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$\text{grad} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi$$

Вектор напряжённости направлен в сторону наибольшего УБЫВАНИЯ потенциала

Для однородного поля:

$$E = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$$

Связь между напряженностью и потенциалом

$$A_{12} = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = -(q \cdot \varphi_2 - q \cdot \varphi_1) = -q \cdot \Delta \varphi$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$A_{12} = -q \cdot \Delta \varphi$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Связь между напряженностью и потенциалом

Можно иначе:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi$$



$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta\varphi = \int_1^2 d\varphi$$

$$\Delta\varphi = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Для однородного поля:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

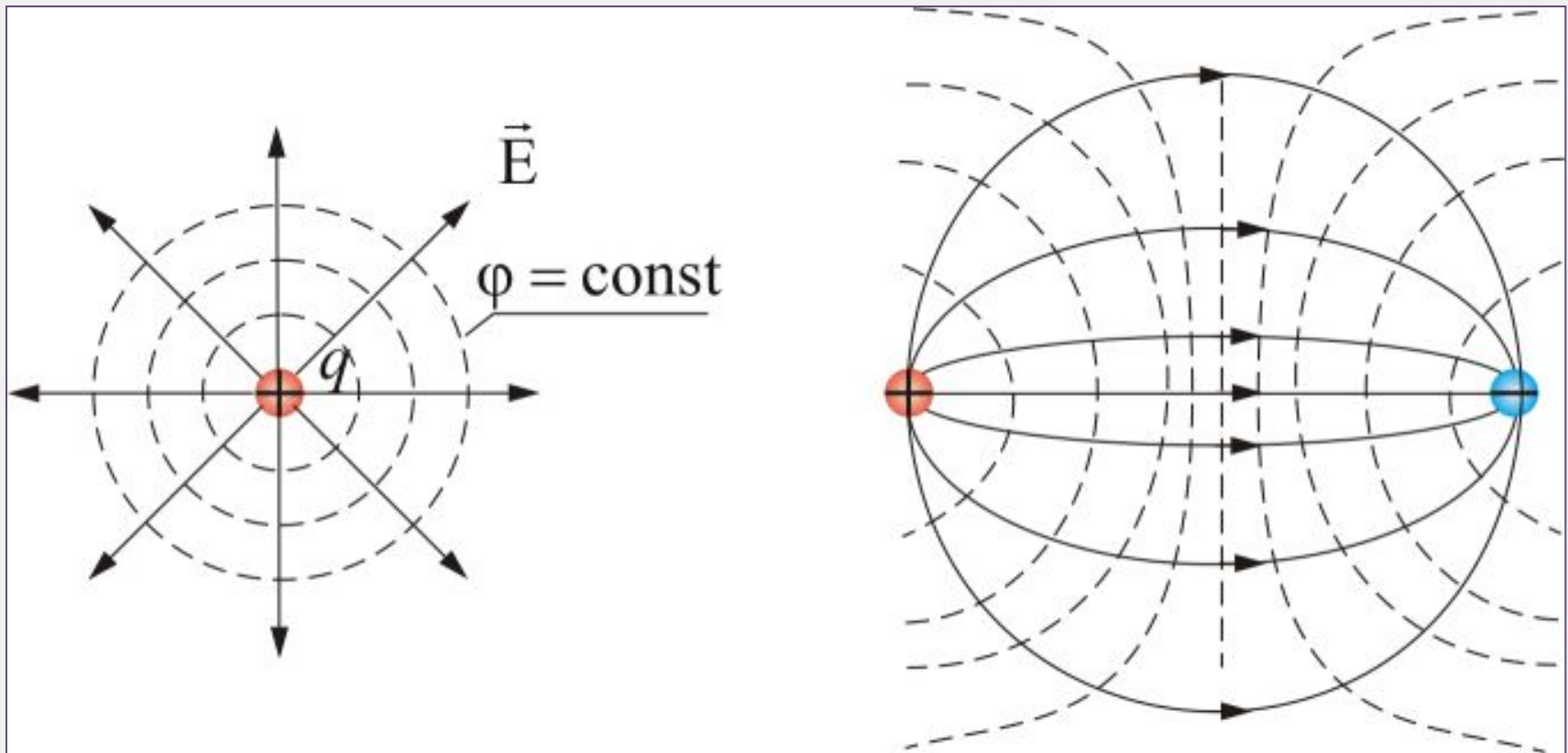
Потенциал. Эквипотенциальные поверхности

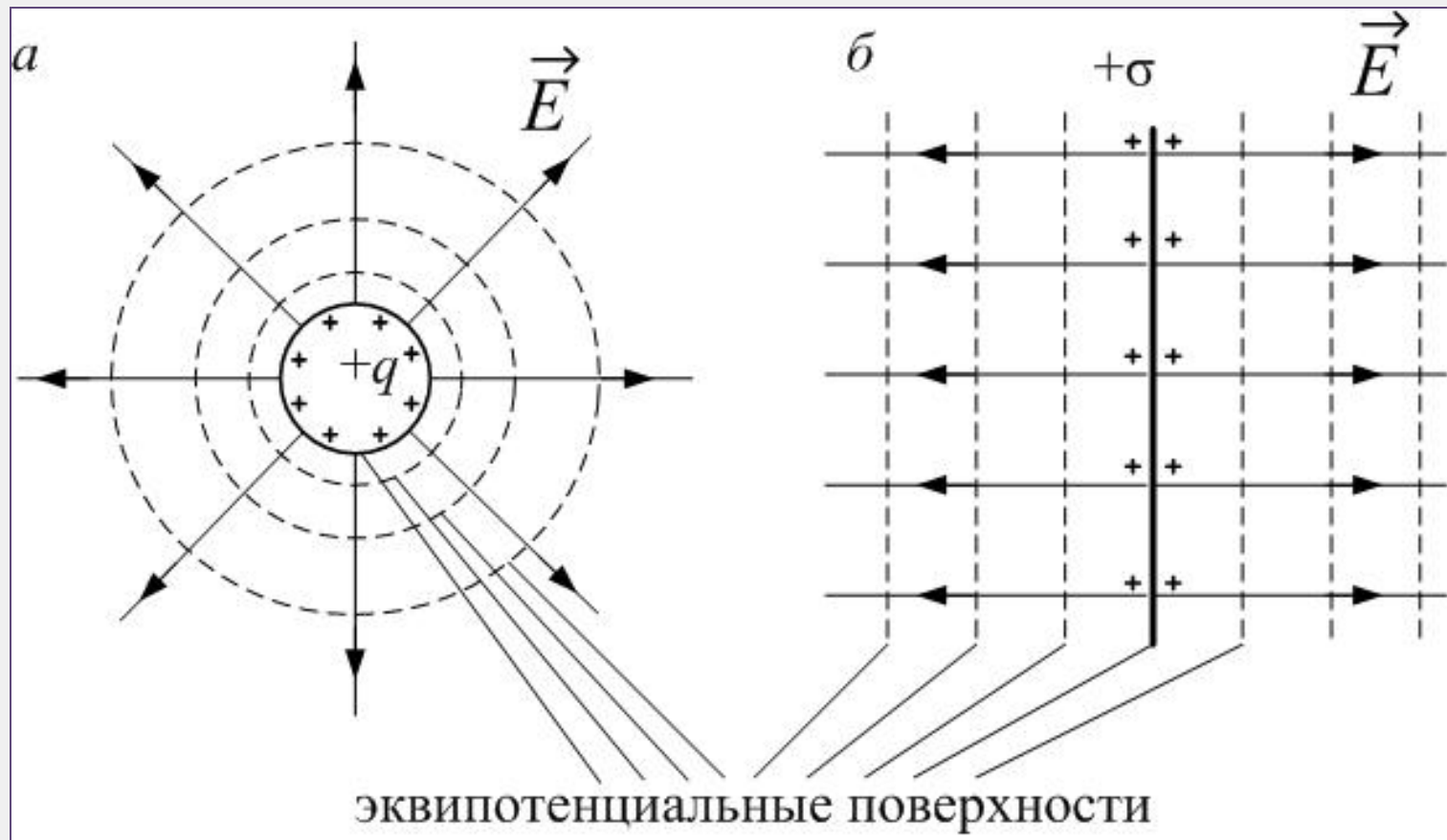
Эквипотенциальная поверхность –

совокупность точек пространства, где

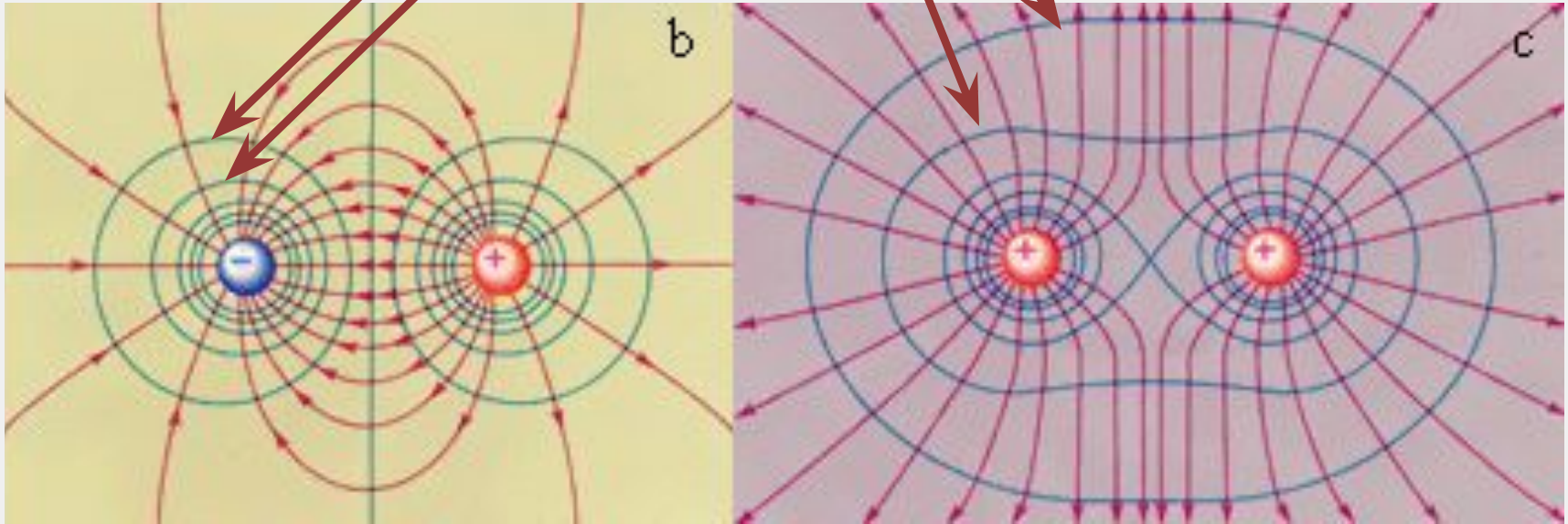
$$\varphi = \text{const}$$

Линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям

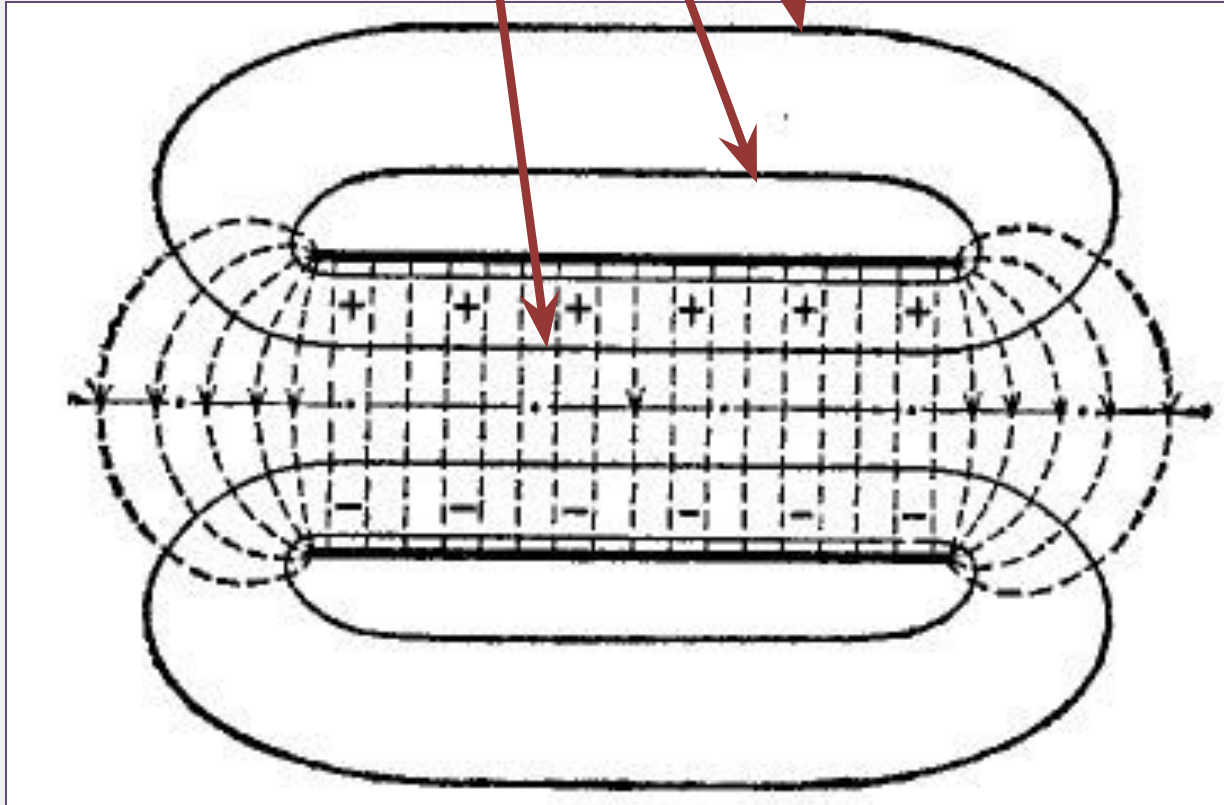




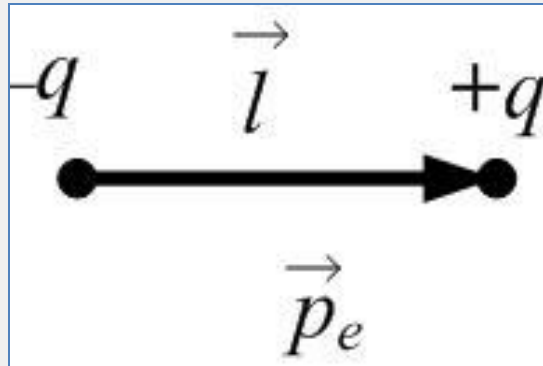
Эквипотенциальные поверхности



Эквипотенциальные поверхности



Электрический диполь



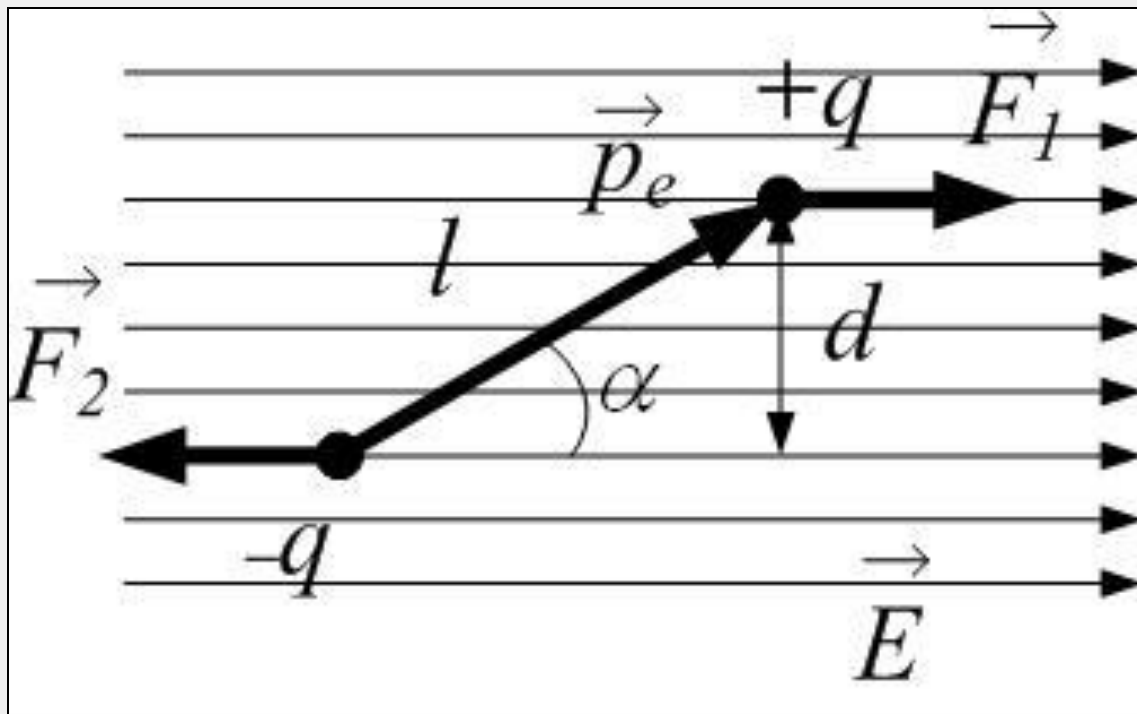
Определение:

Электрический диполь - система двух одинаковых по величине противоположных по знаку точечных зарядов

$\vec{p}_e = q \cdot \vec{l}$ - электрический дипольный момент

\vec{l} - плечо диполя

Электрический диполь в однородном поле



$$F_1 = F_2 \equiv F = qE$$

Диполь в электрическом поле ориентируется по полю

Электрический диполь в однородном поле

$$F_1 = F_2 \equiv F = qE$$

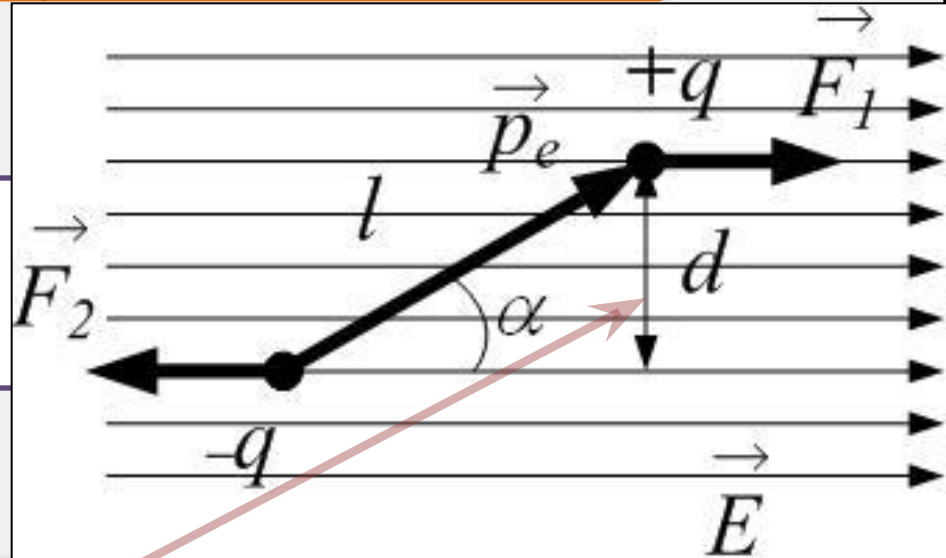
Силы равны и противоположны Это **пара сил**

Момент пары:

$$M = F \cdot d = F l \cdot \sin \alpha$$

$$M = qE \cdot l \cdot \sin \alpha = (ql)E \cdot \sin \alpha = p_e E \sin \alpha$$

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_e \times \vec{E} \right]$$



Энергия диполя в электростатическом поле

Работа dA внешних сил по повороту диполя на угол $d\alpha > 0$ идёт на увеличение энергии диполя в электрическом поле dW

$$dA = M \cdot d\alpha$$



$$dW = M \cdot d\alpha$$

$$\frac{dW}{d\alpha} = M = p_e E \sin \alpha$$

$$M = p_e E \sin \alpha$$

$$W = -p_e E \cos \alpha$$

$$W = -p_e E$$

Электрический диполь в неоднородном поле

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(-p_e E \cos \alpha) = p_e \cos \alpha \frac{\partial E}{\partial x}$$

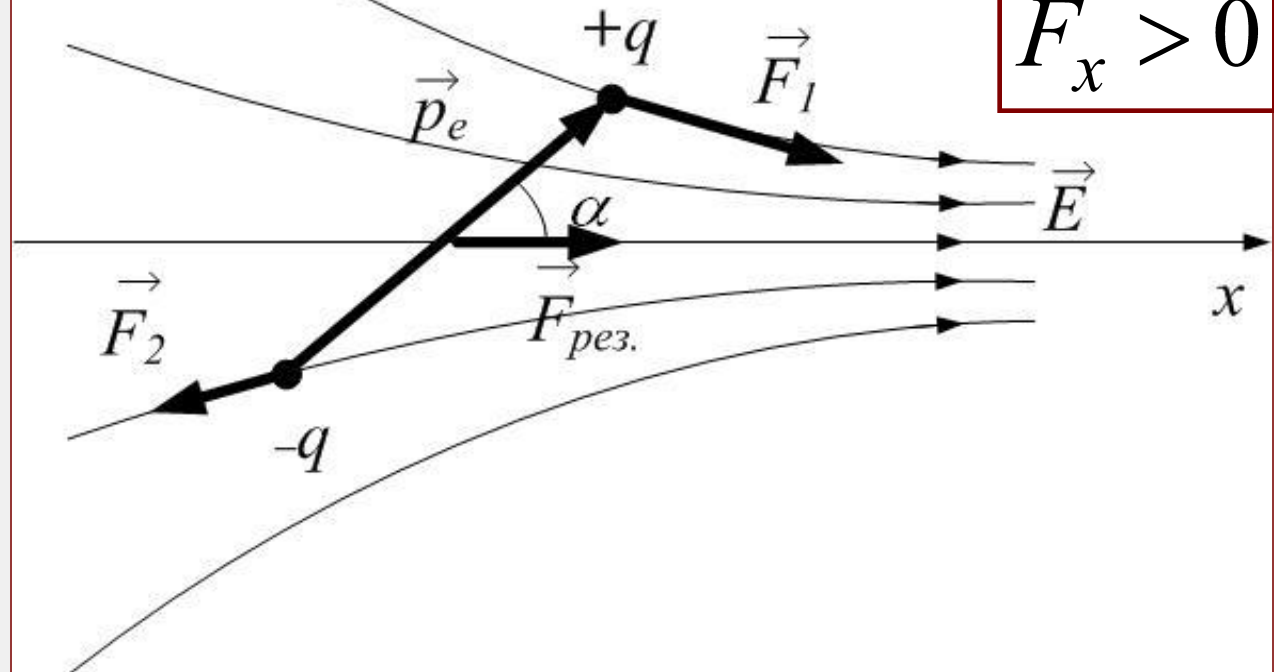
$$W = -p_e E \cos \alpha$$

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$F_x > 0$$

Силы не
равны

$$F_1 > F_2$$



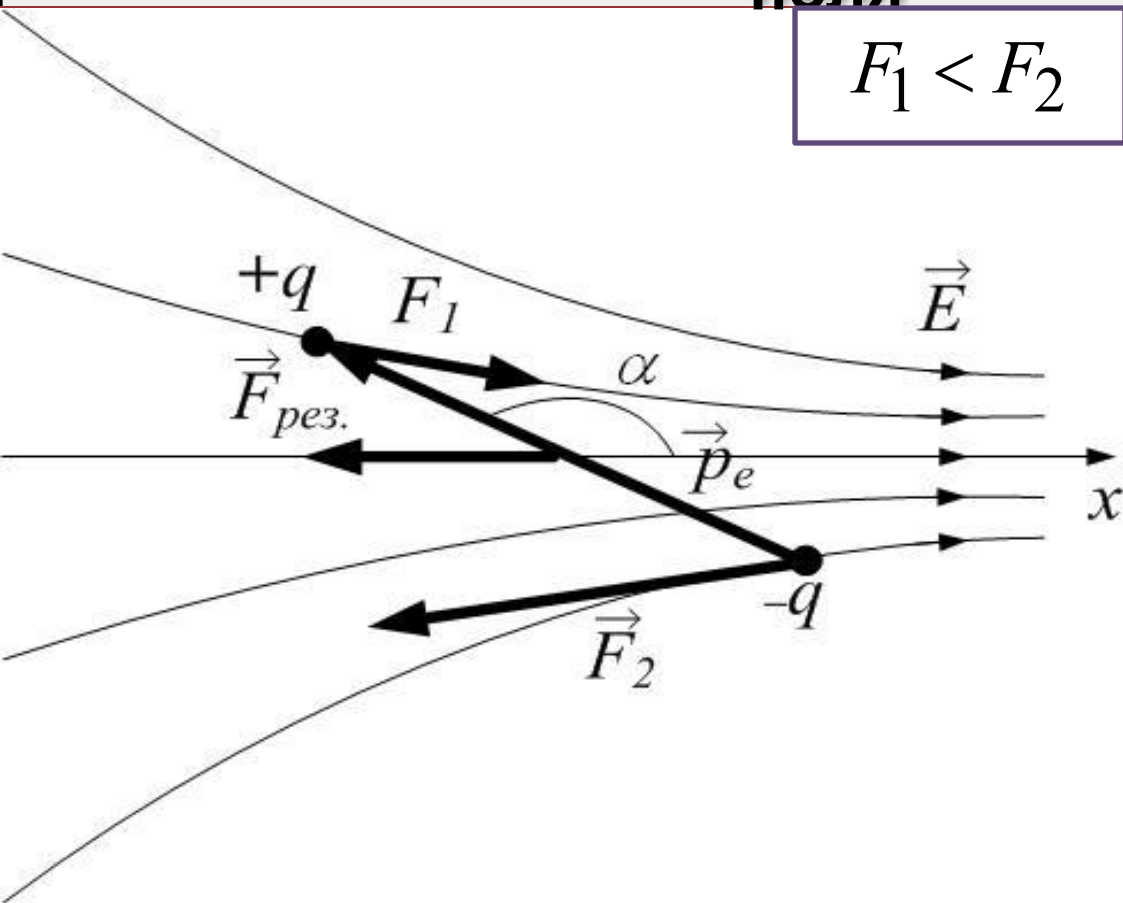
Если угол α – острый, диполь втягивается в поле

Электрический диполь в Неоднородном поле

Если угол α – тупой, диполь выталкивается из поля

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$$

$$F_1 < F_2$$

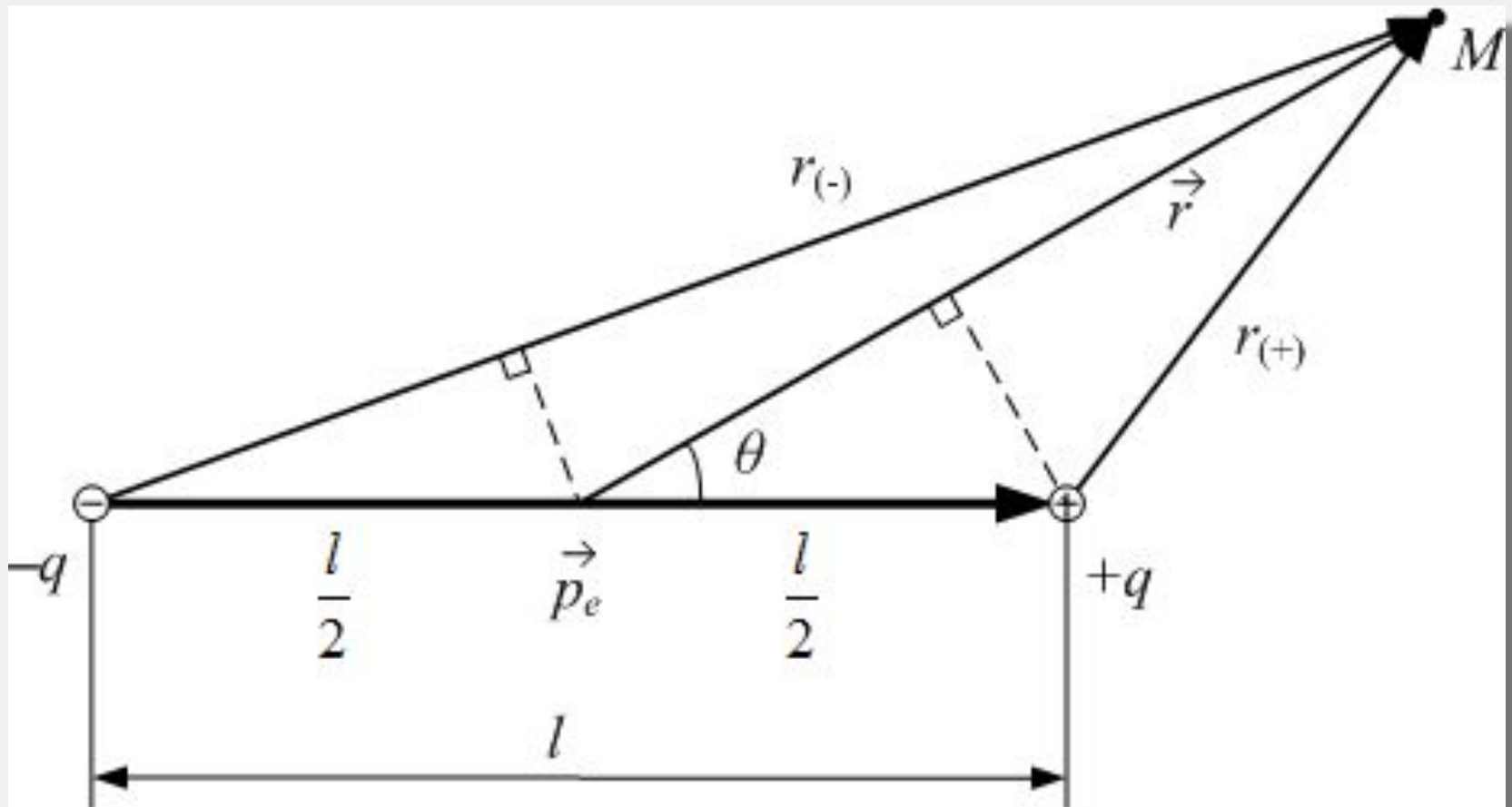


$$F_x = p_e \cos \alpha \frac{\partial E}{\partial x}$$

$$F_x > 0$$

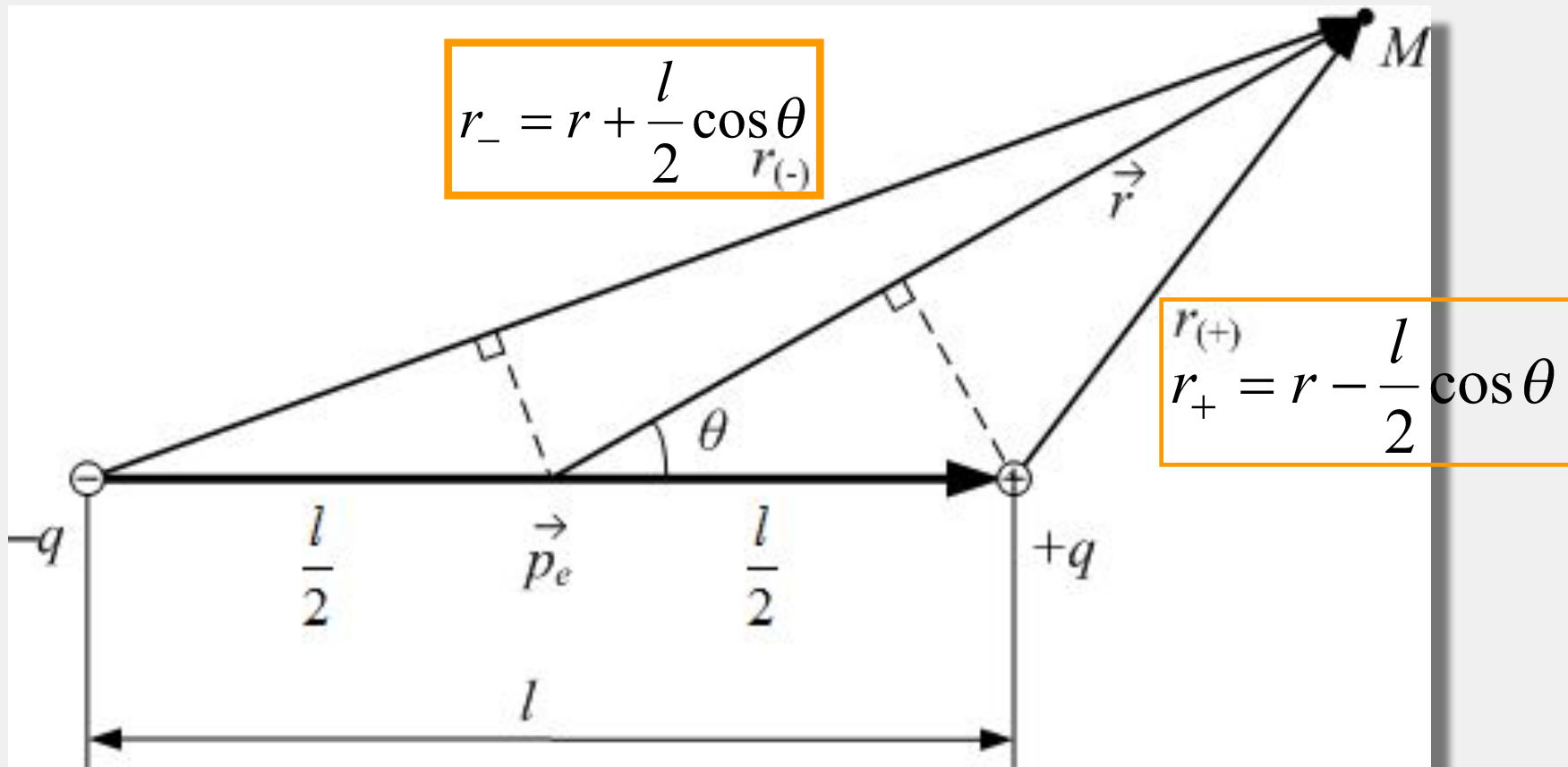
Свободный диполь сначала ориентируется по полю, а затем втягивается в область сильного поля

Электрическое поле, созданное точечным диполем



Потенциал поля, созданного точечным диполем

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_-}$$

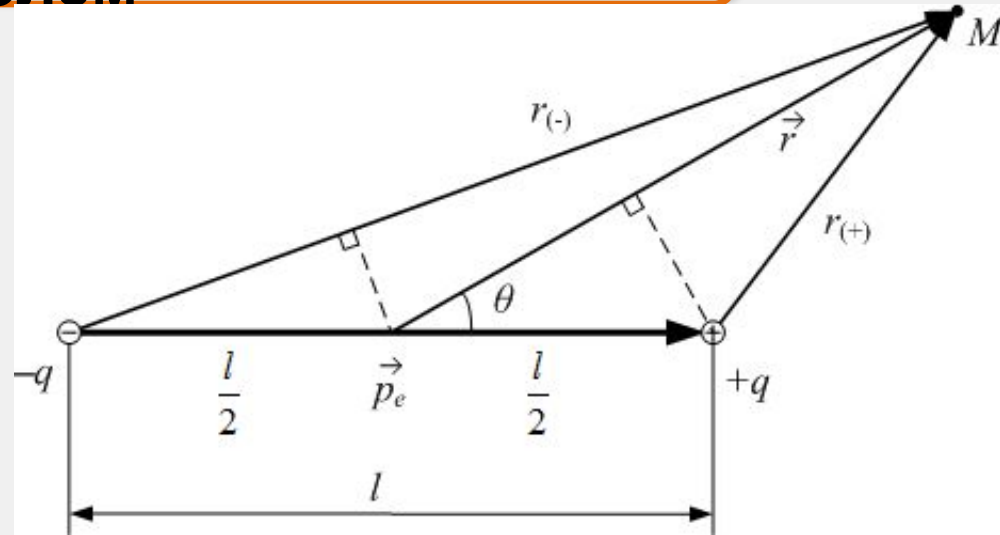


Потенциал поля, созданного точечным диполем

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_-}$$

$$r_- = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_+ = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

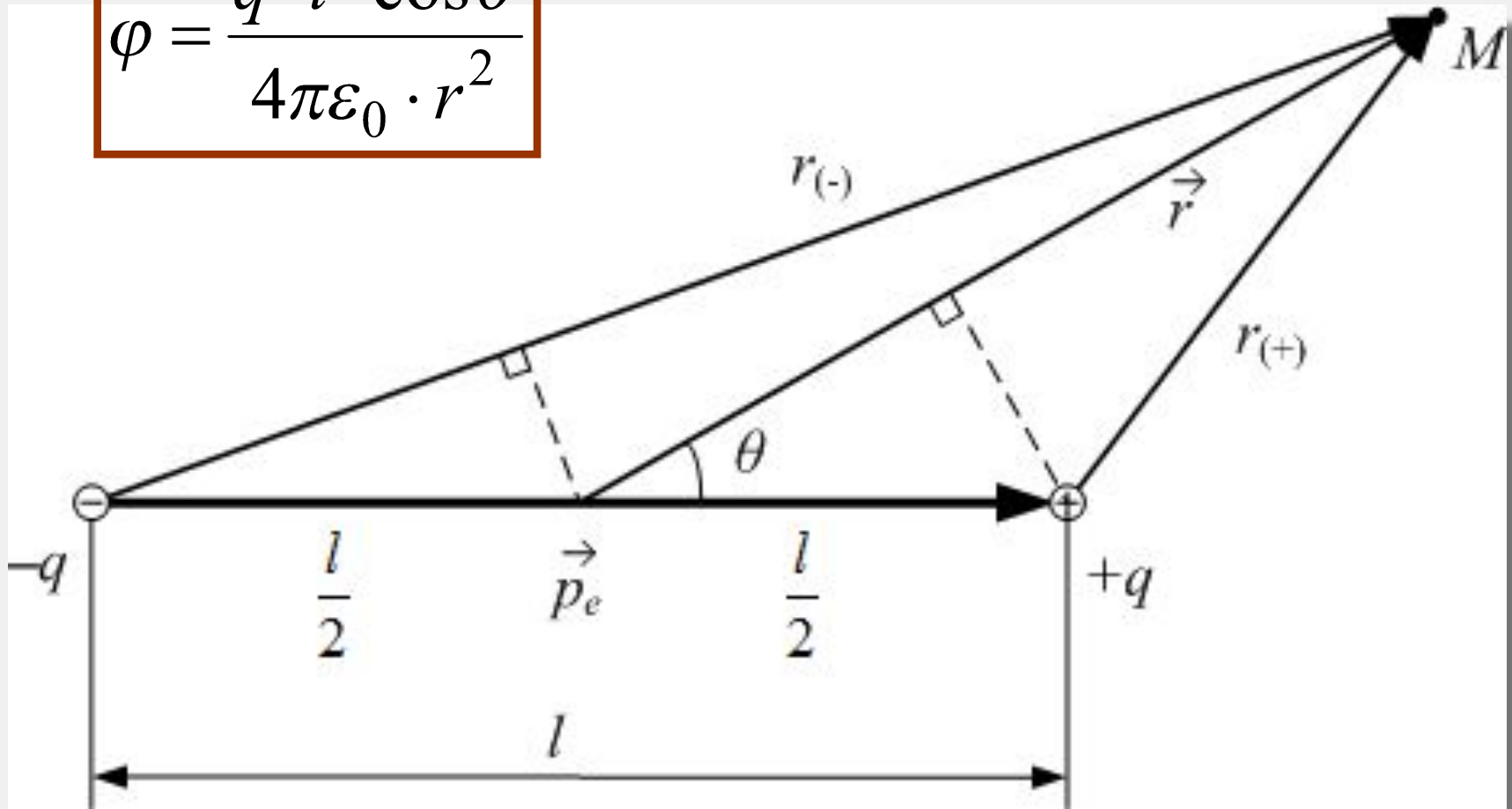


$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\left(r + \frac{l}{2} \cos \theta \right) - \left(r - \frac{l}{2} \cos \theta \right)}{\left(r - \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(r + \frac{l}{2} \cos \theta \right)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l \cdot \cos \theta}{r^2 - \left(\frac{l}{2} \cos \theta \right)^2} \approx \frac{q \cdot l \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

Потенциал поля, созданного точечным диполем

$$\varphi = \frac{q \cdot l \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

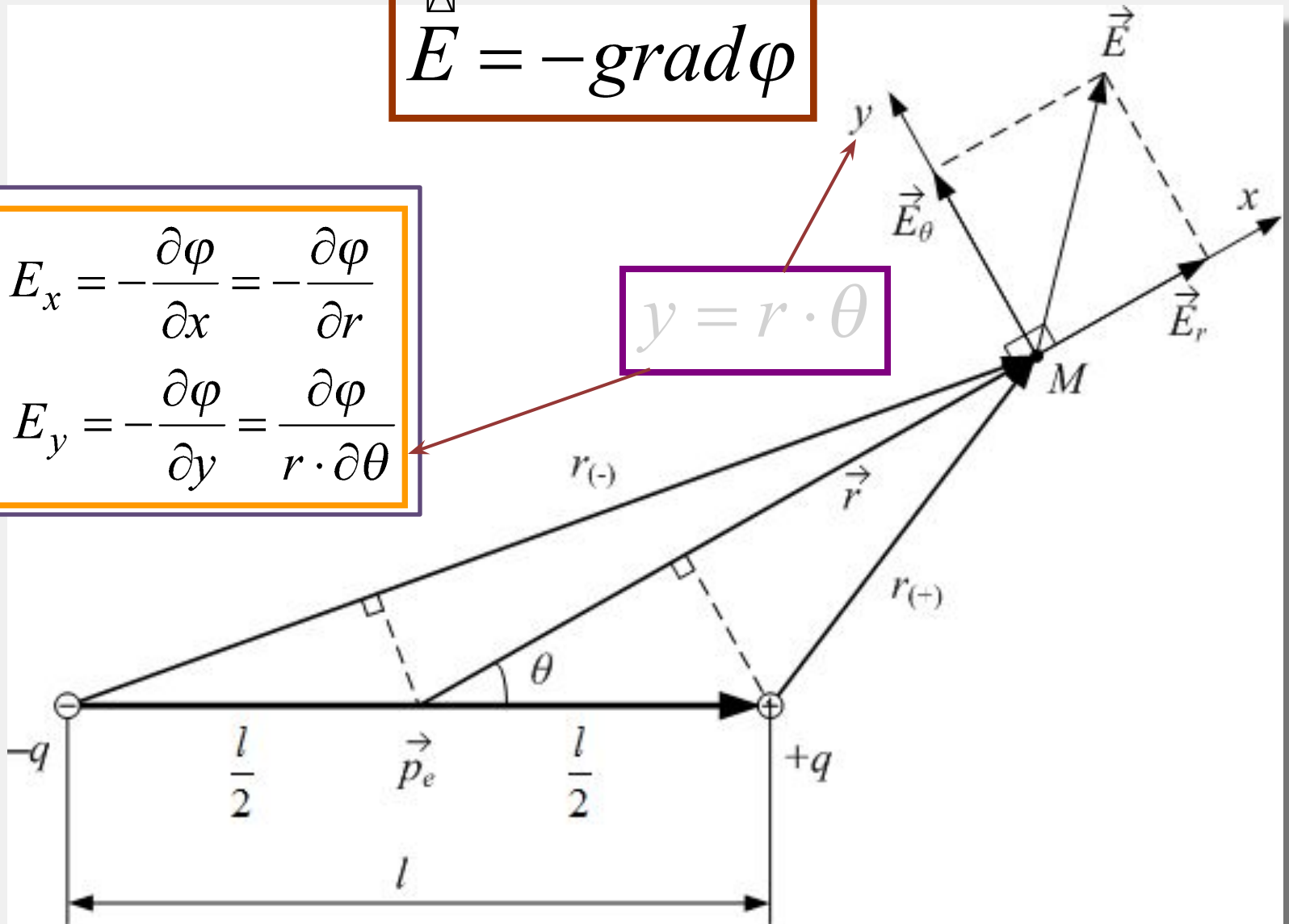


Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

$$\begin{cases} E_r = E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \\ E_\theta = E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{r \cdot \partial\theta} \end{cases}$$

$$y = r \cdot \theta$$



Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$\varphi = \frac{q \cdot l \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_e \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \right) = \frac{p_e \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3}$$

Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$\varphi = \frac{q \cdot l \cdot \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$E_{\theta} = -\frac{\partial \varphi}{r \cdot \partial \theta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_e \cdot \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^2} \right)$$

$$E_{\theta} = -\frac{p_e}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta}$$

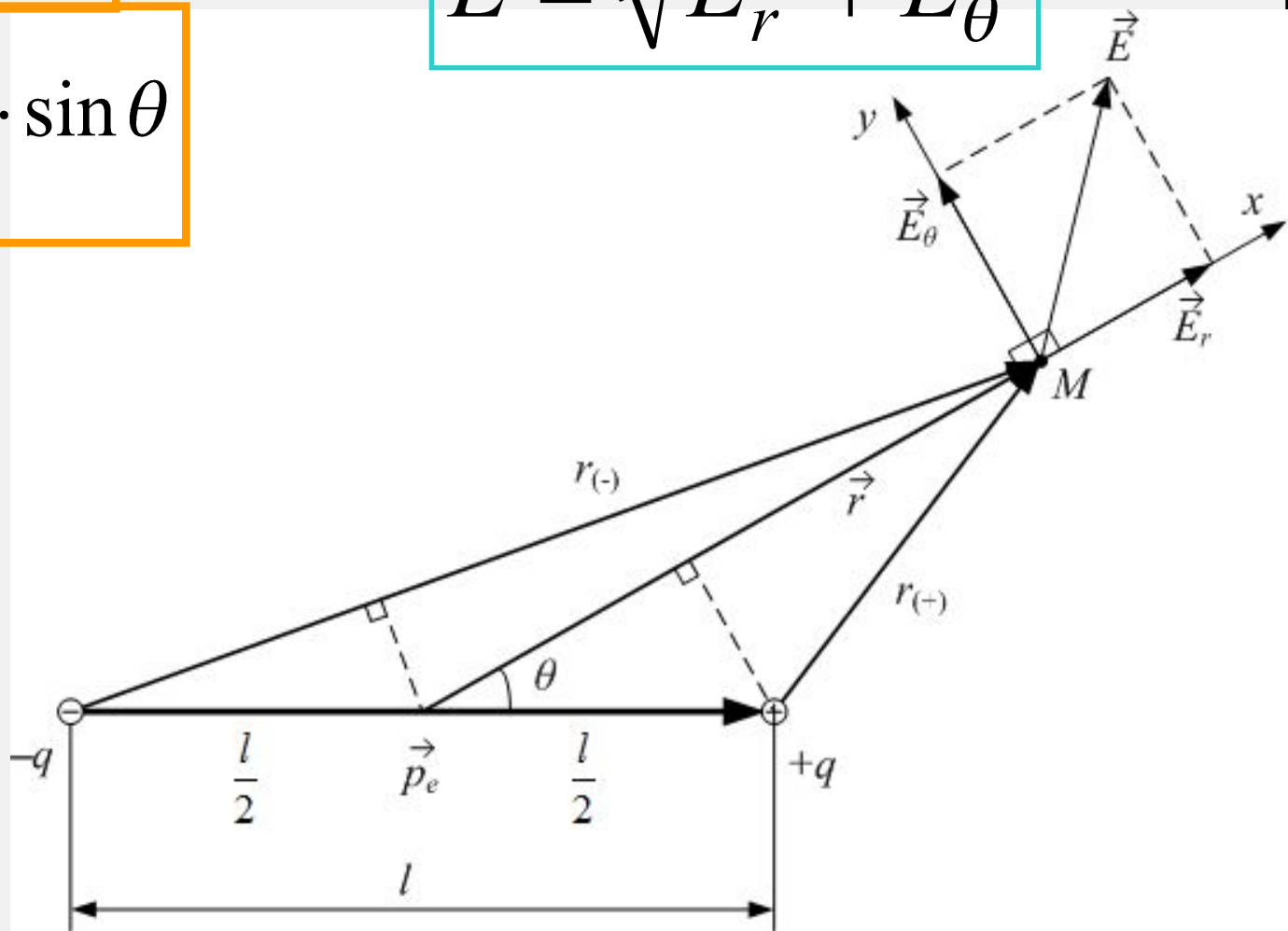
$$E_{\theta} = \frac{p_e}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sin \theta$$

Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$E_r = \frac{p_e \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sin \theta$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$$



Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$E_r = \frac{p_e \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3} \quad E_\theta = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sin \theta$$

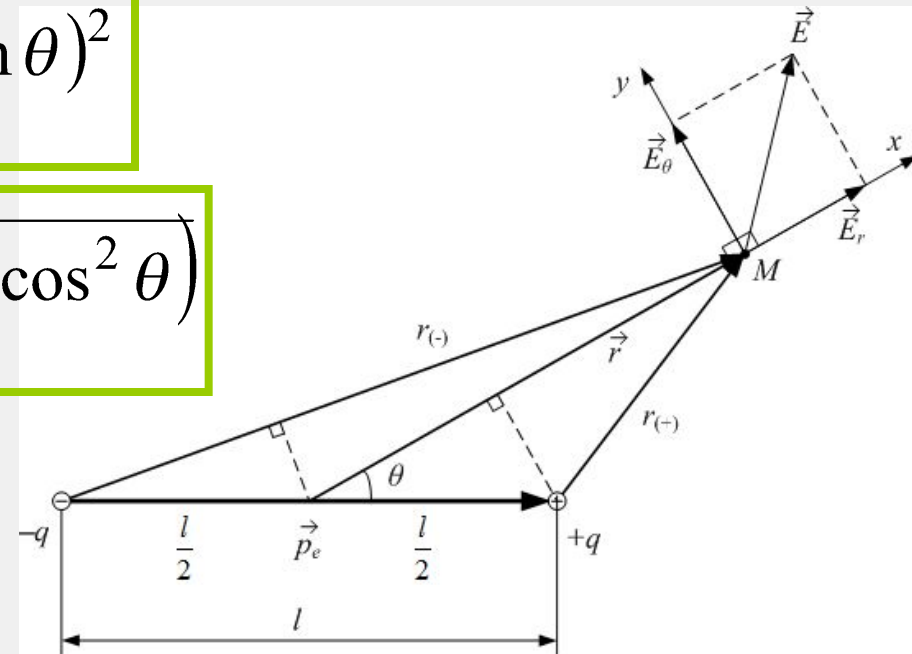
$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$$

$$E = \sqrt{\left(\frac{p_e \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sin \theta \right)^2}$$

$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{(2 \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}$$

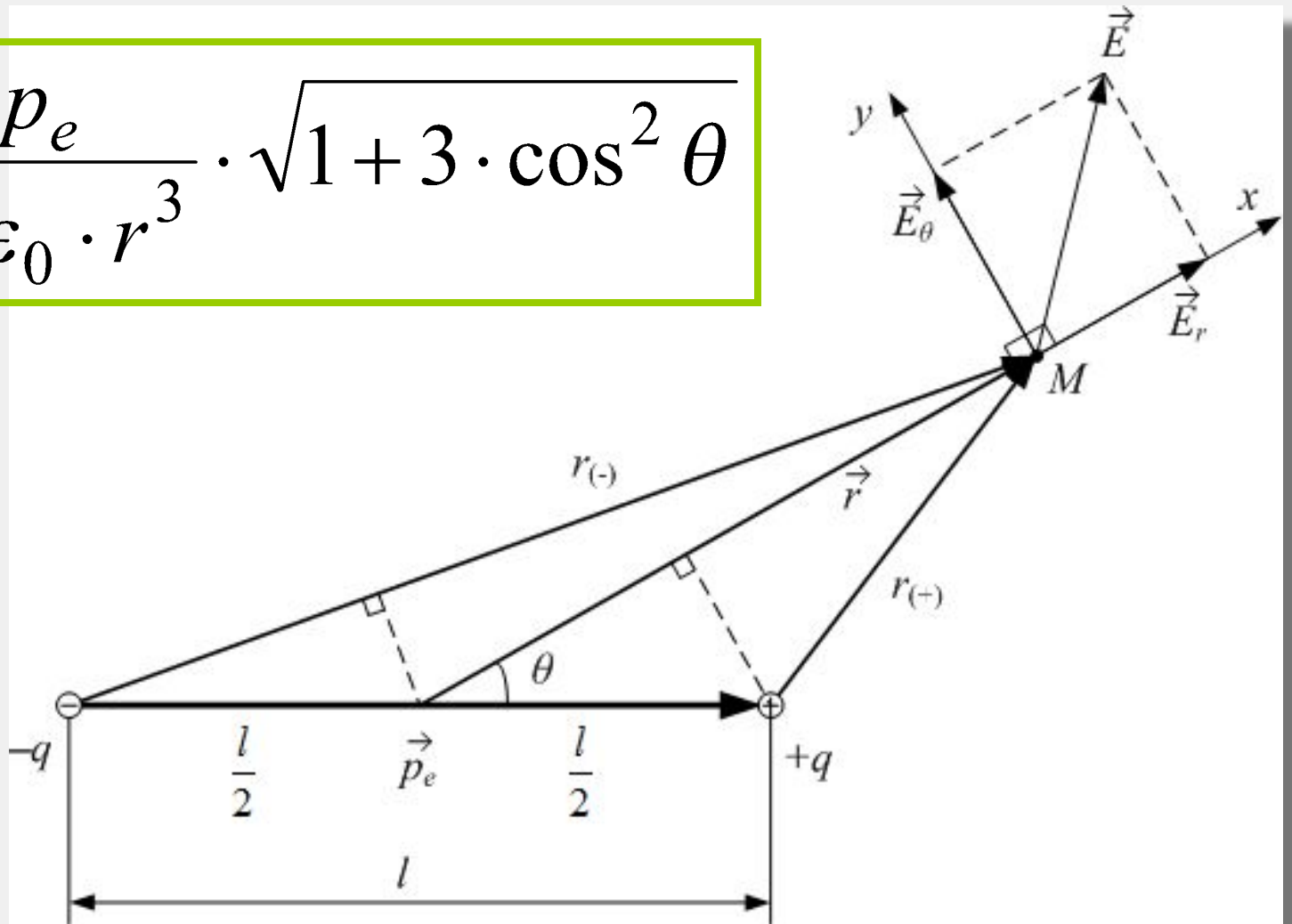
$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{4 \cdot \cos^2 \theta + (1 - \cos^2 \theta)}$$

$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 \theta}$$



Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 \theta}$$



Напряжённость поля диполя.

Частные случаи

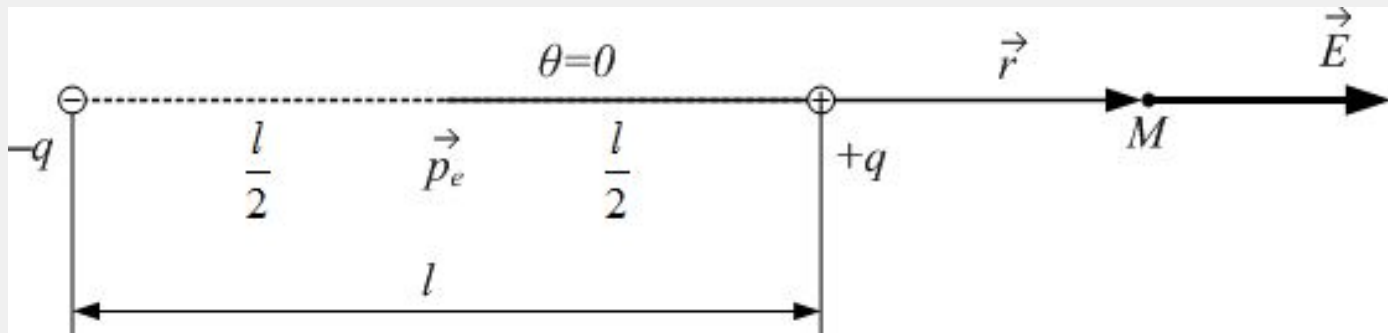
А) На оси
диполя:

$$\theta = 0$$

или

$$\theta = \pi$$

$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 \theta}$$



$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot 2 = \frac{p_e}{2\pi\epsilon_0 \cdot r^3}$$

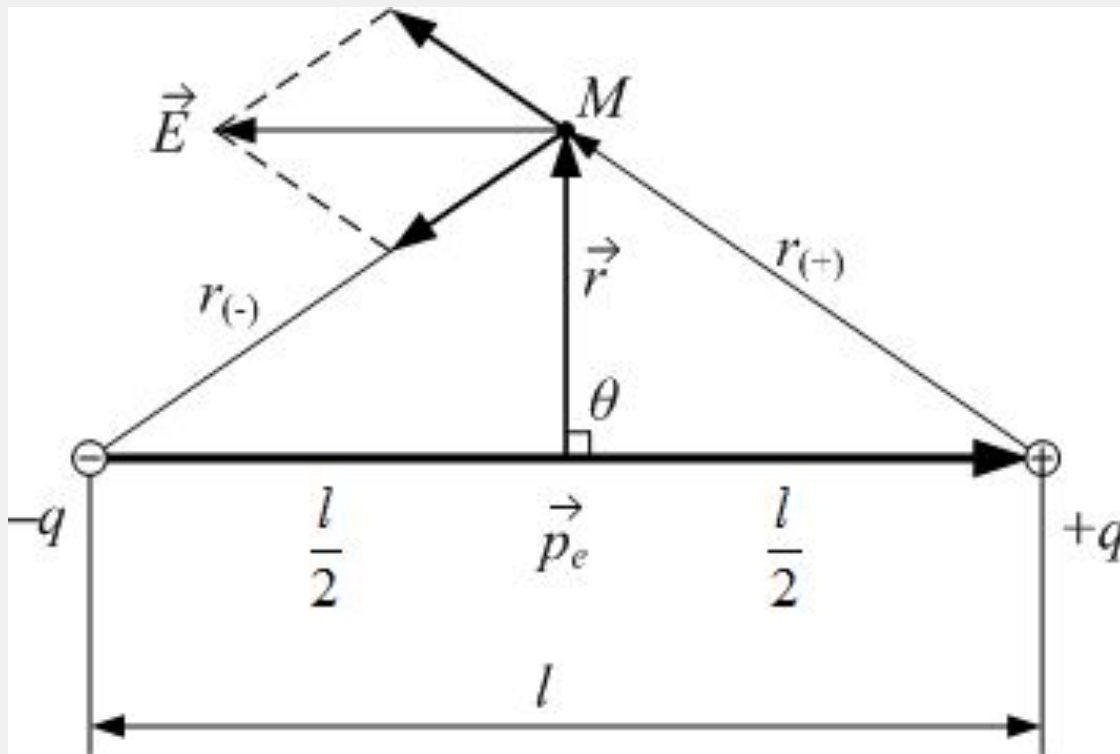
Напряжённость поля диполя.

Частные случаи

$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 \theta}$$

б) На равном расстоянии от зарядов диполя:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$



$$E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}$$