

# Метод перемещений расчета на устойчивость

Пример расчета

# Алгоритм метода перемещений расчета на устойчивость

1. Определение степени кинематической неопределимости

$$n = n_y + n_d$$

и выбор основной системы метода перемещений.

2. Формирование матрицы жесткости

$$\mathbf{R}(v) = \begin{bmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) & \dots & r_{1n}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) & \ddots & r_{2n}(v) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(v) & r_{n1}(v) & \dots & r_{nn}(v) \end{bmatrix}$$

2.1. Построение единичных эпюр моментов  $\bar{M}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

2.2. Определение коэффициентов  $r_{ij}(v)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

3. Решение характеристического уравнения

$$D(v) = |\mathbf{R}(v)| = 0$$

с целью определения минимального корня  $v_{cr}$ .

4. Определение критического параметра нагрузки  $F_{cr}$ .

5. Определение коэффициентов приведенных длин  $\mu$  сжатых элементов.

6. Построение формы потери устойчивости

# Таблица метода перемещений и специальные функции расчета на устойчивость

<p>1</p>	$\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)} = \frac{v^2}{3} \frac{\operatorname{tg} v}{v - v}$
<p>2</p>	$\eta_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right)} = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}$
<p>3</p>	$\varphi_2(v) = \frac{1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}}{4 \left(\frac{\operatorname{tg} v/2}{v/2} - 1\right)} = \frac{v}{8 \operatorname{tg} v} \frac{\operatorname{tg} v - v}{\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}}$ $\varphi_3(v) = \frac{\frac{v}{\sin v} - 1}{2 \left(\frac{\operatorname{tg} v/2}{v/2} - 1\right)} = \frac{v}{4 \sin v} \frac{v - \sin v}{\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}}$ $\varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right)$
<p>4</p>	$\eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right)$
<p>5</p>	$v = l \sqrt{\frac{N}{EJ}}$

$$\varphi_1(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \frac{v^2}{3} \frac{\operatorname{tg}(v)}{\operatorname{tg}(v) - v} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi_2(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \frac{v}{8 \cdot \operatorname{tg}(v)} \frac{\operatorname{tg}(v) - v}{\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{v}{2}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi_3(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \frac{v}{4 \cdot \sin(v)} \frac{v - \sin(v)}{\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{v}{2}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi_4(v) := \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right)$$

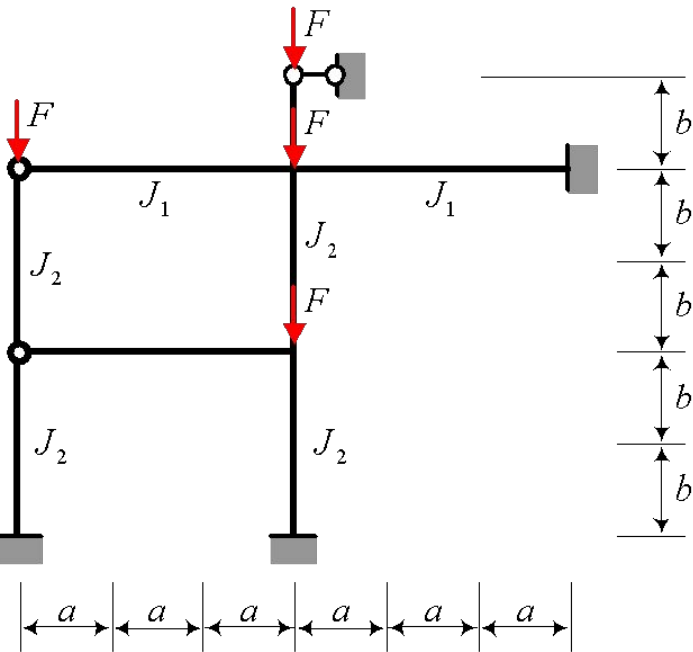
$$\eta_1(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \frac{v^3}{3 \cdot (\operatorname{tg}(v) - v)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\eta_2(v) := \eta_1\left(\frac{v}{2}\right)$$

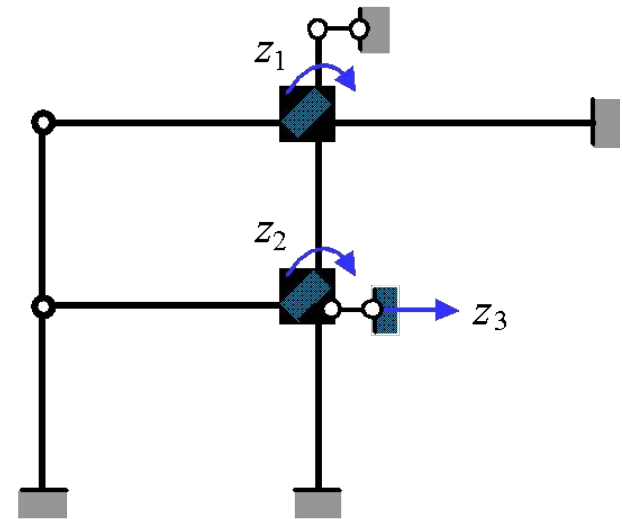
# Пример

## 1. Выбор основной

СИСТЕМЫ

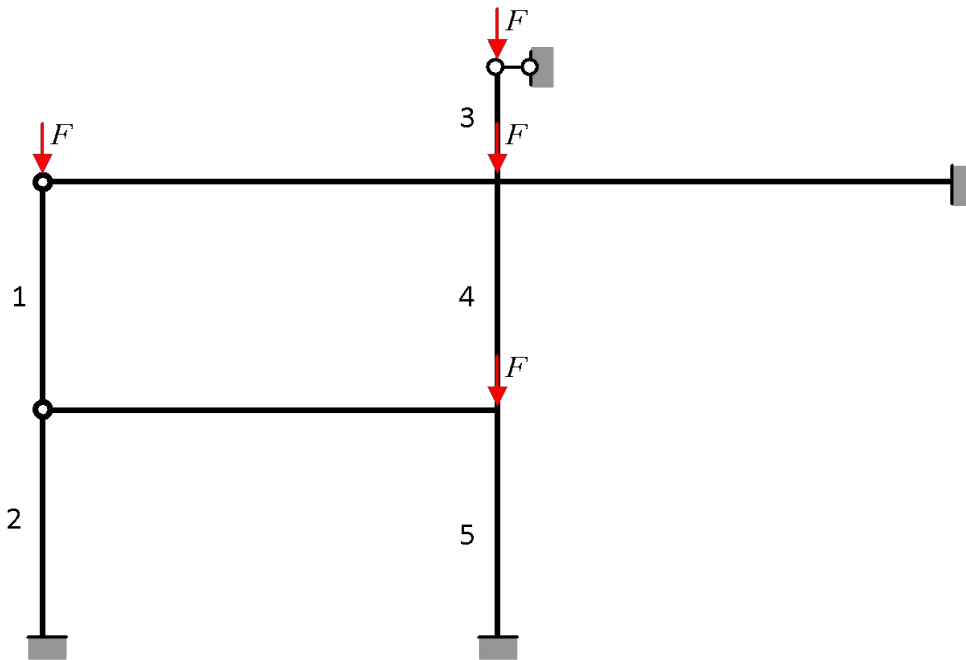


Основная система метода перемещений



## 2. Формирование матрицы жесткости

Определение параметра  $\nu$  для каждого сжатого стержня



$$\nu_1 = 3 \frac{\overline{EI}}{\overline{EA}} = \frac{\xi \overline{3}}{3} \overline{EA}$$

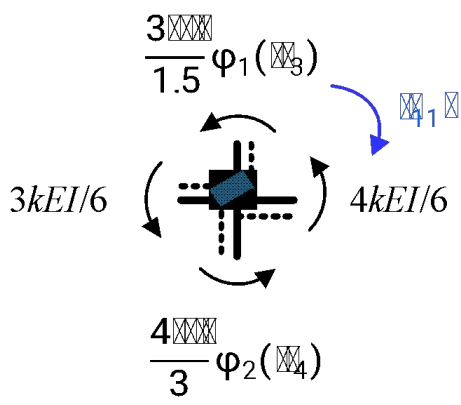
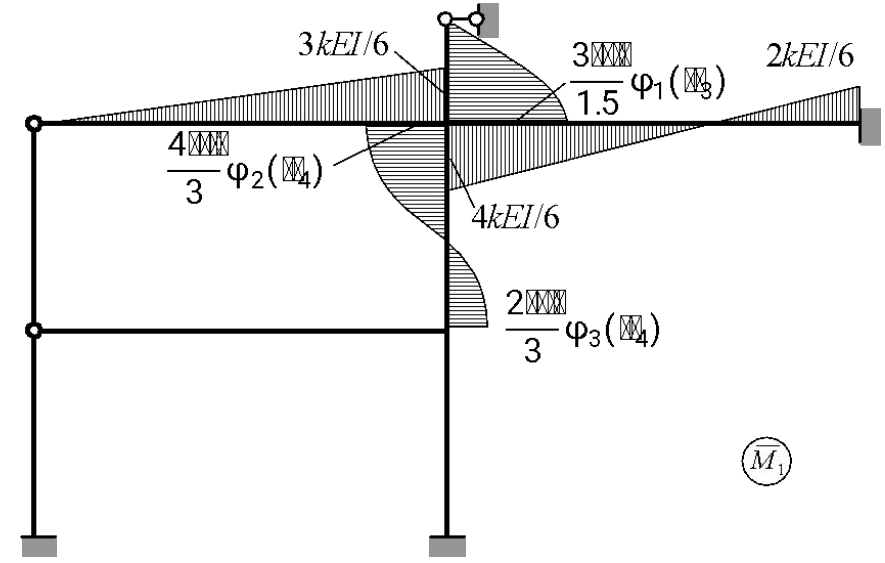
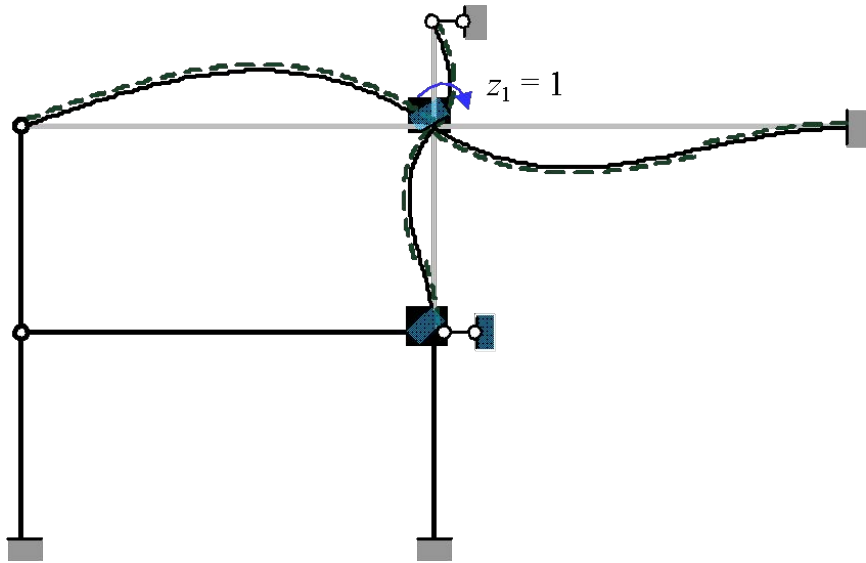
$$\nu_2 = 3 \frac{\overline{EI}}{\overline{EA}} = \frac{\xi \overline{3}}{3} \overline{EA}$$

$$\nu_3 = 1.5 \frac{\overline{EI}}{\overline{EA}} = \frac{\xi \overline{3}}{6} \overline{EA}$$

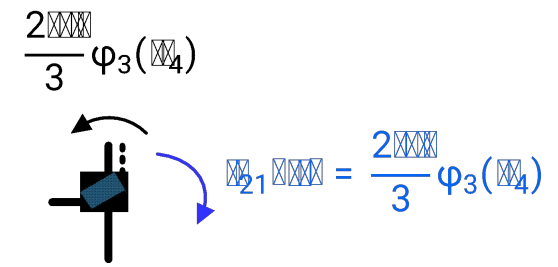
$$\nu_4 = 3 \frac{\overline{2EI}}{\overline{EA}} = \frac{\xi \overline{6}}{3} \overline{EA}$$

$$\nu_5 = 3 \frac{\overline{3EI}}{\overline{EA}} = \overline{EA}$$

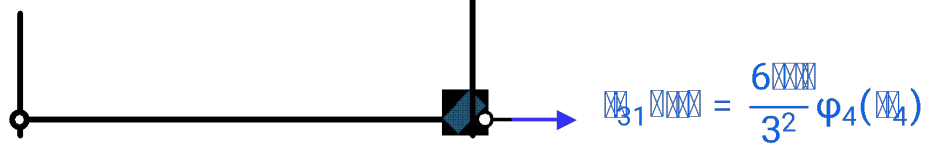
# 2.1 Построение единичных эпюр и 2.2. Определение коэффициентов матрицы жесткости



$$k_{11} = \frac{3kEI}{1.5} \varphi_1(\xi_3) + \frac{4kEI}{6} + \frac{4kEI}{3} \varphi_2(\xi_4) + \frac{3kEI}{6}$$



$$\frac{6kEI}{32} \varphi_4(\xi_4)$$



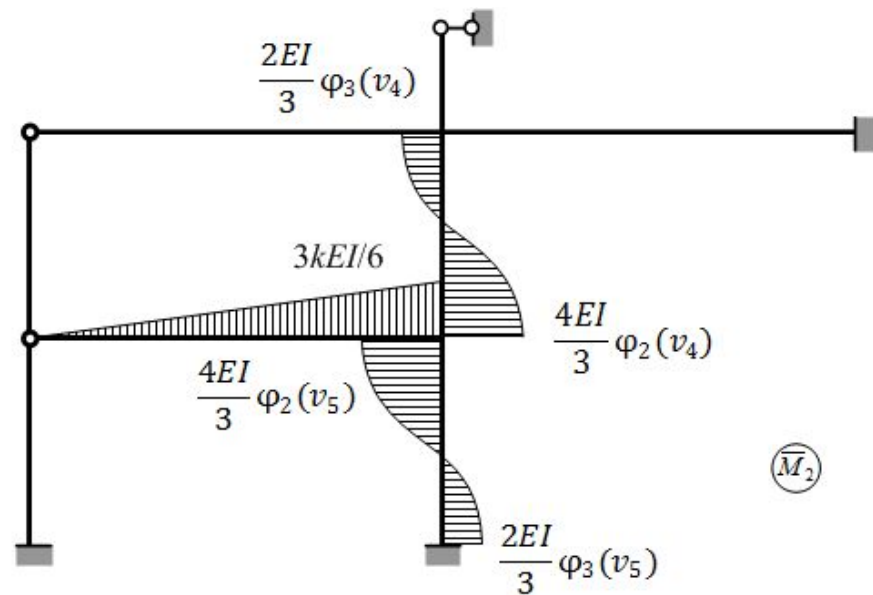
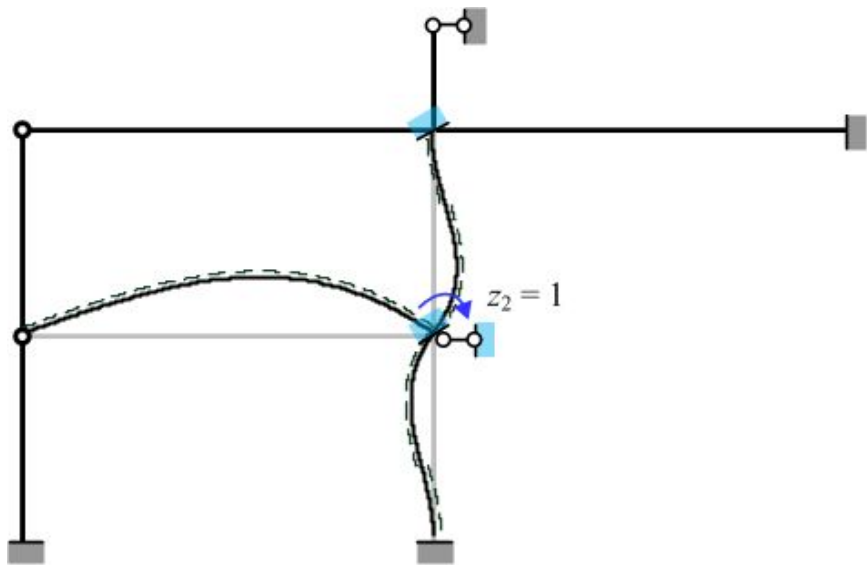


Diagram of a joint with a vertical member and a horizontal member. A blue arrow indicates a rotation. The moment distribution is shown as a shaded area.

$$M_{22} = \frac{2EI}{3} \varphi_3(v_4)$$

$$\frac{2EI}{3} \varphi_3(v_4)$$

Diagram of a joint with a vertical member and a horizontal member. A blue arrow indicates a rotation. The moment distribution is shown as a shaded area.

$$M_{22} = \frac{4EI}{3} \varphi_2(v_4) + \frac{3EI}{6} + \frac{4EI}{3} \varphi_2(v_5)$$

$$\frac{4EI}{3} \varphi_2(v_4)$$

$$3kEI/6$$

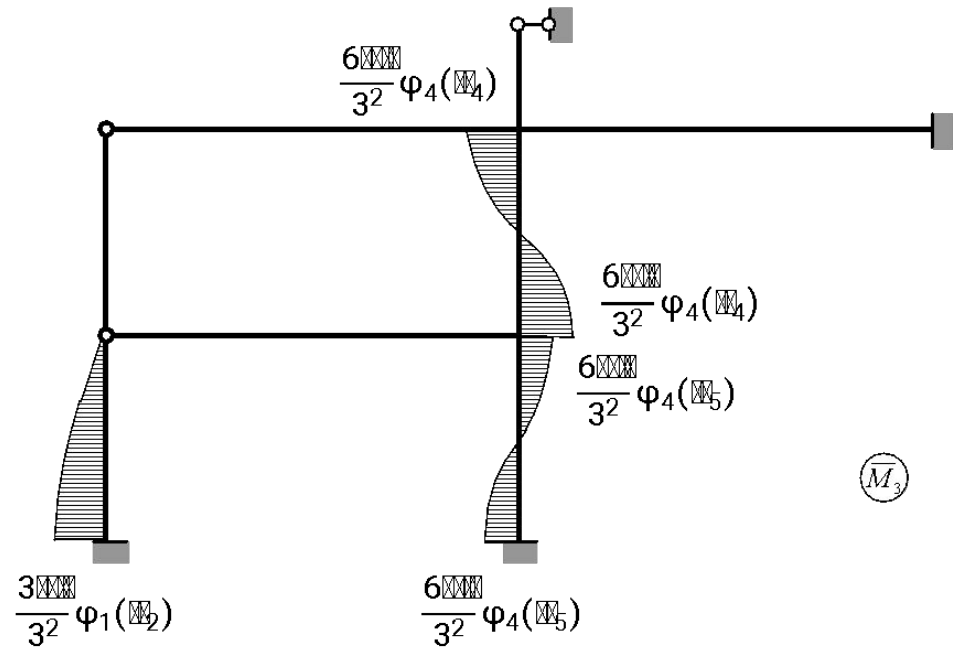
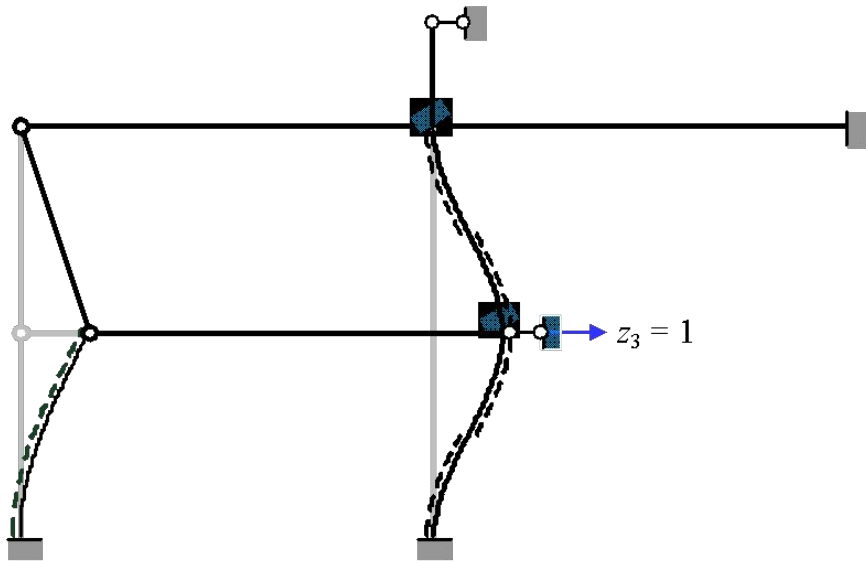
$$\frac{4EI}{3} \varphi_2(v_5)$$

Diagram of a joint with a vertical member and a horizontal member. A blue arrow indicates a rotation. The moment distribution is shown as a shaded area.

$$M_{32} = \frac{6EI}{32} \varphi_4(v_4) - \frac{6EI}{32} \varphi_4(v_5)$$

$$\frac{6EI}{32} \varphi_4(v_4)$$

$$\frac{6EI}{32} \varphi_4(v_5)$$



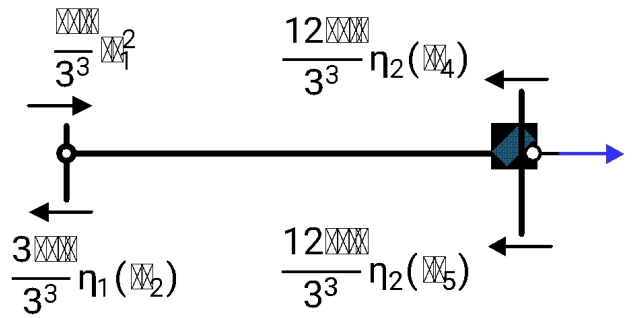
$$\eta_{33} = \frac{6EI}{32} \phi_4(x_4)$$

$$\frac{6EI}{32} \phi_4(x_4)$$

$$\frac{6EI}{32} \phi_4(x_4)$$

$$\eta_{23} = \frac{6EI}{32} \phi_4(x_4) - \frac{6EI}{32} \phi_4(x_5)$$

$$\frac{6EI}{32} \phi_4(x_5)$$

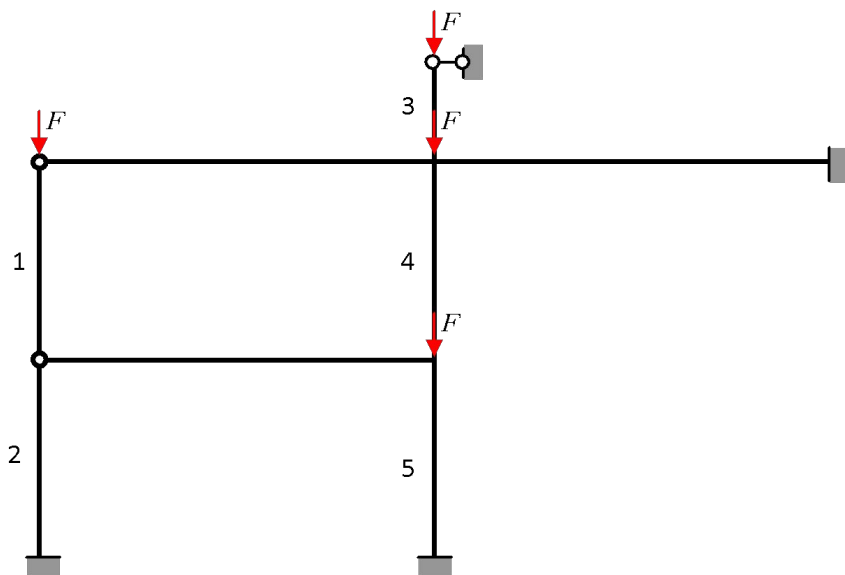


$$\eta_{33} = \frac{12EI}{33} \eta_2(x_4) + \frac{12EI}{33} \eta_2(x_5) + \frac{3EI}{33} \eta_1(x_2) - \frac{EI}{33} \eta_1^2$$



# Реализация в среде MathCad

## (MathCad-текст оконтурен)



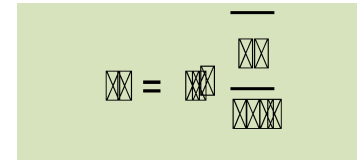
	ГОСТ-26020-83
$I_1 := 10400 \cdot 10^{-8}$	30Ш1 - сечение ригеля
$I_2 := 3820 \cdot 10^{-8}$	20К1 - сечение стоек
$a := 2$	$b := 1.5$
$L := 3 \cdot a = 6$	$h := 2 \cdot b = 3$
$k := \frac{I_1}{I_2} = 2.723$	
$EI := 1$	

$$v_1 := 3 \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad v_2 := 3 \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad v_3 := \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad v_4 := 3 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot F}{EI}} \quad v_5 := 3 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot F}{EI}}$$

$$v_5 = v$$

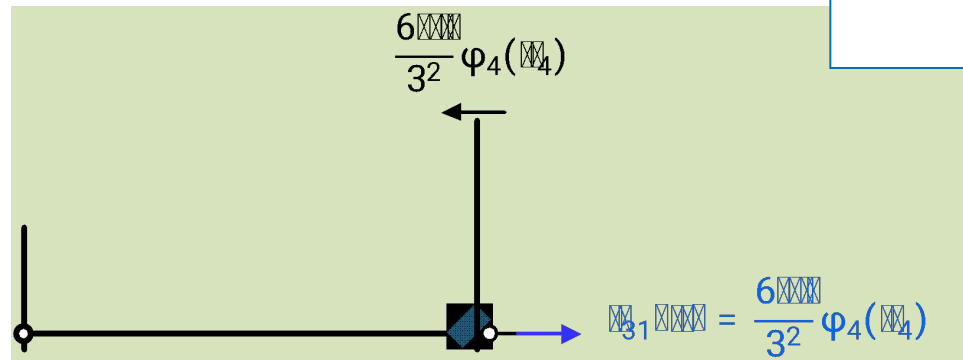
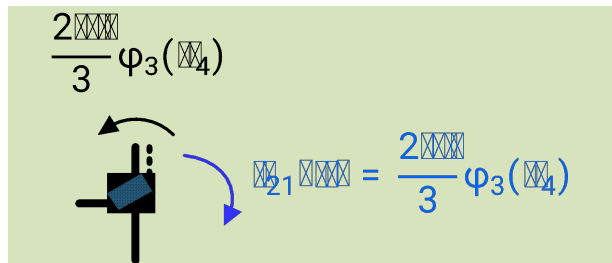
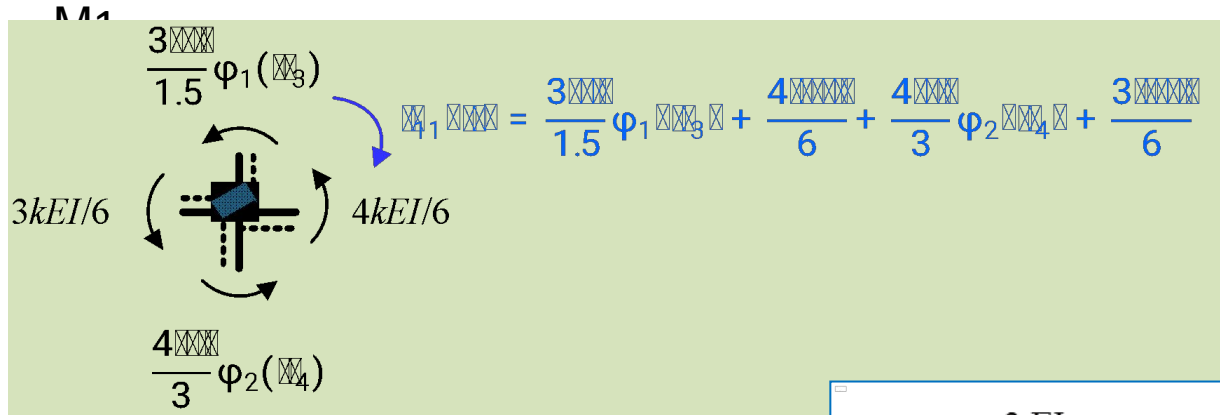
$$\frac{v_1}{v_5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \quad v_{1(v)} := \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot v \quad \frac{v_2}{v_5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \quad v_{2(v)} := \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot v$$

$$\frac{v_3}{v_5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} \quad v_{3(v)} := \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot v \quad \frac{v_4}{v_5} \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} \quad v_{4(v)} := \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v \quad v_{5(v)} := v$$



## 2. Формирование матрицы жесткости (МЖ)

Определение коэффициентов первого столбца МЖ по эп.

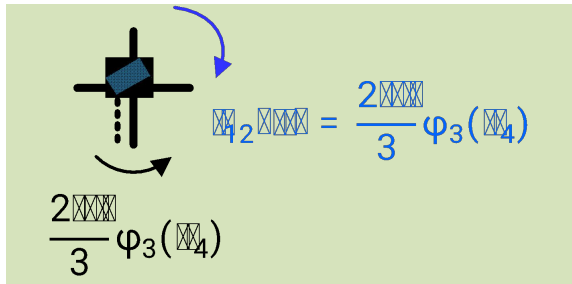


$$r_{11}(v) := \frac{3 \cdot EI}{b} \cdot \varphi_1(v_3(v)) + \frac{4 \cdot k \cdot EI}{L} + \frac{4 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_2(v_4(v)) + \frac{3 \cdot k \cdot EI}{L}$$

$$r_{21}(v) := \frac{2 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_3(v_4(v))$$

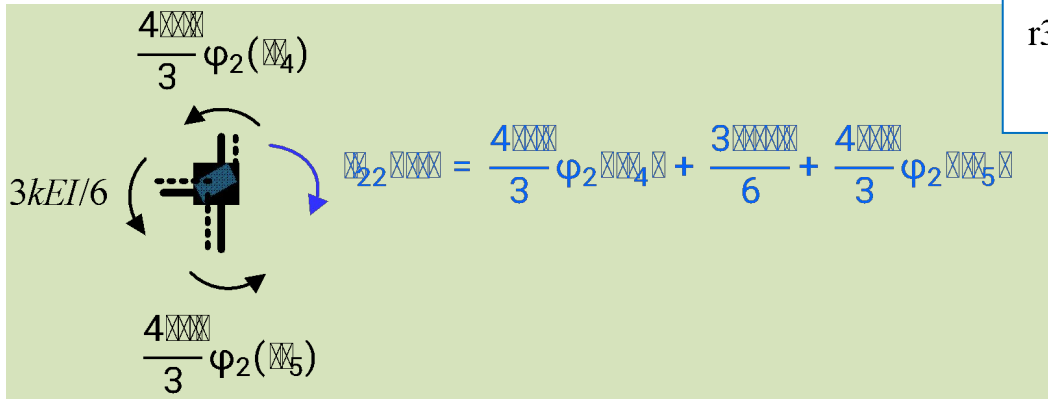
$$r_{31}(v) := \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_4(v))$$

# Определение коэффициентов второго столбца МЖ по эп. М2

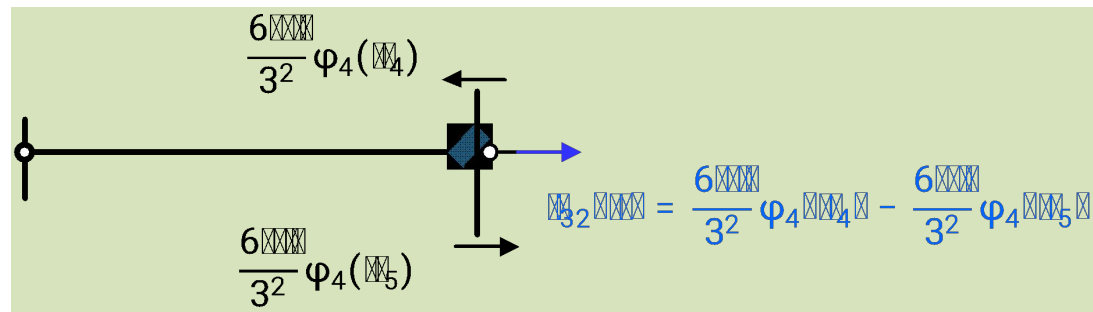


$$r_{12}(v) := \frac{2 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_3(v_4(v))$$

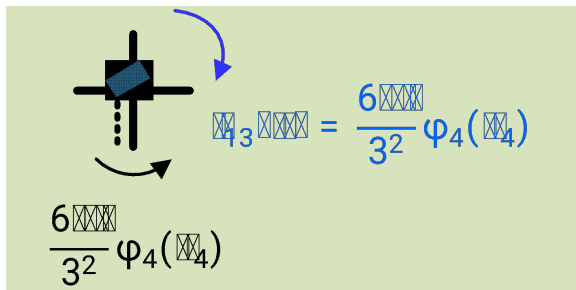
$$r_{22}(v) := \frac{4 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_2(v_4(v)) + \frac{3 \cdot k \cdot EI}{L} + \frac{4 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_2(v_5(v))$$



$$r_{32}(v) := \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_4(v)) - \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_5(v))$$



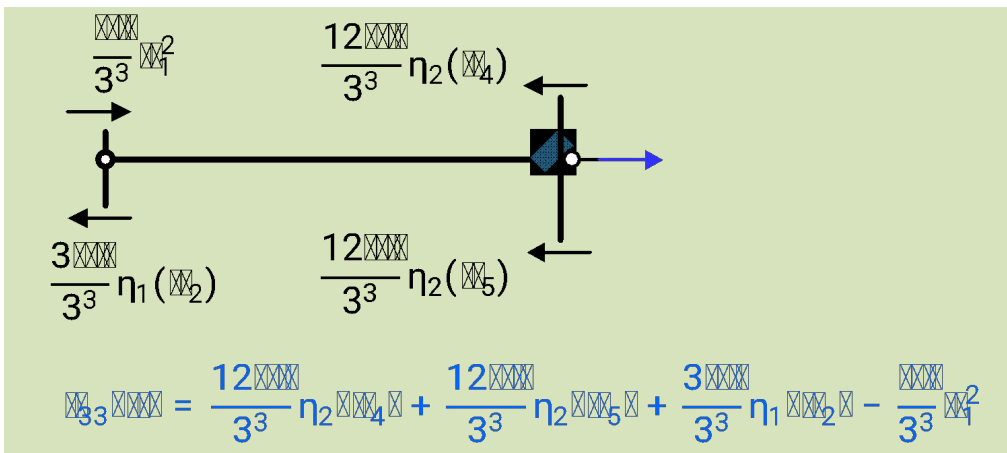
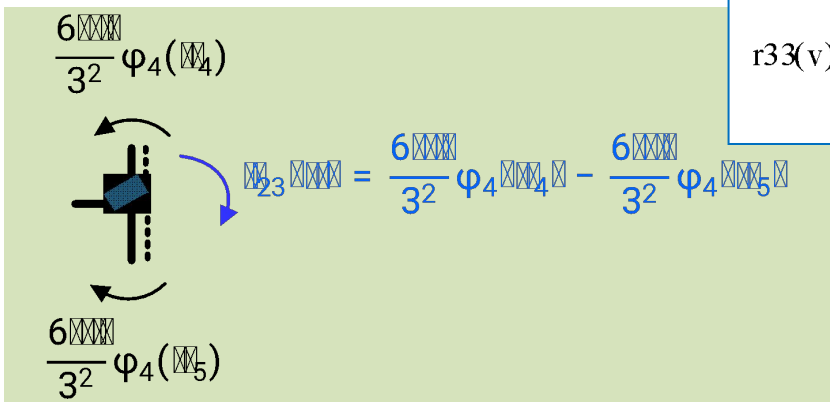
# Определение коэффициентов третьего столбца МЖ по эп.



$$r_{13}(v) := \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_4(v))$$

$$r_{23}(v) := \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_4(v)) - \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_5(v))$$

$$r_{33}(v) := \frac{12 \cdot EI}{h^3} \cdot \eta_2(v_4(v)) + \frac{12 \cdot EI}{h^3} \cdot \eta_2(v_5(v)) + \frac{3 \cdot EI}{h^3} \cdot \eta_1(v_2(v)) - \frac{EI}{h^3} \cdot v_1(v)^2$$

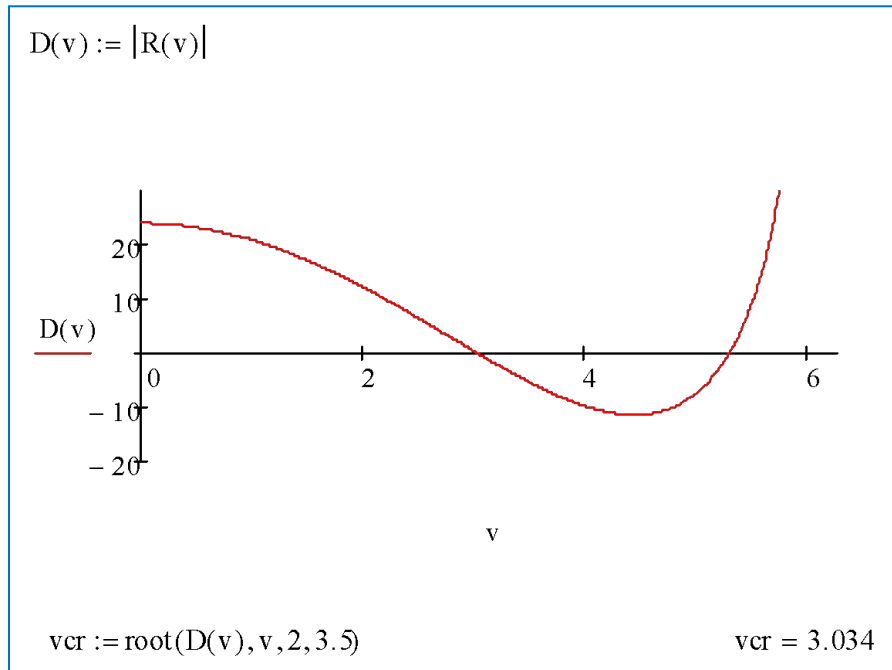


## Матрица

### ЖЕСТКОСТИ

$$R(v) := \begin{pmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) & r_{13}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) & r_{23}(v) \\ r_{31}(v) & r_{32}(v) & r_{33}(v) \end{pmatrix}$$

# 3. Решение характеристического уравнения



## Интерфейс с функцией MathCad-a

**root()**  
 $\text{root}(f(\text{var}), \text{var}, [a, b])$

Возвращает значение переменной  $\text{var}$ , для которого функция  $f$  принимает нулевое значение. Если указаны параметры  $a$  и  $b$ , функция  $\text{root}$  находит значение  $\text{var}$  на этом интервале. В противном случае  $\text{var}$  необходимо определить с помощью начального приближения до вызова функции  $\text{root}$ .

## 4. Определение критического параметра нагрузки $F_{cr}$

$$F_{cr} := \frac{v_{cr}^2 \cdot EI}{3^2 \cdot 3} = 0.341$$

поскольку  $v = v_5 = 3 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot F}{EI}}$

$$EI := 2 \cdot 10^{11} \cdot I_2 = 7.64 \times 10^6$$

$$F_{cr} := \frac{v_{cr}^2 \cdot EI}{h^2 \cdot 3} = 2.605 \times 10^6$$

## 5. Определение коэффициентов приведенных длин $\mu$ сжатых элементов

$$\mu_1 := \frac{\pi}{v_1(v_{cr})} = 1.793$$

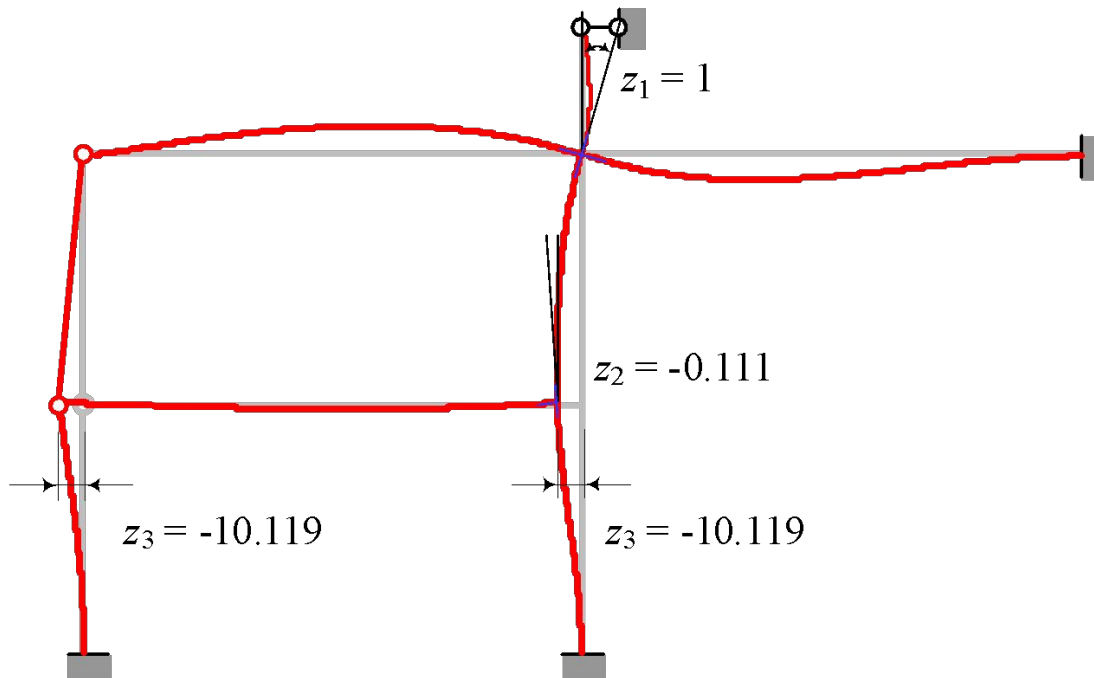
$$\mu_2 := \frac{\pi}{v_2(v_{cr})} = 1.793$$

$$\mu_3 := \frac{\pi}{v_3(v_{cr})} = 3.586$$

$$\mu_4 := \frac{\pi}{v_4(v_{cr})} = 1.268$$

$$\mu_5 := \frac{\pi}{v_5(v_{cr})} = 1.035$$

# 6. Построение формы потери устойчивости



$$z_1 := 1 \quad z_2 := 0 \quad z_3 := 0$$

Given

$$r_{12}(vcr) \cdot z_2 + r_{13}(vcr) \cdot z_3 = -(r_{11}(vcr) \cdot z_1)$$

$$r_{22}(vcr) \cdot z_2 + r_{23}(vcr) \cdot z_3 = -(r_{21}(vcr) \cdot z_1)$$

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -0.111 \\ -10.119 \end{pmatrix}$$