ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

В общем случае определение интегральных уравнений звучит достаточно просто:

Интегральными уравнениями, называются уравнения, в которых неизвестная функция находится под знаком интеграла

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральные уравнения можно разделить на два больших класса:

- Линейные. В которых неизвестная функция входит линейно.

  Для линейных интегральных уравнений выделяют два вида уравнений:

  1. Интегральные уравнения Вольтерра (Volterra) - 1 и 2 рода.
  2. Интегральные уравнения Фредгольма (Fredholm) - 1 и 2 рода.

- Нелинейные. В данном типе уравнений неизвестная функция входит в уравнение нелинейно, т.е. имеет сложную зависимость от параметров уравнения. Классификация нелинейных уравнений достаточно проблематична в следствии их разнообразия, но можно выделить уравнения: Урысона, Гаммерштейна, Ляпунова-Лихтенштейна и нелинейное уравнение Вольтерра.

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Одним из первых интегральных уравнений, не смотря на то что сам термин «Интегральное уравнение» был придуман позже, можно считать задачу обращения интеграла:

т.е. нахождения функции f(y) по данной функции g(x). Решение данной задачи было получено Фурье в виде:

Можно считать, что формула (II) дает решение интегрального уравнения (I), в котором f(y) – неизвестная, а g(x) – заданная функция, и наоборот.

Как известно, формулы (I) и (II), называются интегральными преобразованиями Фурье.

Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений можно свести к решению интегральных уравнений Вольтерра 2 рода.
Приведенные примеры – это чисто математические задачи.

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Из физических задач можно привести, например следующие:

- Задача определения потенциальной энергии поля, в котором частица совершает колебания по известной зависимости периода колебаний частицы от ее энергии может быть сведена к уравнению Вольтерра 1-го рода.
- Задачи связанные с явлениями последействия, например переходные процессы в электрических цепях, как правило могут сводится к уравнениям Вольтерра 2-го рода.
- При обработке данных, полученных в косвенных экспериментах, когда прямое наблюдение невозможно, например нахождение планет в других системах или нахождение полезных ископаемых путем гравиразведки, или задачи по восстановлению снятых не в фокусе изображений и .т.д. Как правило, при известной теоретической модели эксперимента подобные задачи можно свести к решению уравнению Фредгольма 1-го рода.
- К уравнениям Фредгольма 2-го рода можно свести, например задачи о нахождении профиля струны при свободных гармонических колебаниях. Так же к этому типа уравнения могут быть сведены задачи, описываемые уравнением Лапласа.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА:
основные понятия

Уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt, \qquad (1)$$

где f(x), K(x,t) – известные функции, а $\phi(x)$ – неизвестная (искомая) функция, λ – числовой параметр, называется линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода. Функция K(x,t) носит название ядра уравнения Вольтерра.

Если принять что $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) примет вид

которое называется однородным уравнением Вольтерра 2-го рода.

Стоит заметить, что при решении многих задач в выражениях (1) и (2) нижний предел интегрирования может быть заменен на ноль.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Стоит заметить что интегральные уравнения Вольтерра возникают в тех случаях, когда существует предпочтительное направление изменения некоторой независимой переменной, например времени, направления движения излучения, его энергии и т.д.

Рассмотрим задачу о прохождении рентгеновского излучения через вещество в направлении оси 0X, причем при рассеянии пучок излучения будет сохранять это направление. Предположим что пучок состоит из лучей с известными длинами волн. Выберем часть из них с заданной длиной волны и рассмотрим что происходит при прохождении их через слой толщиной dx. Естественно, что часть лучей изменит длину волны из-за рассеяния, а часть поглотиться. Это приведет к падению количества лучей с рассматриваемой длиной волны. С другой стороны, данная совокупность пополниться за счет лучей, которые изначально обладали большей энергией (или меньшей длиной волны λ), но потеряли ее за счет рассеяний. Таким образом, если функция $f(\lambda,x)d\lambda$ задает совокупность лучей с длинами волн в интервале от λ до $\lambda+d\lambda$, то

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

$$\frac{\partial \mathrm{f}(\lambda, x)}{\partial x} = -\mu \cdot \mathrm{f}(\lambda, x) + \int_0^\lambda P(\lambda, \tau)\mathrm{f}(\tau, x)d\tau,$$

где μ – коэффициент поглощения, P(*λ*,τ) – вероятность того, что луч с длиной волны τ, после прохождения слоя единичной длины, будет определять длину волны в интервале (*λ, λ*+d *λ).*

В результате получилось так называемое интегрально-дифференциальное уравнение, т.е. уравнение в котором неизвестная функция f(*λ*,x) входит одновременно как под знаком интеграла, так и как производная.

Полагая

где ψ(*λ*,p) – новая неизвестная функция, можно показать что ψ(*λ*,p) будет удовлетворять интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$\ldots(\lambda, p) = \frac{1}{\mu - p}\int_0 P(\lambda, \tau)\psi(\tau, \ldots$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = F(x) \qquad (1)$$

с непрерывные коэффициентами $a_i(x)$ при ($i=1,2,\dots,n$) и начальными условиями

Уравнения вида (1) с начальными условиями (2) могут быть сведены к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

Для примера преобразуем следующее дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\dots dx \dots + a_2(x)y = F(x)$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

С начальными условиями

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1 \qquad (2^*)$$

Если предположить что

то тогда, принимая во внимание начальные условия (2*) можно последовательно получить

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

При получении формул в (4) использовалось следующее преобразование

$$\int^{x} dx \int^{x} dx \ldots \int^{x} \mathrm{f}(x)\,dx \quad 1 \quad x$$

Используя формулы (3) и (4) , уравнение (1*) можно переписать в виде:

Перепишем данное уравнение, перенеся в левую часть все выражения с неизвестной ϕ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

$$\varphi(x)+\int_0^x[a_1(x)+a_2(x)(x-t)]\varphi(t)\mathrm{dt} =$$

Если ввести обозначения, что

то уравнение (5) примет вид

т.е. в результате получилось уравнение Вольтерра 2-го рода.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

Существование единственного решения уравнения (8) следует из существования и единственности решения задачи Коши (1*)-(2*) для линейных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами в окрестности нулевой точки.

Так же справедливо и обратное утверждение – решая интегральное уравнение (8) с K и f, задаваемыми формулами (6) и (7) путем подстановки полученного $\phi(x)$ в последнее из уравнений в формуле (4), будет получено единственное решение уравнения (1*) с начальными условиями (2*).

Следует заметить что некоторые уравнения Вольтерра 1-го и 2-го родов удобнее решить сведя их к дифференциальным уравнениям. Полученные дифференциальные уравнения можно рушить уже известными способами.