ВоГУ

Лекция 21 (3)

Работа в электростатическом поле
Потенциал
Связь между напряженностью и потенциалом
Диполь

Кузина Л.А.,
к.ф.-м.н.,
доцент

2017 г.

План

1. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле
2. Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции
3. Потенциал
4. Связь между напряженностью и потенциалом
5. Электрический диполь.

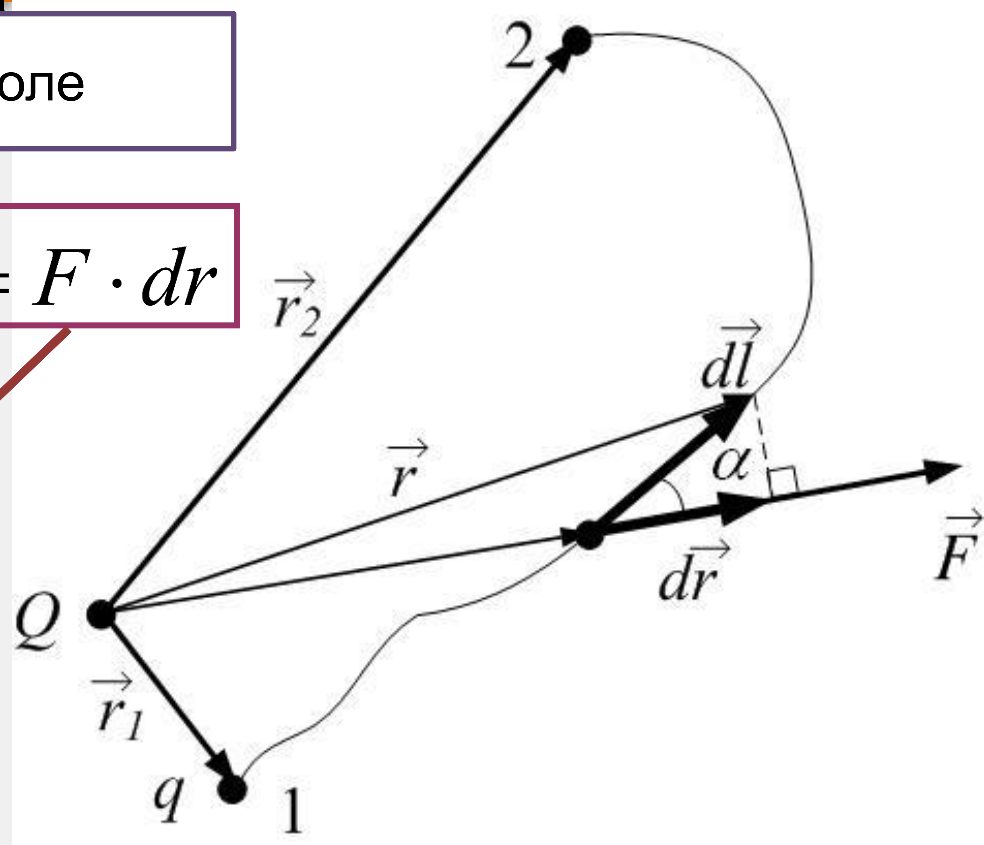
   5.1. Диполь в электрическом поле. Энергия диполя

   5.2. Поле диполя

Работа по перемещению заряда в электростатическом поле

Работа электростатических сил по перемещению точечного заряда *q* в поле заряда *Q:*

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot \cos\alpha \cdot dl = F \cdot dr$$



$$F = qE$$

$$dA = qE \cdot dr$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA$$

$$dA = qE \cdot dr$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA$$

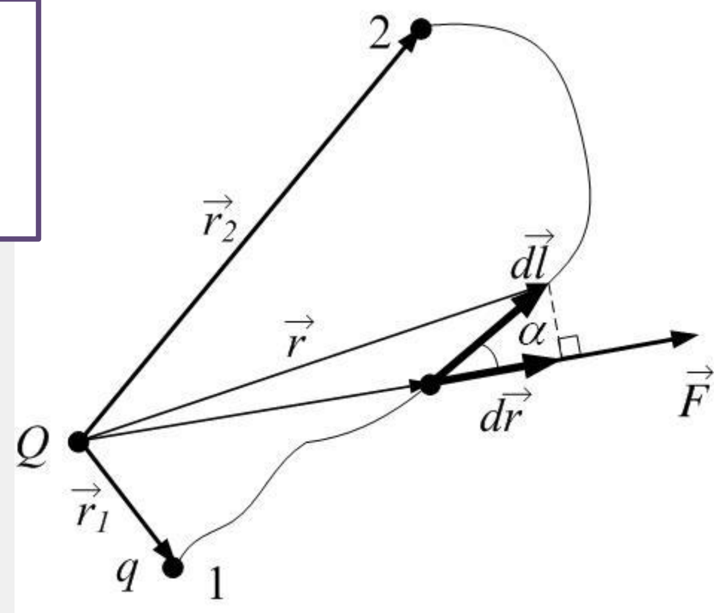
$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} qE \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr$$

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{r^2}\right) \cdot dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}$$

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}$$

$$\boxed{A_{12} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

По закону сохранения энергии работа совершается за счёт уменьшения потенциальной энергии взаимодействия зарядов:



$$A_{12} = -\Delta W = -(W_2 - W_1)$$

$$A_{12} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$W = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + const$$

$$W = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}$$

$W_\infty = 0$ при $r \to \infty$

Потенциальный характер электростатического поля.
Теорема о циркуляции

$$A_{12} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

__Работа__ __не зависит от траектории__, а только от начального и конечного положения заряда *q*.

Электростатическое поле потенциально

Потенциальны поля только <u>неподвижных зарядов</u>

Для замкнутой траектории: $r_1 = r_2$

$$A = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 0$$

$$A = \oint_L dA = 0$$

$$A = \oint\limits_L dA = 0$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$A = \oint\limits_L dA = \oint\limits_L q\vec{E}d\vec{l} = q\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Циркуляция вектора напряжённости:

$$\boxed{\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

<u>Теорема о циркуляции</u>:

циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю

Для того, чтобы векторное поле было потенциально, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция вектора напряжённости поля по произвольному замкнутому контуру была равна нулю, то есть:

$$\boxed{\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

$\Leftrightarrow$

Поле потенциально

Потенциальны только поля НЕПОДВИЖНЫХ зарядов

Потенциал

Определение:

Потенциал данной точки поля – это энергия единичного положительного точечного пробного заряда, помещённого в данную точку:

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{q}}$$

$$[\varphi] = \frac{Дж}{Кл} = В$$

Потенциал – **скалярная энергетическая** характеристика поля

Энергия заряда q в точке поля с потенциалом φ:

$$W = q \cdot \varphi$$

Потенциал

Ещё определение:

Потенциал данной точки поля численно равен работе по перемещению единичного точечного пробного положительного заряда из данной точки поля на бесконечность

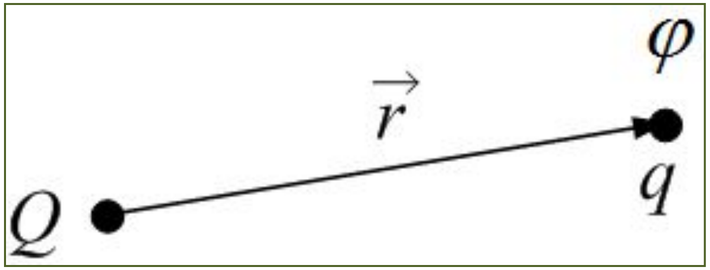
$$\boxed{\varphi = \frac{A_\infty}{q}}$$

Определения эквивалентны:

$$A_\infty = -\Delta W = -\left(W_\infty - W\right) = W$$

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{q}}$$

Потенциал поля, созданного точечным зарядом *Q* на расстоянии *r*:

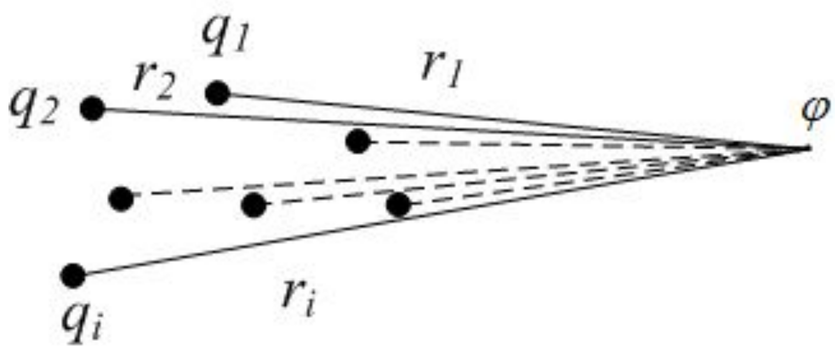


$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{W}{q} \\ W &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \varphi_{\text{точечн.зар.}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}$$

Принцип суперпозиции

Потенциал, созданный в данной точке системой зарядов q_i, равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в данной точке каждым зарядом системы в отдельности

$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$



В случае непрерывно распределённых зарядов:

$$\varphi = \int_V d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}$$

Энергия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \cdot \varphi_i$$

Потенциал, созданный всеми зарядами системы, кроме заряда q_i, в точке, где находится i-тый заряд

Связь между напряженностью и потенциалом

$$\left.\begin{aligned} dA &= \vec{F}\cdot d\vec{l} = \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ \vec{F} &= q\vec{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad dA = q\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned} dA &= -dW \\ W &= q\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad dA = -qd\varphi$$

$$\boxed{q\vec{E}\cdot d\vec{r} = -qd\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{E}\cdot d\vec{r} = -d\varphi}$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{r} = -d\varphi$$

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

<u>Градиент</u> (grad) скалярной величины – вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания этой величины, показывает быстроту изменения этой величины в пространстве

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$grad\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

$$grad\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi$$

Вектор напряжённости направлен в сторону <u>наибольшего УБЫВАНИЯ потенциала</u>

Для однородного поля:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

Связь между напряженностью и потенциалом

$$A_{12} = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = -(q\cdot\varphi_2 - q\cdot\varphi_1) = -q\cdot\Delta\varphi$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$A_{12} = -q\cdot\Delta\varphi$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Связь между напряженностью и потенциалом

Можно иначе:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi \Leftrightarrow d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta\varphi = \int_1^2 d\varphi$$

$$\Delta\varphi = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

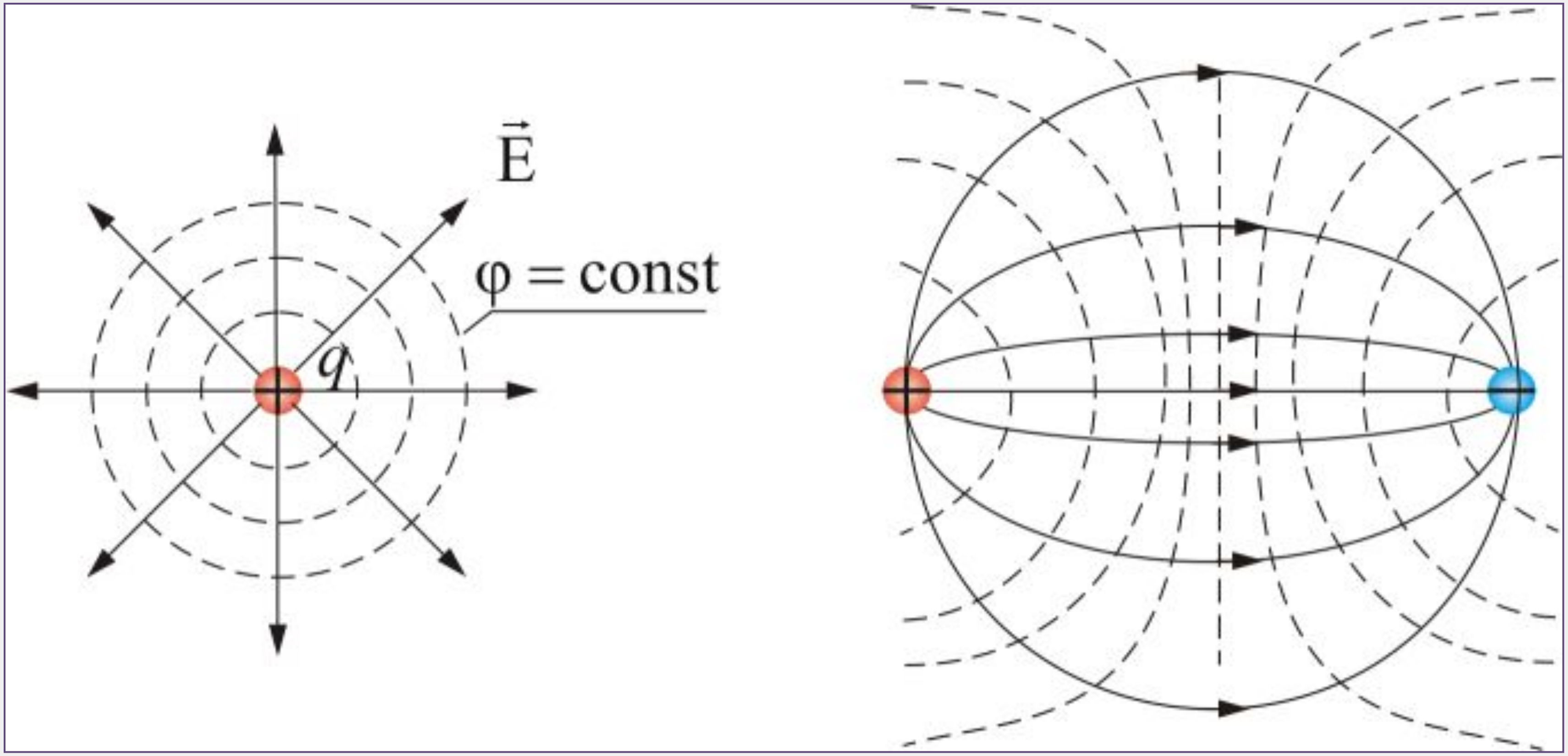
Для однородного поля:

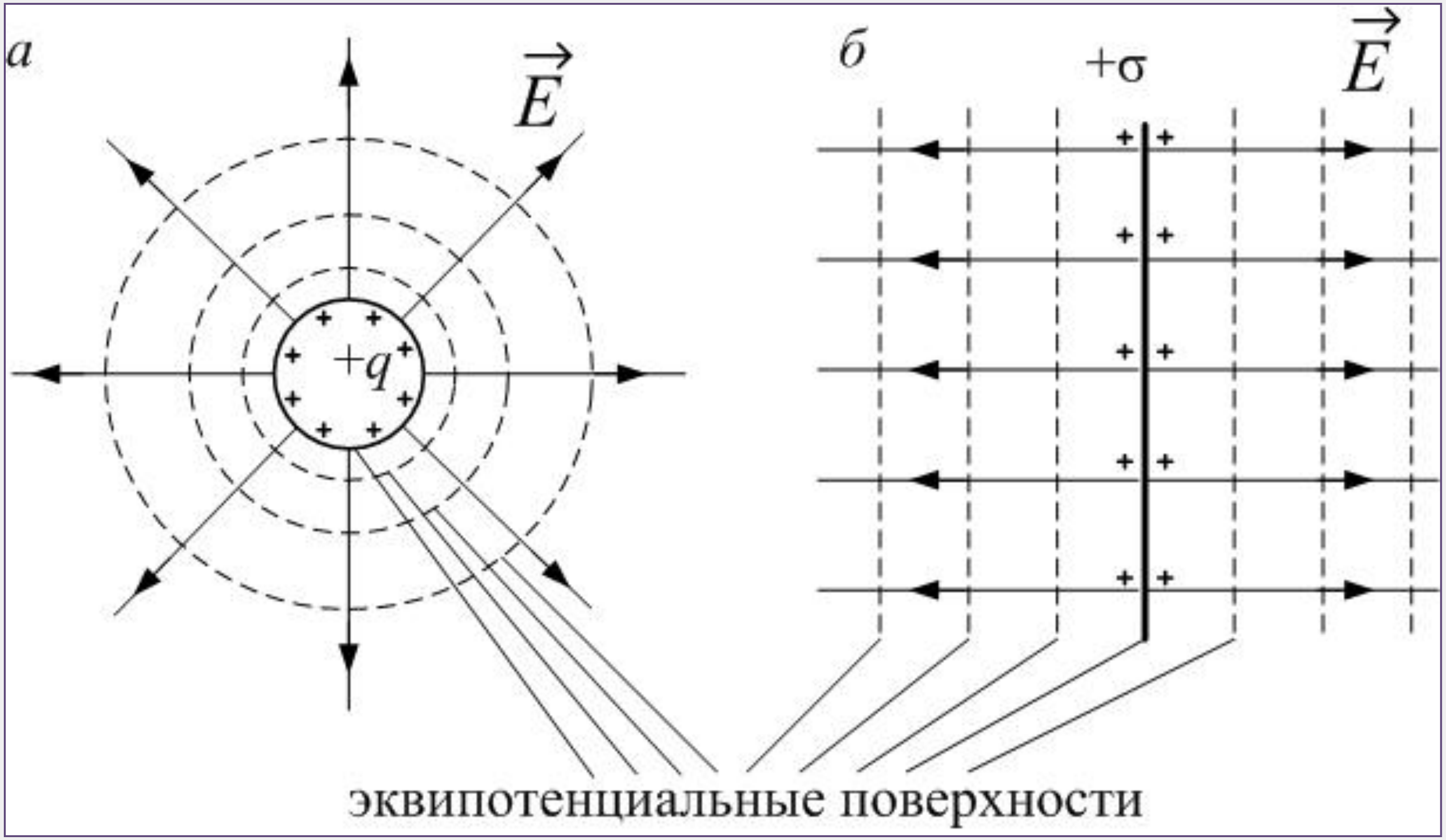
$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

Потенциал. Эквипотенциальные поверхности

<u>Эквипотенциальная поверхность</u> – совокупность точек пространства, где φ=const

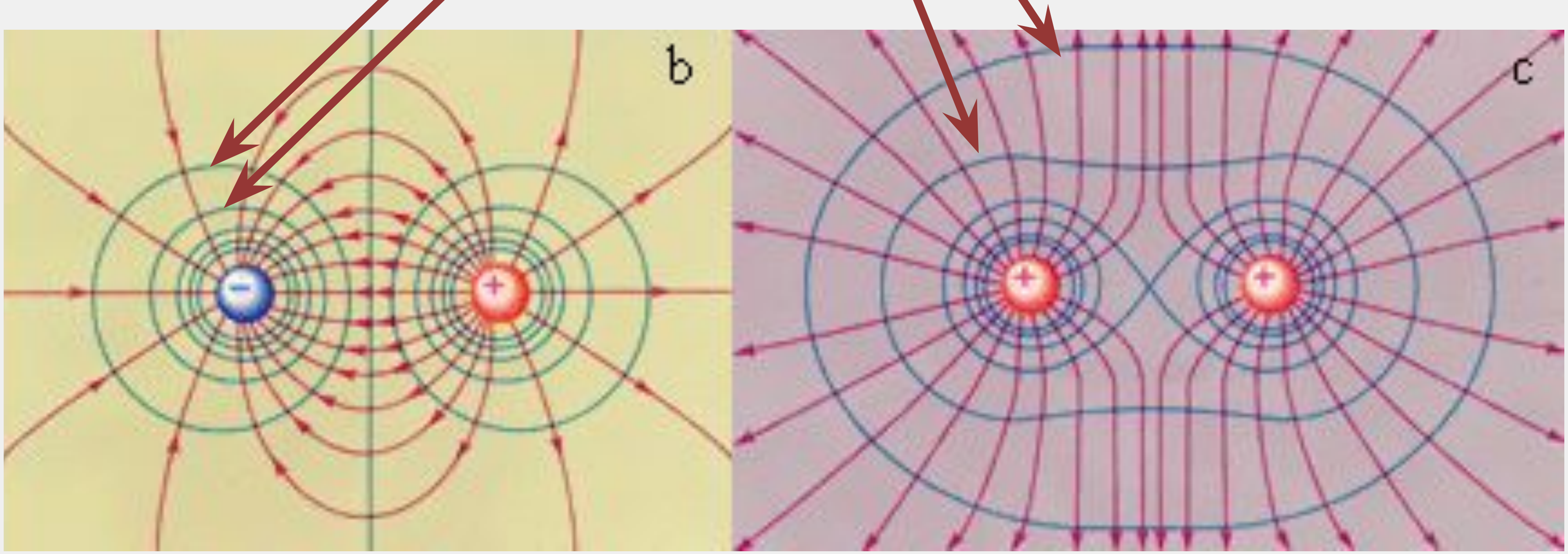
Линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям



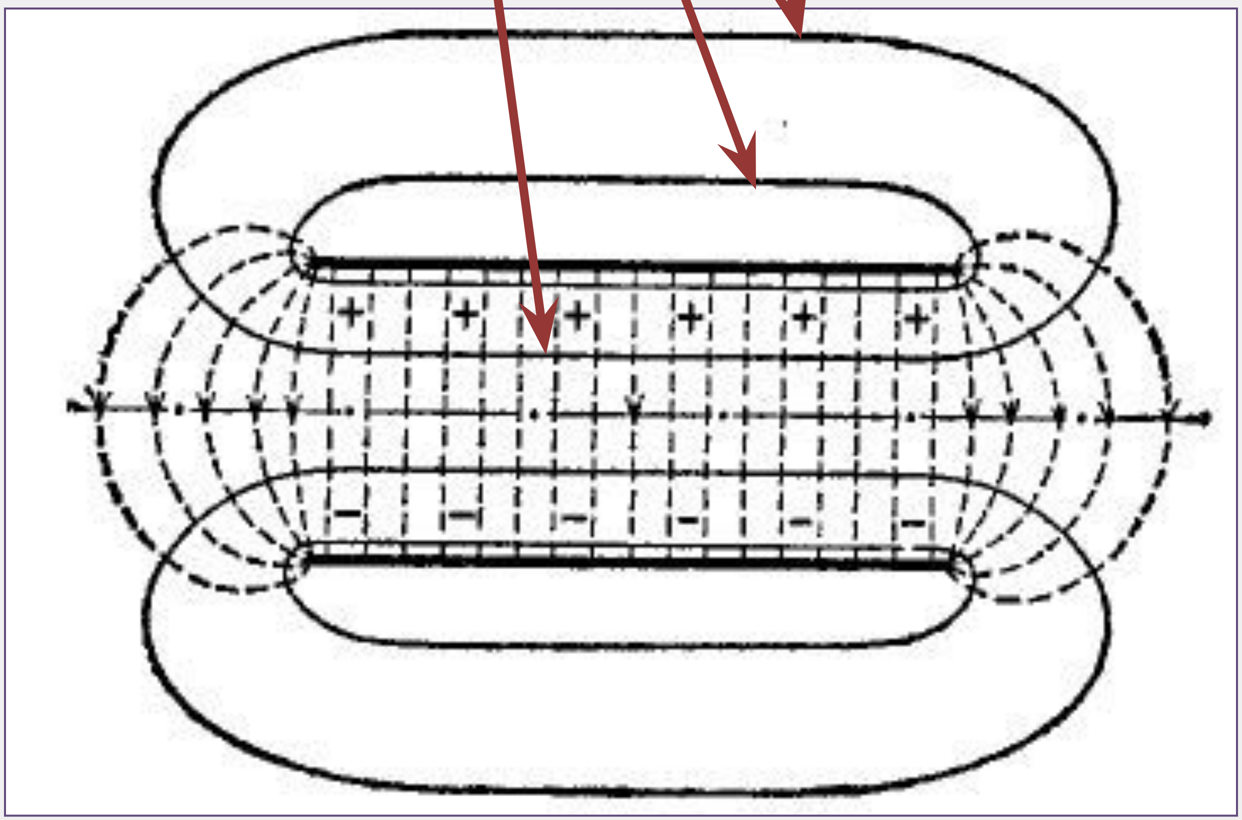


а
$\vec{E}$
$+q$
б
$+\sigma$
$\vec{E}$
эквипотенциальные поверхности

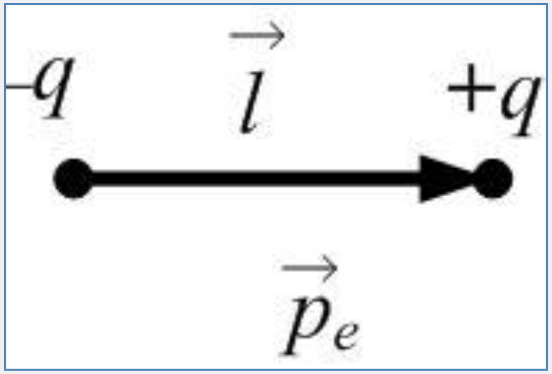
Эквипотенциальные поверхности



Эквипотенциальные поверхности



Электрический диполь



Определение:

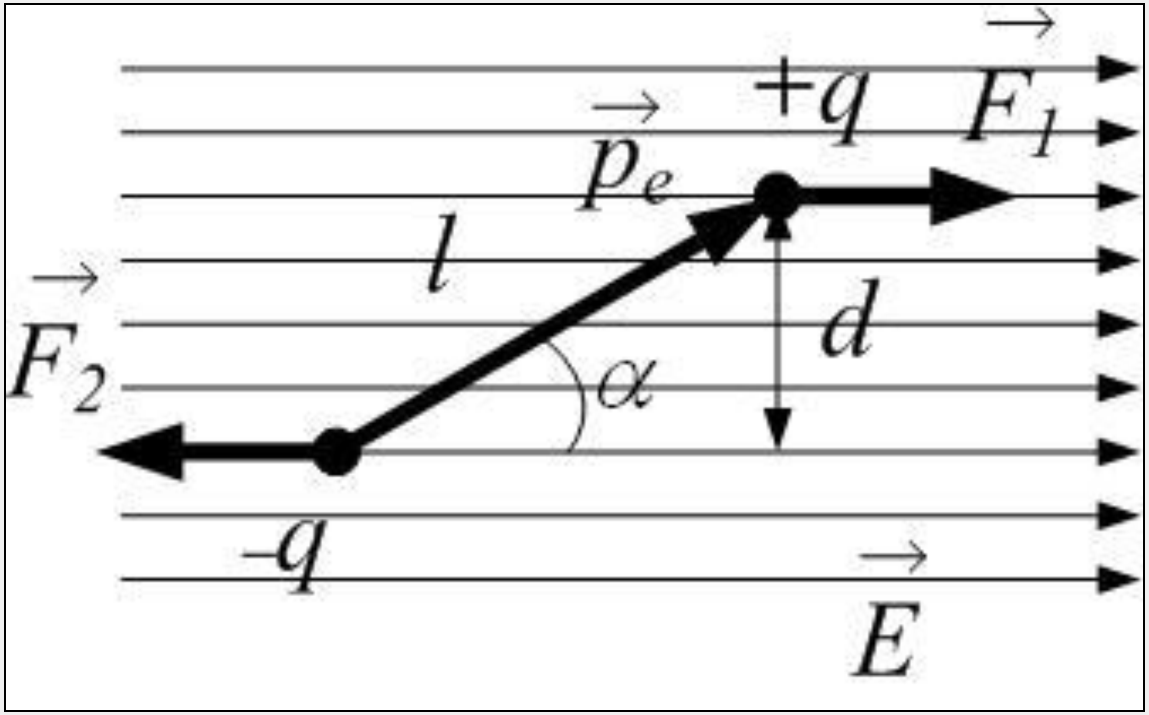
Электрический диполь - система двух одинаковых по величине противоположных по знаку точечных зарядов

$$\vec{p}_e = q \cdot \vec{l}$$

- электрический дипольный момент

$\vec{l}$ – плечо диполя

Электрический диполь в однородном поле



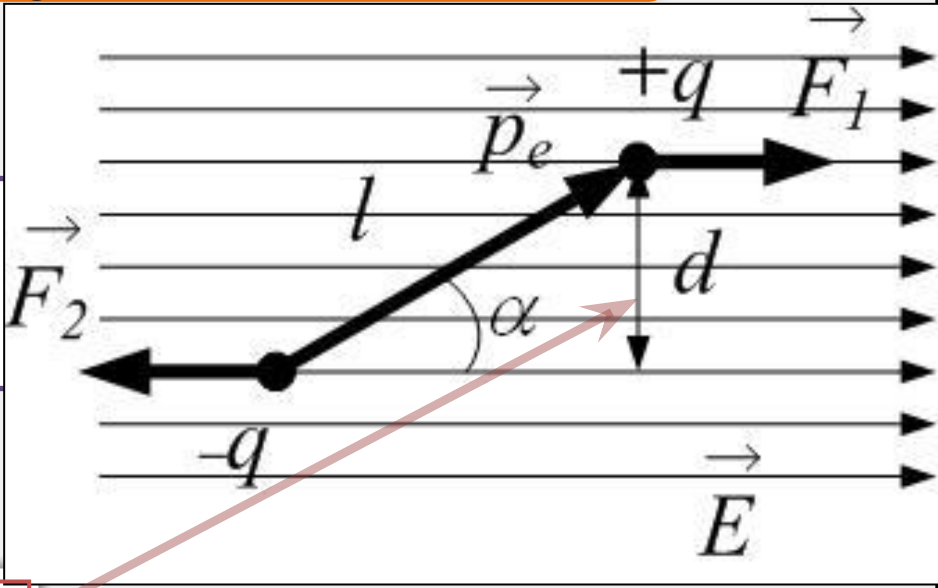
$$F_1 = F_2 \equiv F = qE$$

Диполь в электрическом поле ориентируется по полю

Электрический диполь в однородном поле

$$F_1 = F_2 \equiv F = qE$$

Силы равны и противоположны Это ***пара сил***



Момент пары:

$$M = F \cdot d = F \cdot l \cdot \sin\alpha$$

$$M = qE \cdot l \cdot \sin\alpha = (ql)E \cdot \sin\alpha = p_e E \sin\alpha$$

$$\boxed{\vec{M} = \left[\vec{p}_e \times \vec{E}\right]}$$

Энергия диполя в электростатическом поле

Работа dA внешних сил по повороту диполя на угол $d\alpha>0$ идёт на увеличение энергии диполя в электрическом поле: $dA = dW$

$$dA = M \cdot d\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$dW = M \cdot d\alpha$$

$$M = p_e E \sin\alpha$$

$$\frac{dW}{d\alpha} = M = p_e E \sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$W = -p_e E \cos\alpha$$

$$W = -\vec{p}_e \vec{E}$$

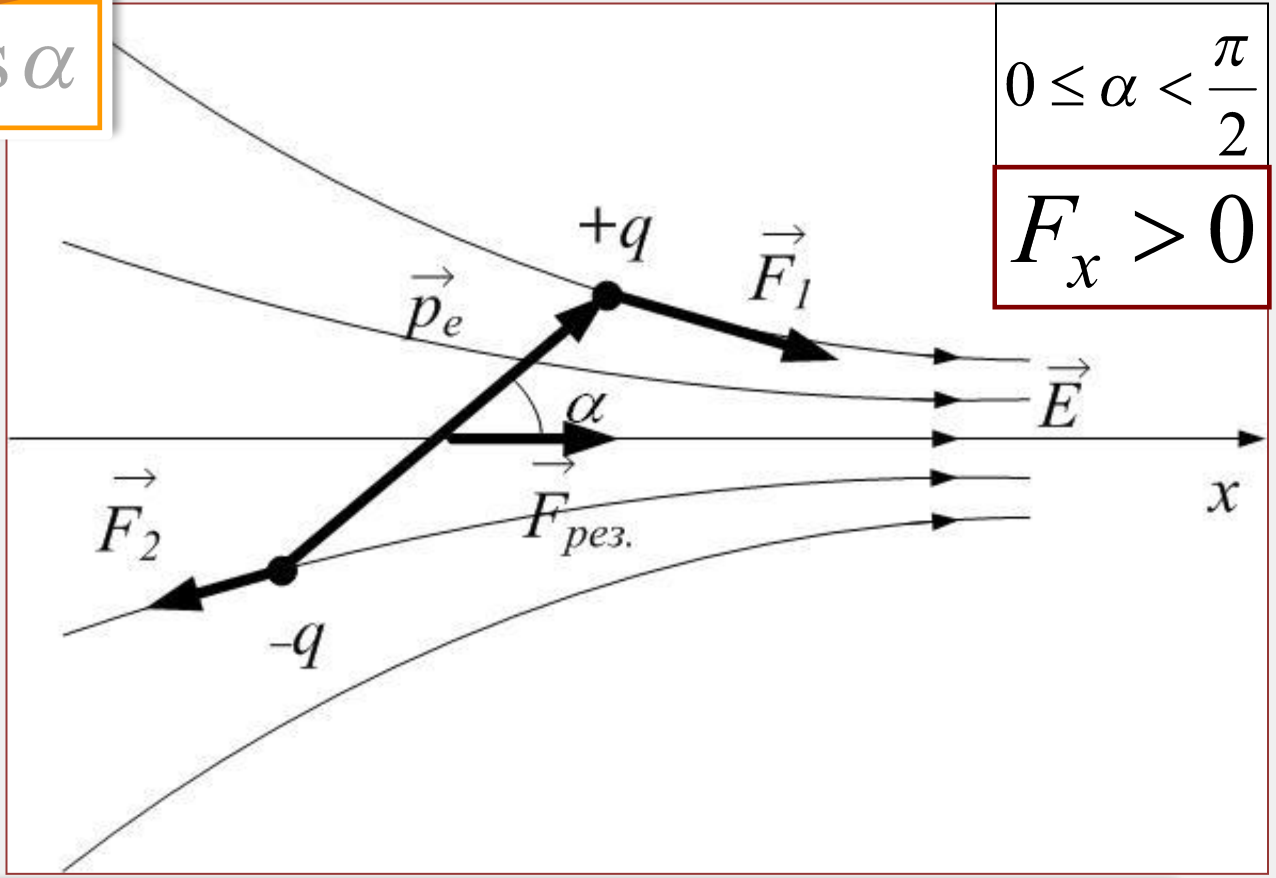
Электрический диполь в неоднородном поле

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-p_e E\cos\alpha\right) = p_e \cos\alpha \frac{\partial E}{\partial x}$$

$$W = -p_e E\cos\alpha$$

$$0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$F_x > 0$$



Силы не равны

$$F_1 > F_2$$

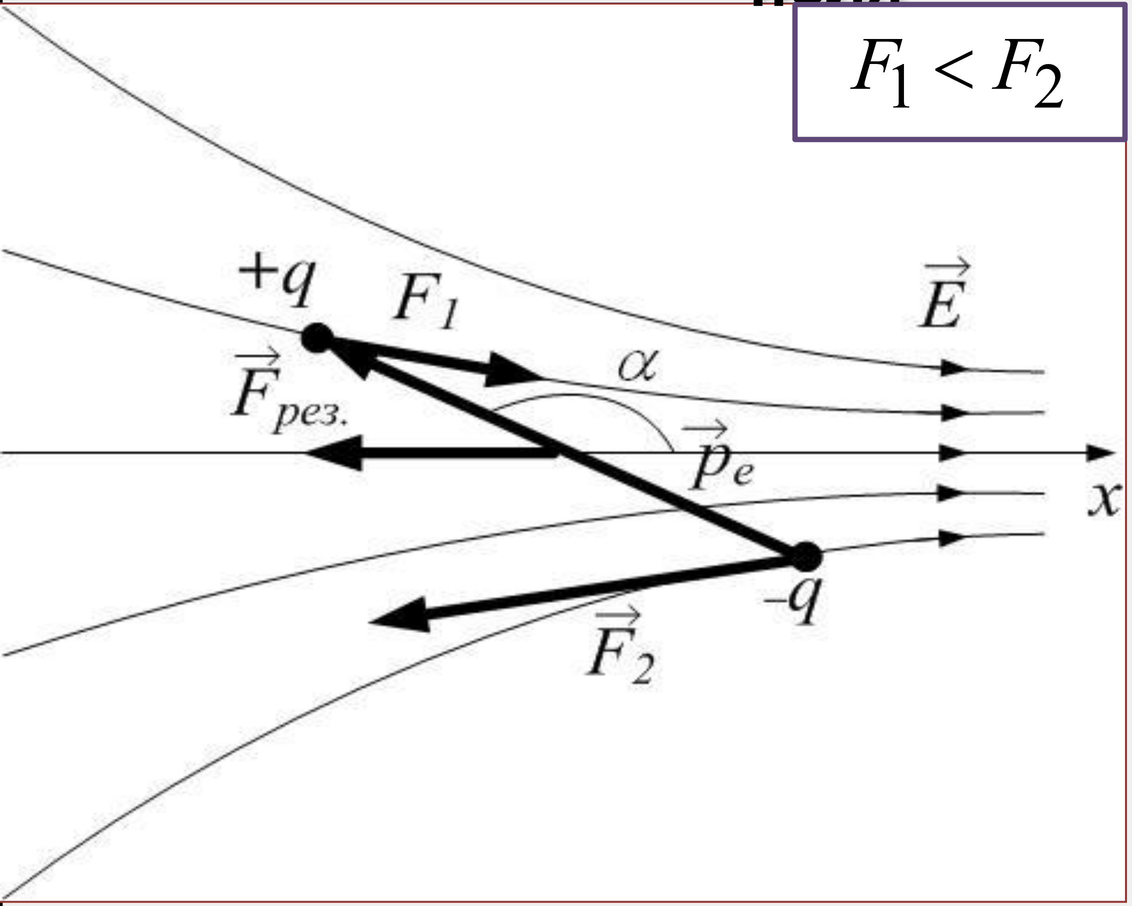
Если угол α – острый, диполь втягивается в поле

Электрический диполь в неоднородном поле

Если угол α – тупой, диполь выталкивается из поля

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$$

$$F_1 < F_2$$

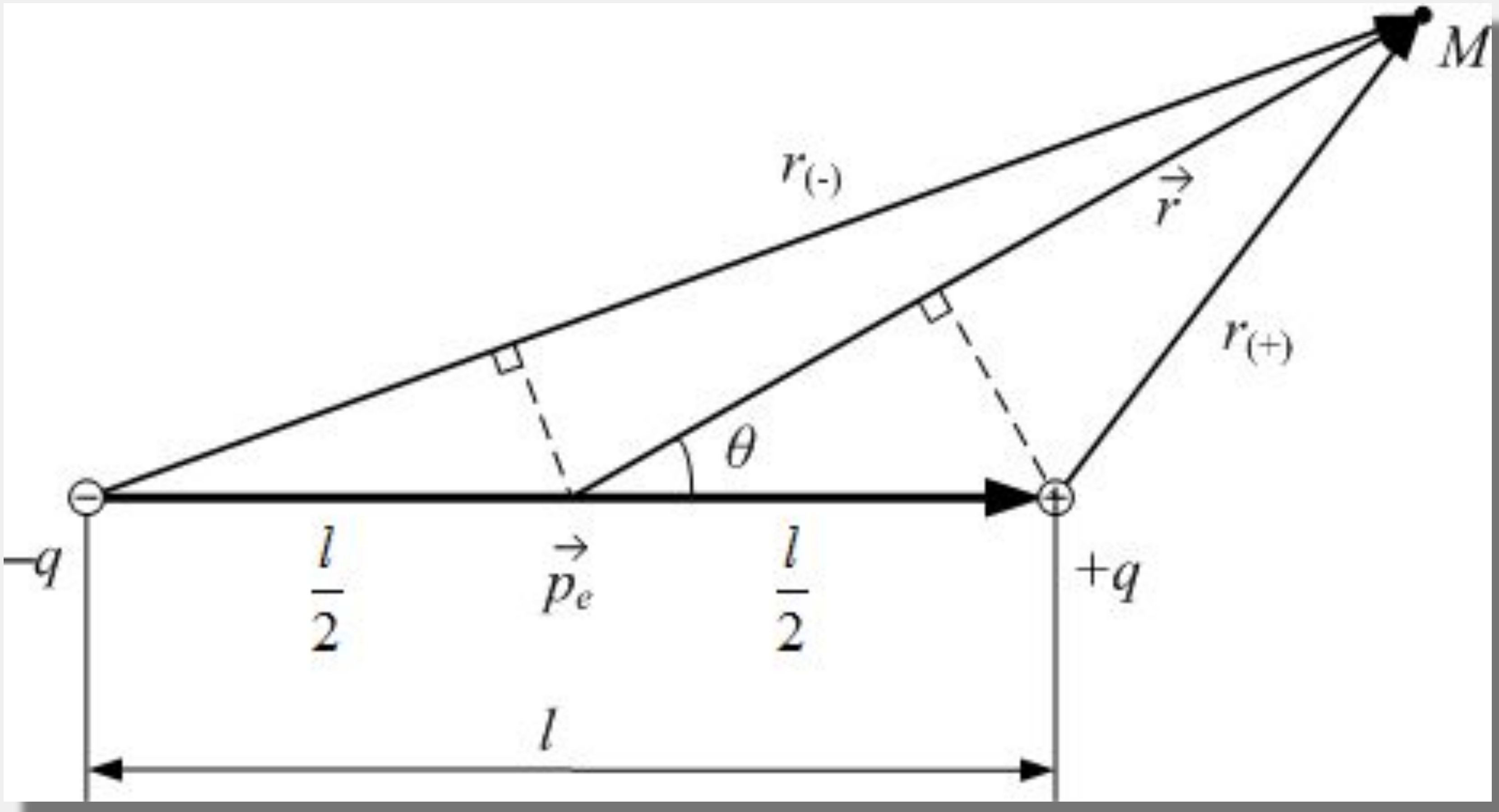


$$F_x = p_e \cos\alpha \frac{\partial E}{\partial x}$$

$$F_x > 0$$

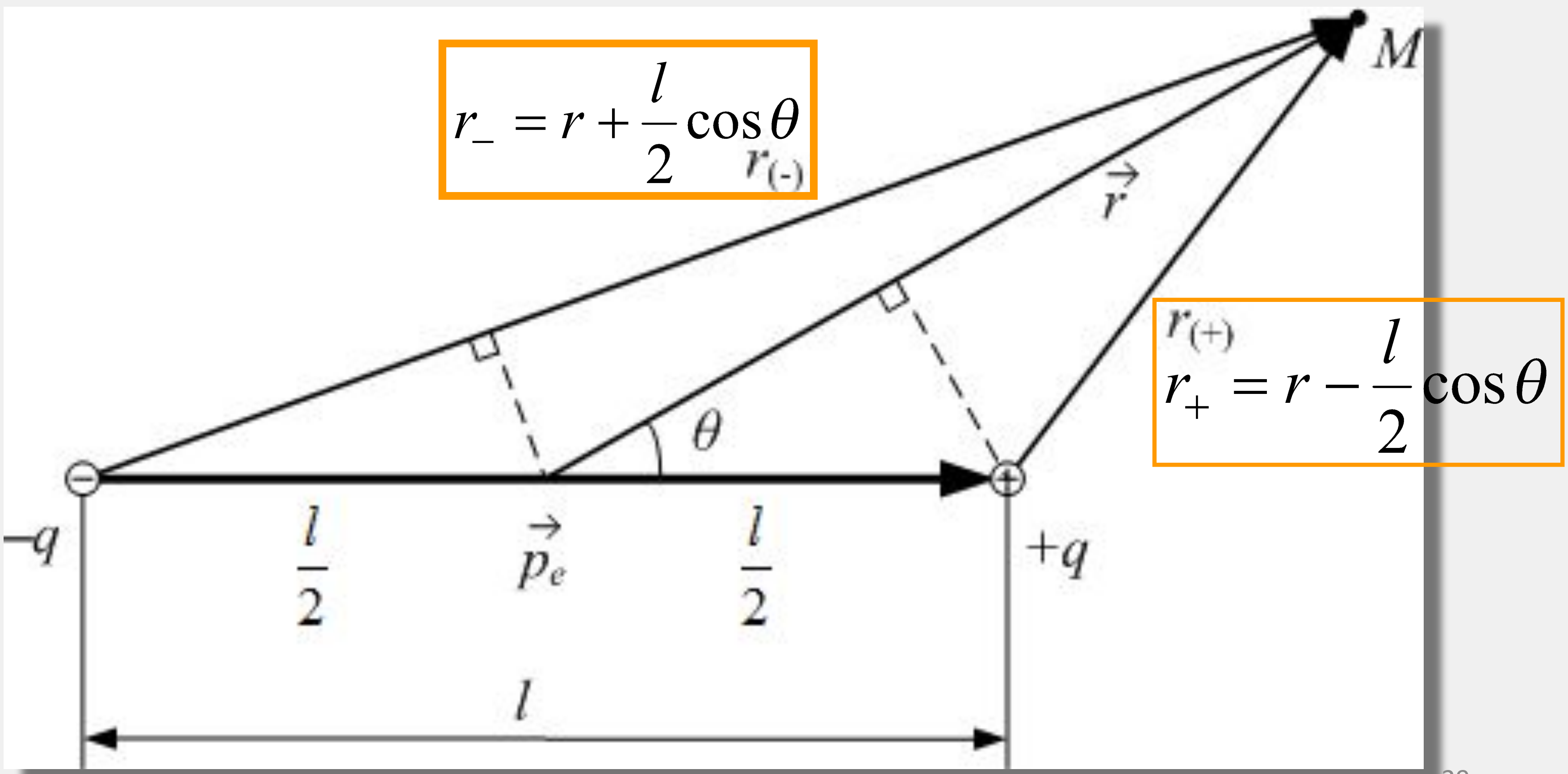
Свободный диполь сначала ориентируется по полю, а затем втягивается в область сильного поля

Электрическое поле, созданное точечным диполем



<u>Потенциал</u> поля, созданного точечным диполем

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_-}$$



$$r_- = r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

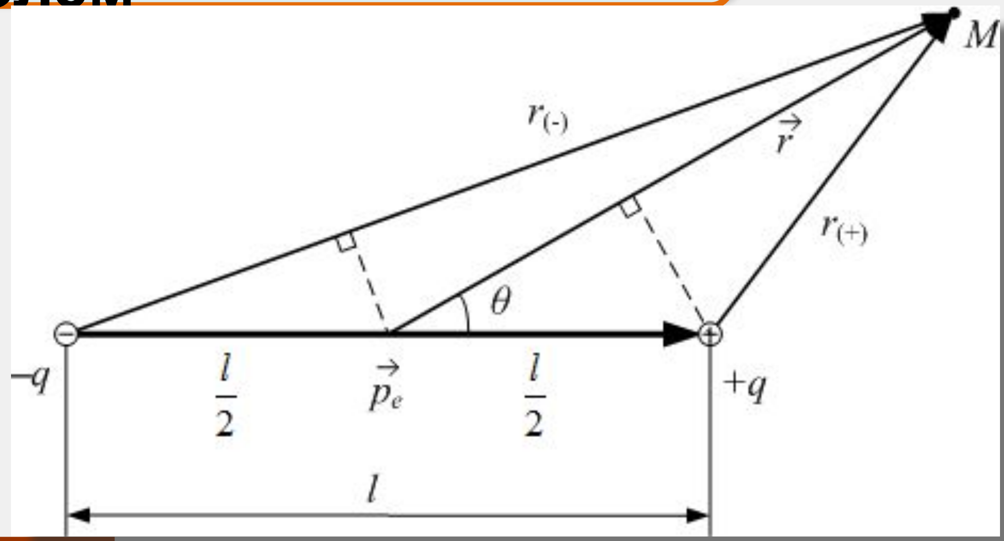
$$r_+ = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

Потенциал поля, созданного точечным диполем

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_-}$$

$$r_- = r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$r_+ = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

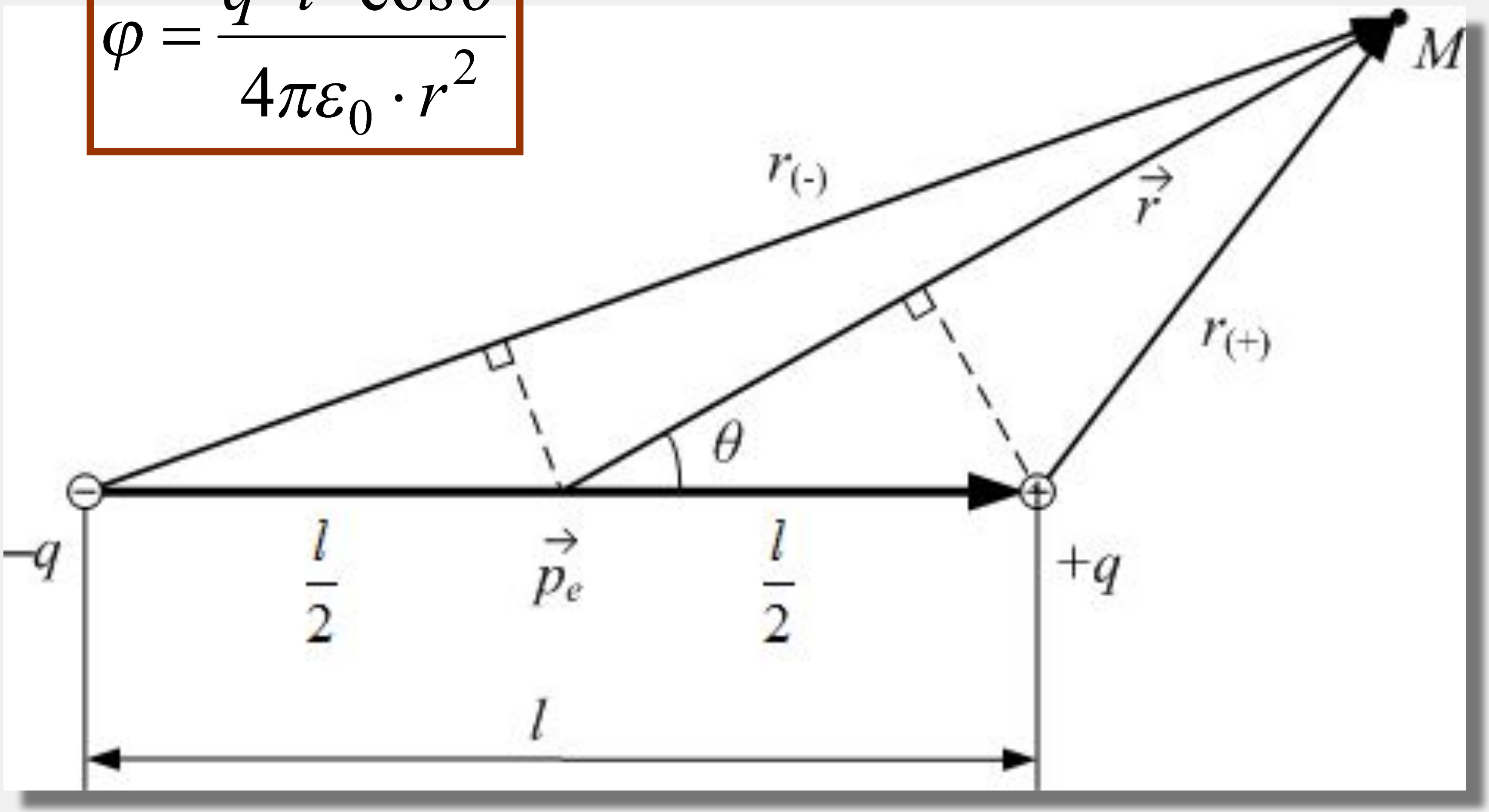


$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2}\cos\theta} \right)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\left(r + \frac{l}{2}\cos\theta\right) - \left(r - \frac{l}{2}\cos\theta\right)}{\left(r - \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(r + \frac{l}{2}\cos\theta\right)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l \cdot \cos\theta}{r^2 - \left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)^2} \approx \frac{q \cdot l \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

<u>Потенциал</u> поля, созданного точечным диполем

$$\varphi = \frac{q \cdot l \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

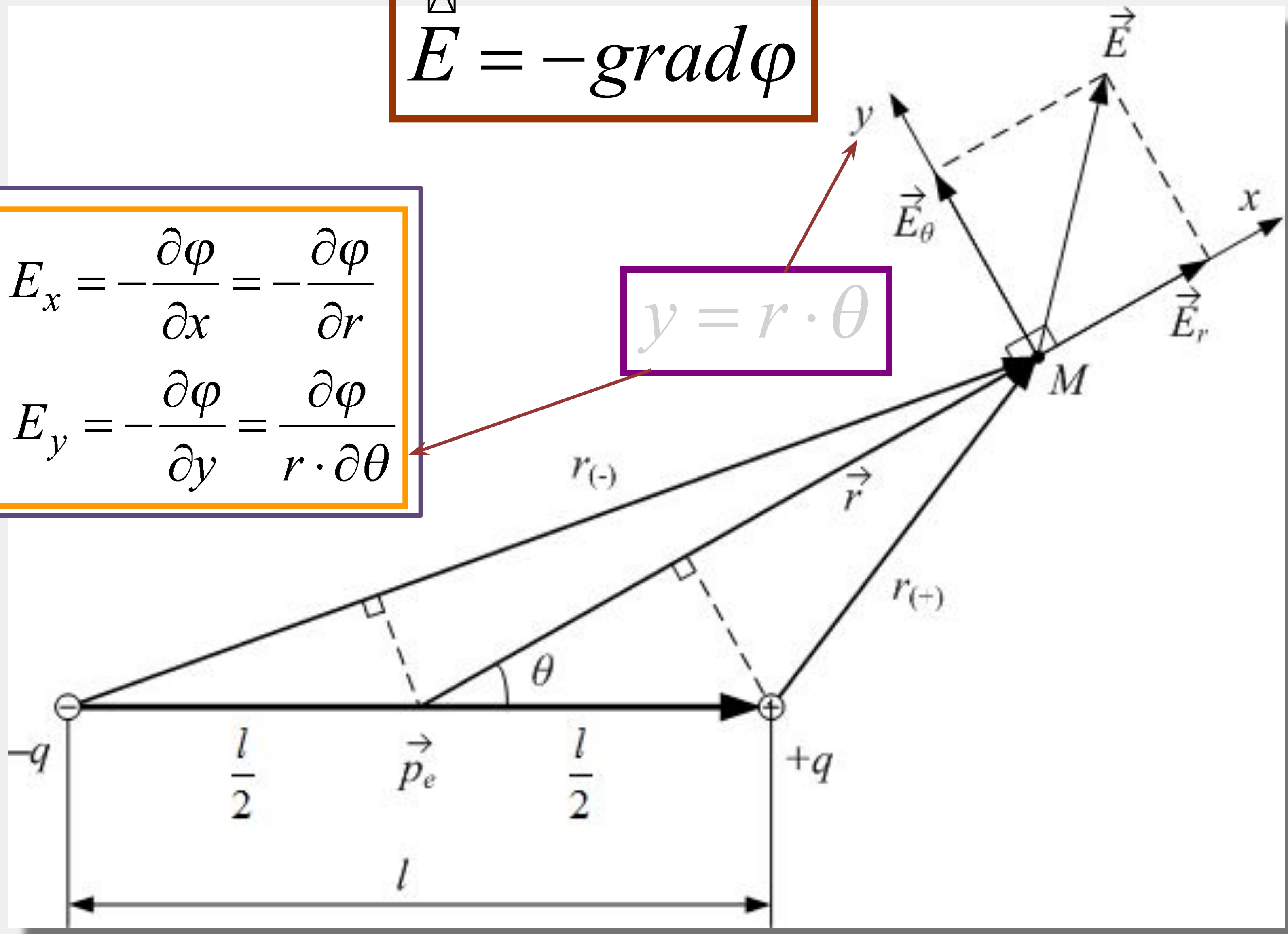


Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi}$$

$$\begin{cases} E_r = E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \\ E_\theta = E_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi}{r\cdot\partial\theta} \end{cases}$$

$$\boxed{y = r\cdot\theta}$$



<u>Напряжённость</u> поля, созданного точечным диполем

$$\boxed{\varphi = \frac{q \cdot l \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}}$$

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}\right) = \frac{p_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3}}$$

Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$\boxed{\varphi = \frac{q \cdot l \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}}$$

$$\boxed{E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r \cdot \partial\theta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}\right)}$$

$$\boxed{E_\theta = -\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}}$$

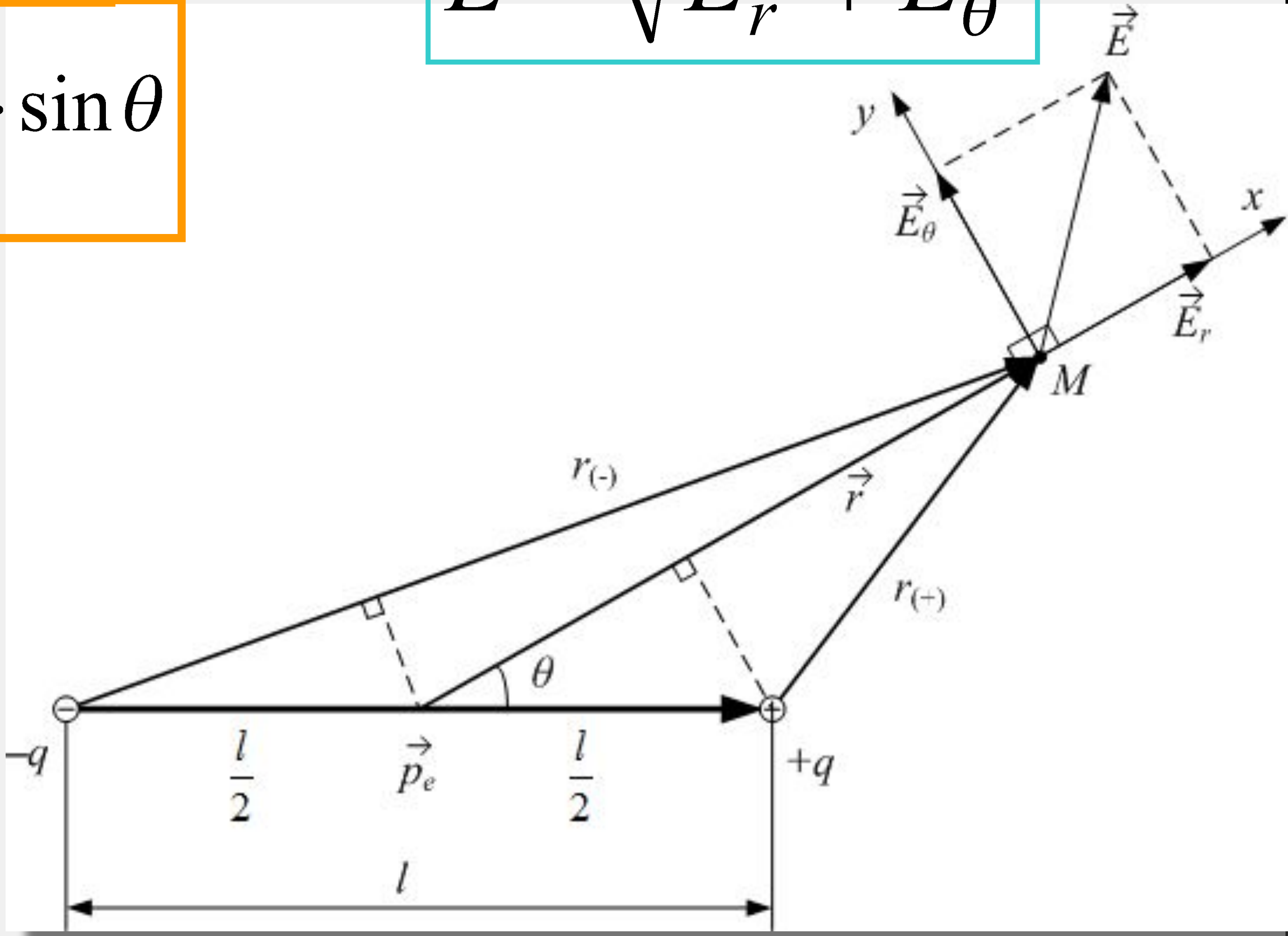
$$\boxed{E_\theta = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sin\theta}$$

Напряжённость поля, созданного точечным диполем

$$E_r = \frac{p_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sin\theta$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$$



<u>Напряжённость</u> поля, созданного точечным диполем

$$E_r = \frac{p_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sin\theta$$

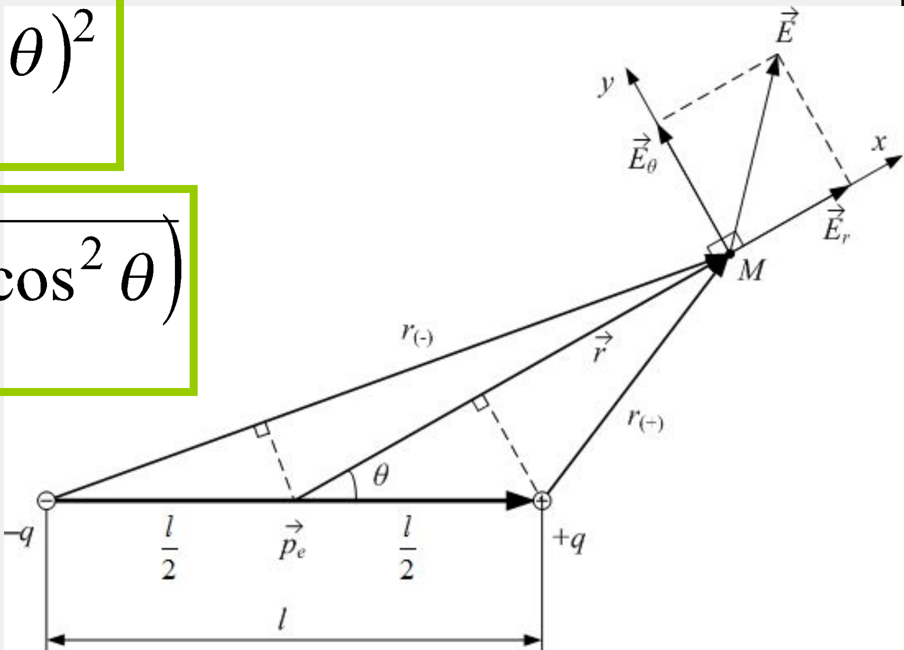
$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$$

$$E = \sqrt{\left(\frac{p_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sin\theta\right)^2}$$

$$E = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{(2\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}$$

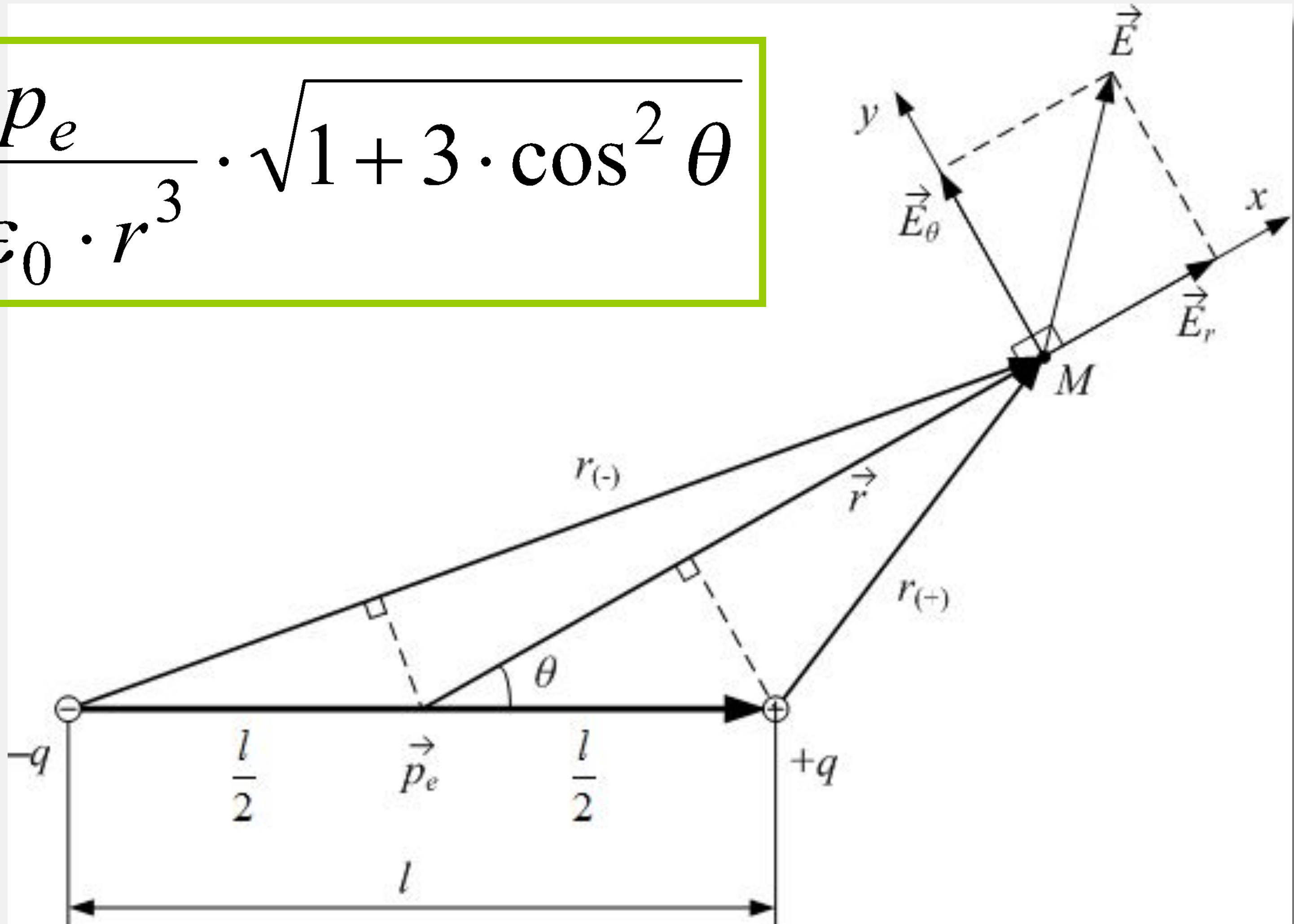
$$E = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{4 \cdot \cos^2\theta + (1 - \cos^2\theta)}$$

$$E = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2\theta}$$



<u>Напряжённость</u> поля, созданного точечным диполем

$$E = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2\theta}$$



Напряжённость поля диполя. Частные случаи

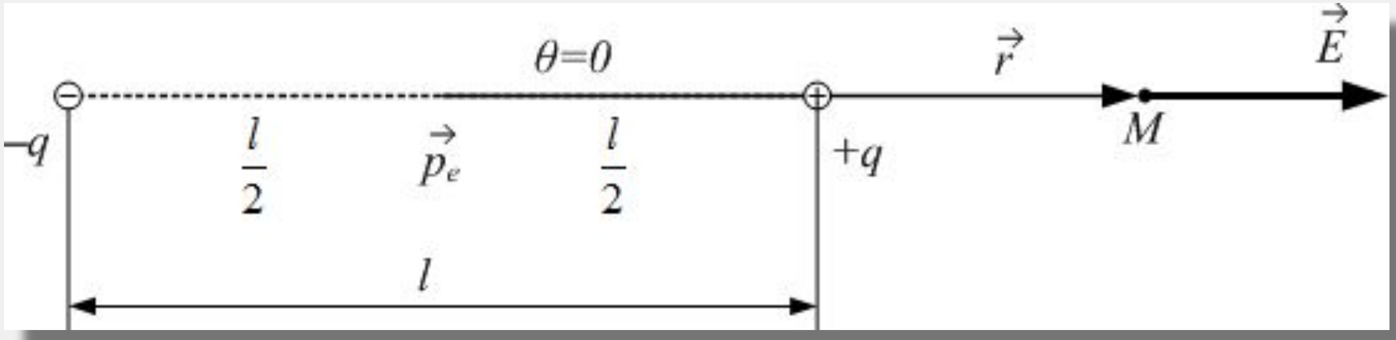
А) На оси диполя:

$$\theta = 0$$

или

$$\theta = \pi$$

$$E = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2\theta}$$



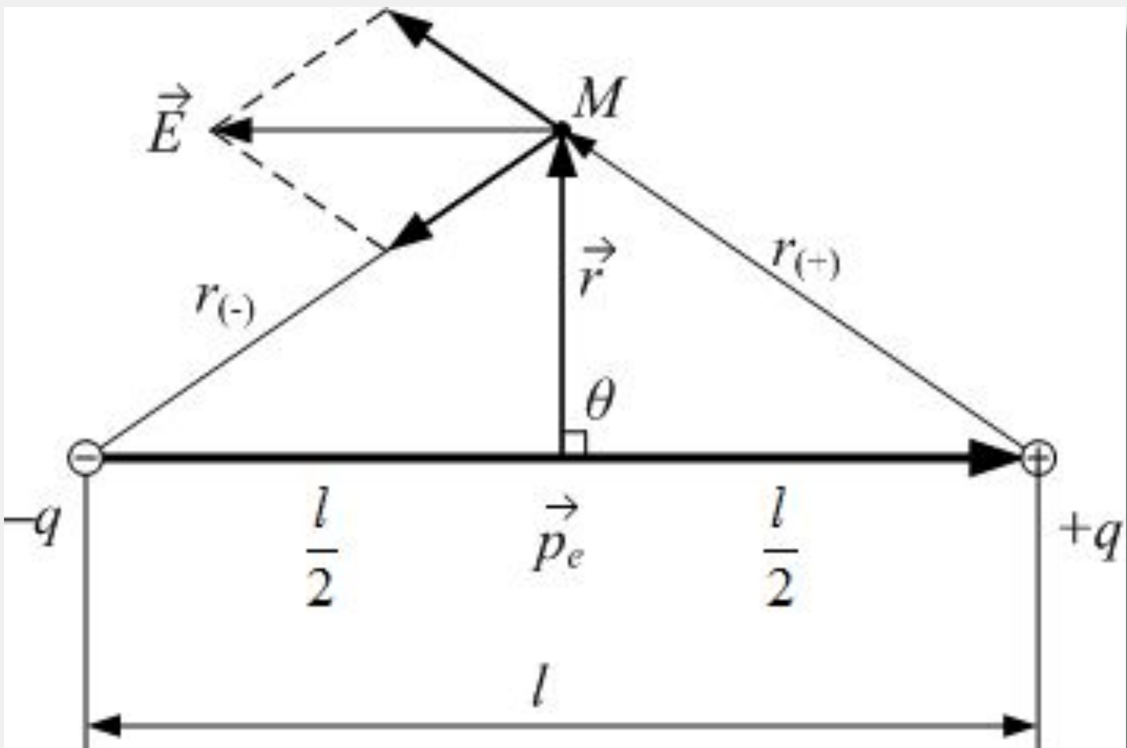
$$E = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot 2 = \frac{p_e}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r^3}$$

Напряжённость поля диполя. Частные случаи

$$E = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2\theta}$$

б) На равном расстоянии от зарядов диполя:

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$$



$$E = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3}$$