

Метод перемещений расчета на устойчивость

Пример расчета

Алгоритм метода перемещений расчета на устойчивость

1. Определение степени кинематической неопределимости

$$n = n_y + n_d$$

и выбор основной системы метода перемещений.

2. Формирование матрицы жесткости

$$\mathbf{R}(v) = \begin{bmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) & \dots & r_{1n}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) & \ddots & r_{2n}(v) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(v) & r_{n1}(v) & \dots & r_{nn}(v) \end{bmatrix}$$

2.1. Построение единичных эпюр моментов \bar{M}_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

2.2. Определение коэффициентов $r_{ij}(v)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

3. Решение характеристического уравнения

$$D(v) = |\mathbf{R}(v)| = 0$$

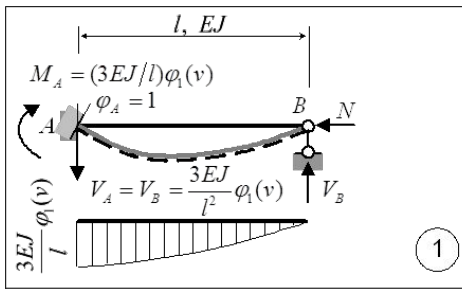
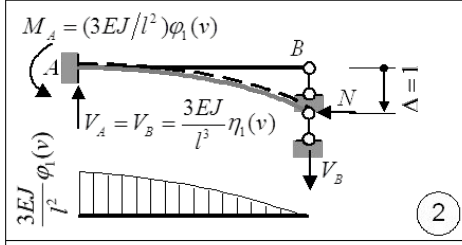
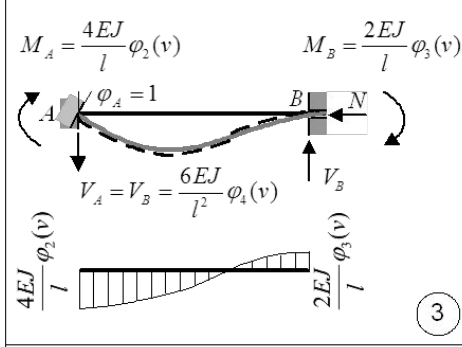
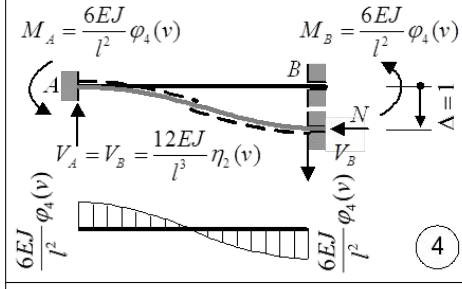
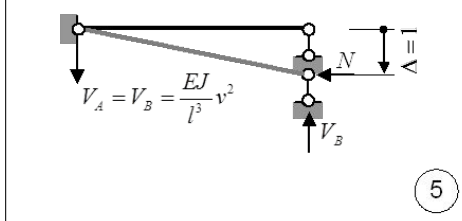
с целью определения минимального корня v_{cr} .

4. Определение критического параметра нагрузки F_{cr} .

5. Определение коэффициентов приведенных длин μ сжатых элементов.

6. Построение формы потери устойчивости

Таблица метода перемещений и специальные функции расчета на устойчивость

| | |
|---|---|
|  <p>1</p> | $\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)} = \frac{v^2}{3} \frac{\operatorname{tg} v}{v - v}$ |
|  <p>2</p> | $\eta_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right)} = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}$ |
|  <p>3</p> | $\varphi_2(v) = \frac{1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}}{4 \left(\frac{\operatorname{tg} v/2}{v/2} - 1\right)} = \frac{v}{8 \operatorname{tg} v} \frac{\operatorname{tg} v - v}{\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}}$ $\varphi_3(v) = \frac{\frac{v}{\sin v} - 1}{2 \left(\frac{\operatorname{tg} v/2}{v/2} - 1\right)} = \frac{v}{4 \sin v} \frac{v - \sin v}{\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}}$ $\varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right)$ |
|  <p>4</p> | $\eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right)$ |
|  <p>5</p> | $v = l \sqrt{\frac{N}{EJ}}$ |

$$\varphi_1(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \frac{v^2}{3} \frac{\operatorname{tg}(v)}{\operatorname{tg}(v) - v} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi_2(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \frac{v}{8 \cdot \operatorname{tg}(v)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(v) - v}{\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{v}{2}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi_3(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \frac{v}{4 \cdot \sin(v)} \cdot \frac{v - \sin(v)}{\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{v}{2}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi_4(v) := \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right)$$

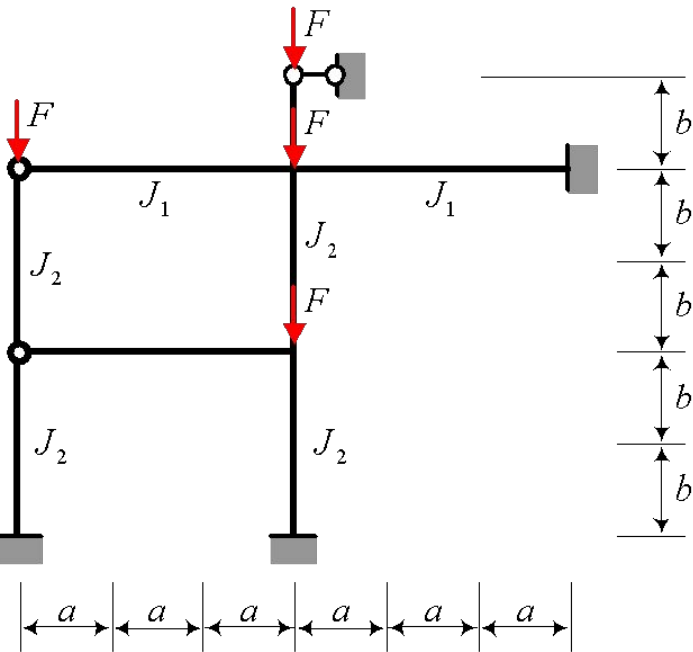
$$\eta_1(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0 \\ \frac{v^3}{3 \cdot (\operatorname{tg}(v) - v)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\eta_2(v) := \eta_1\left(\frac{v}{2}\right)$$

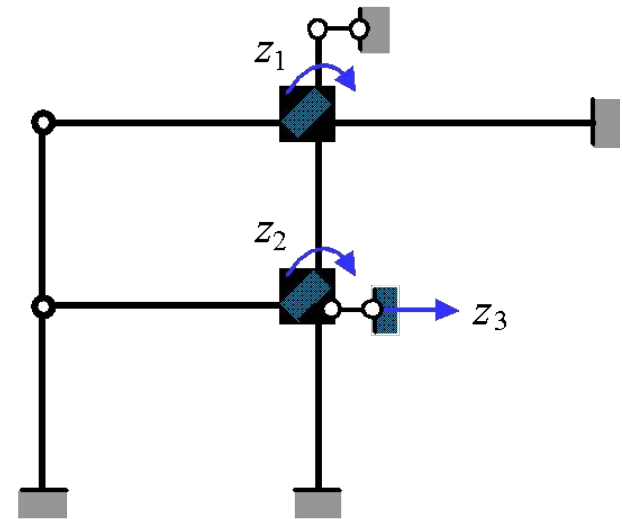
Пример

1. Выбор основной

СИСТЕМЫ

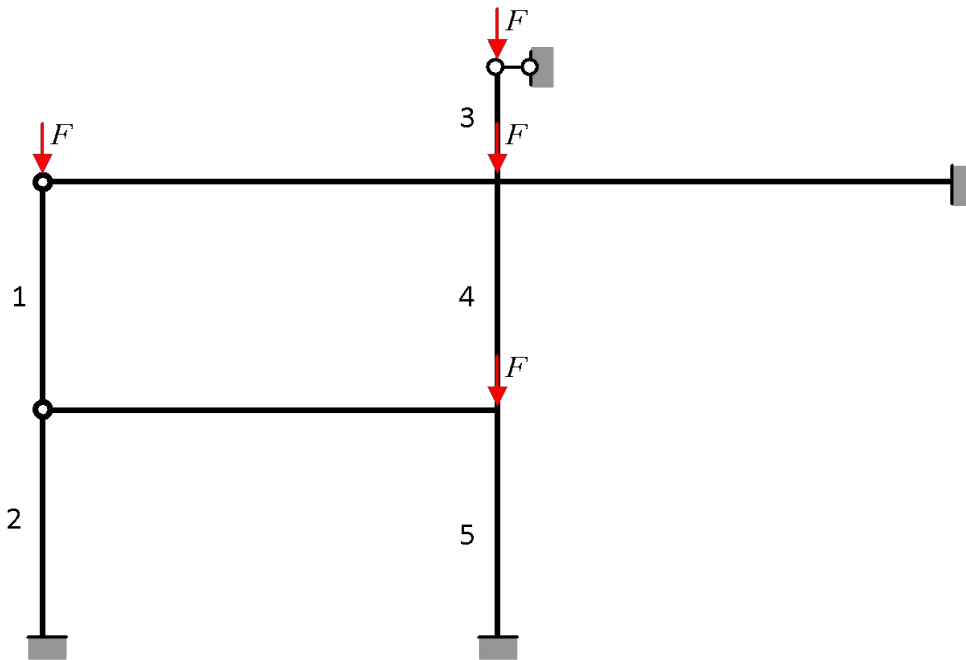


Основная система метода перемещений



2. Формирование матрицы жесткости

Определение параметра ν для каждого сжатого стержня



$$\nu_1 = 3 \frac{\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\xi \bar{3}}{3}$$

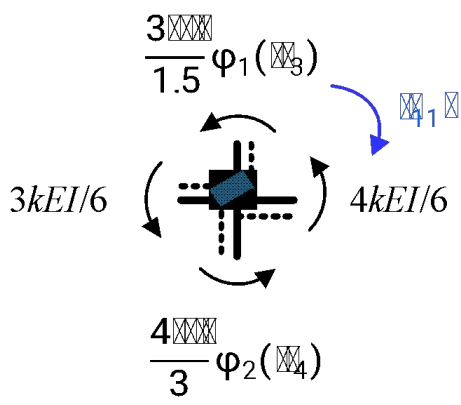
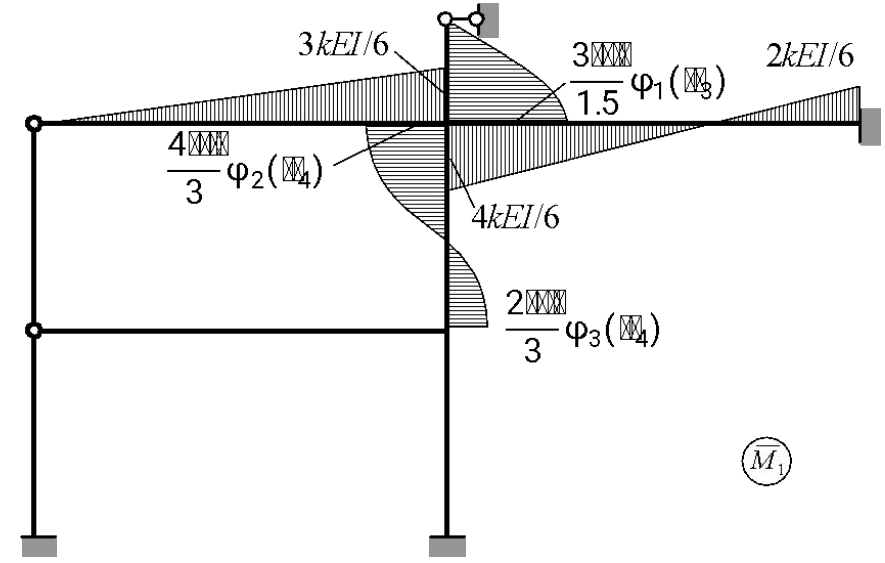
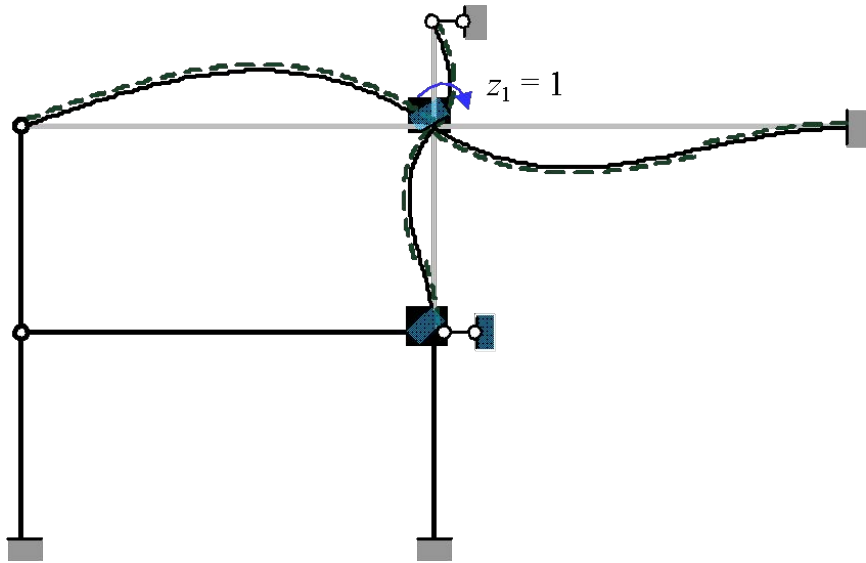
$$\nu_2 = 3 \frac{\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\xi \bar{3}}{3}$$

$$\nu_3 = 1.5 \frac{\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\xi \bar{3}}{6}$$

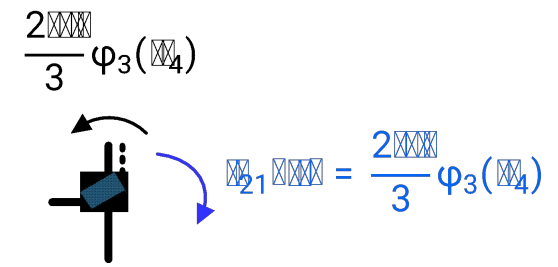
$$\nu_4 = 3 \frac{\frac{2h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\xi \bar{6}}{3}$$

$$\nu_5 = 3 \frac{\frac{3h}{2}}{\frac{h}{2}} = \xi$$

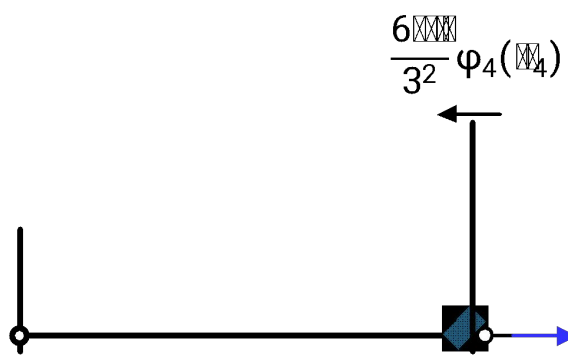
2.1 Построение единичных эпюр и 2.2. Определение коэффициентов матрицы жесткости



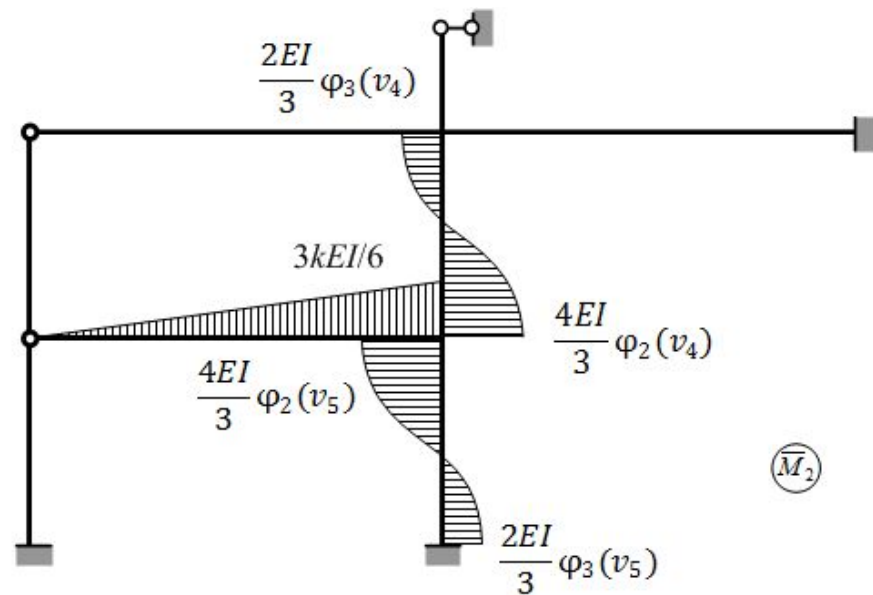
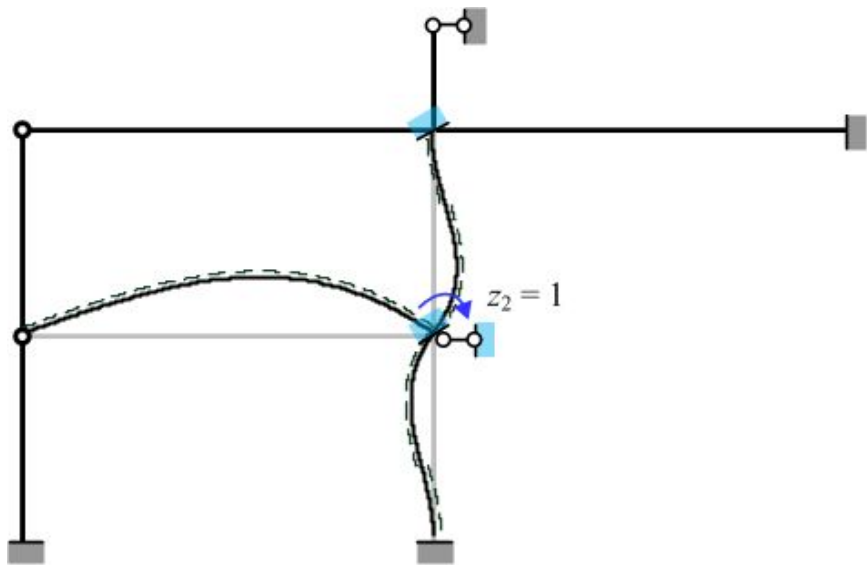
$$k_{11} = \frac{3}{1.5} \varphi_1(\xi_3) + \frac{4}{6} + \frac{4}{3} \varphi_2(\xi_4) + \frac{3}{6}$$



$$k_{21} = \frac{2}{3} \varphi_3(\xi_4)$$



$$k_{31} = \frac{6}{32} \varphi_4(\xi_4)$$



$$M_{22} = \frac{2EI}{3} \varphi_3(v_4)$$

$$\frac{2EI}{3} \varphi_3(v_4)$$

$$M_{22} = \frac{4EI}{3} \varphi_2(v_4) + \frac{3kEI}{6} + \frac{4EI}{3} \varphi_2(v_5)$$

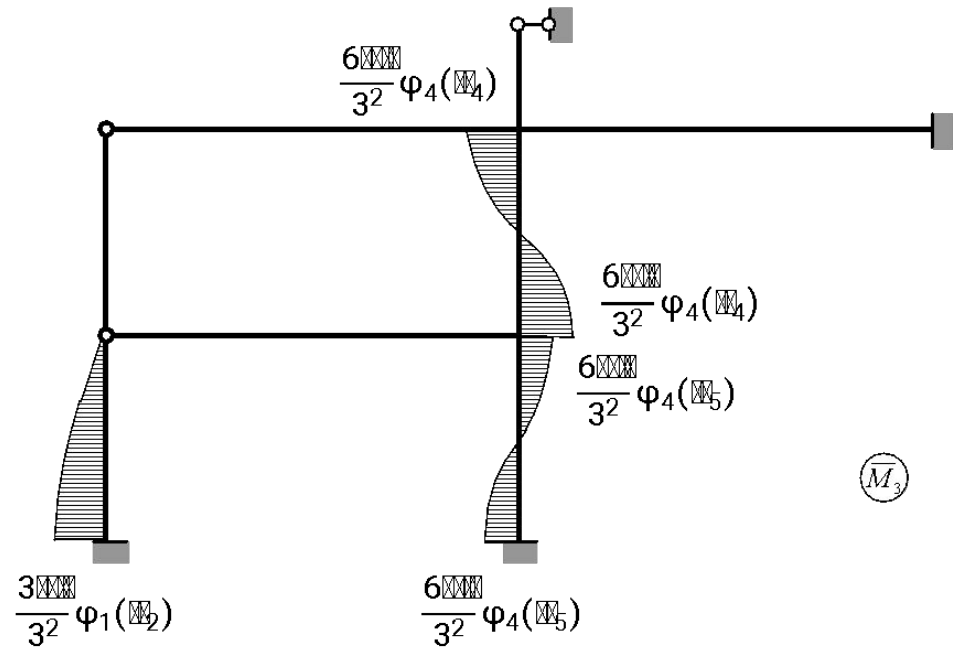
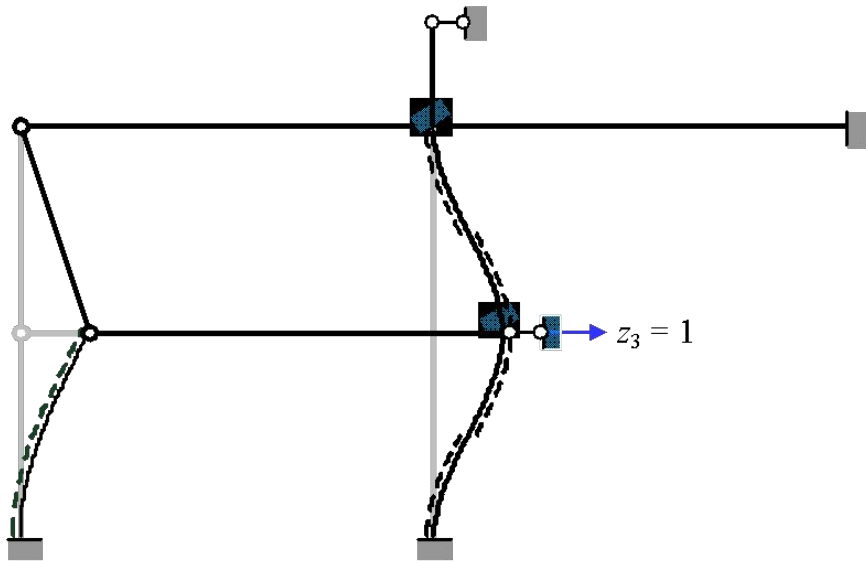
$$\frac{4EI}{3} \varphi_2(v_4)$$

$$\frac{4EI}{3} \varphi_2(v_5)$$

$$M_{32} = \frac{6EI}{32} \varphi_4(v_4) - \frac{6EI}{32} \varphi_4(v_5)$$

$$\frac{6EI}{32} \varphi_4(v_4)$$

$$\frac{6EI}{32} \varphi_4(v_5)$$



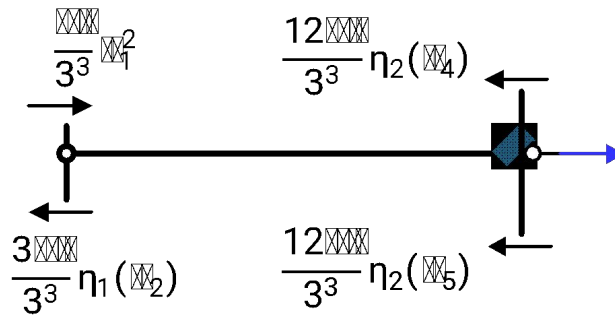
$$M_3 = \frac{6EI}{32} \phi_4(x_4)$$

$$\frac{6EI}{32} \phi_4(x_4)$$

$$\frac{6EI}{32} \phi_4(x_4)$$

$$M_3 = \frac{6EI}{32} \phi_4(x_4) - \frac{6EI}{32} \phi_4(x_5)$$

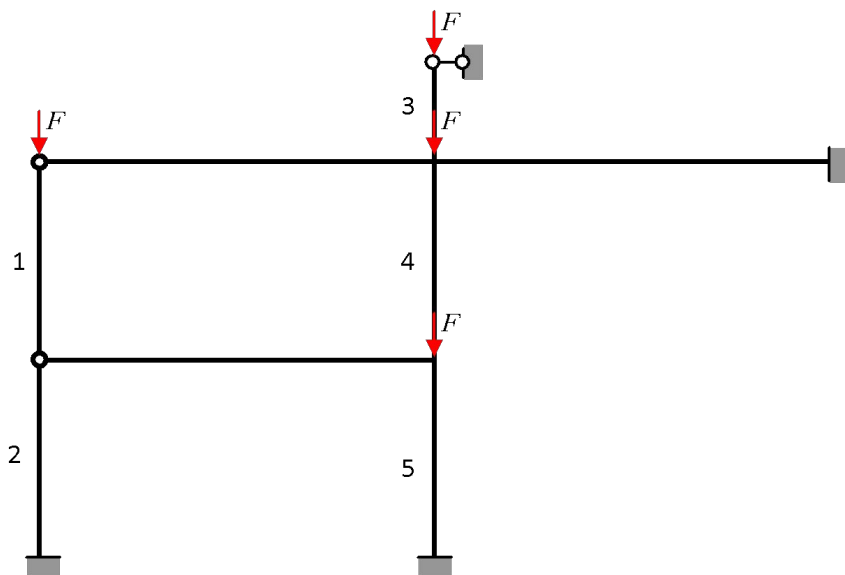
$$\frac{6EI}{32} \phi_4(x_5)$$



$$M_3 = \frac{12EI}{33} \eta_2(x_4) + \frac{12EI}{33} \eta_2(x_5) + \frac{3EI}{33} \eta_1(x_2) - \frac{EI}{33} x_4^2$$

Реализация в среде MathCad

(MathCad-текст оконтурен)



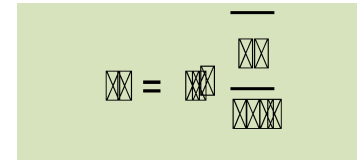
| | |
|--------------------------------|-----------------------|
| | ГОСТ-26020-83 |
| $I_1 := 10400 \cdot 10^{-8}$ | 30Ш1 - сечение ригеля |
| $I_2 := 3820 \cdot 10^{-8}$ | 20К1 - сечение стоек |
| $a := 2$ | $b := 1.5$ |
| $L := 3 \cdot a = 6$ | $h := 2 \cdot b = 3$ |
| $k := \frac{I_1}{I_2} = 2.723$ | |
| $EI := 1$ | |

$$v_1 := 3 \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad v_2 := 3 \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad v_3 := \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad v_4 := 3 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot F}{EI}} \quad v_5 := 3 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot F}{EI}}$$

$$v_5 = v$$

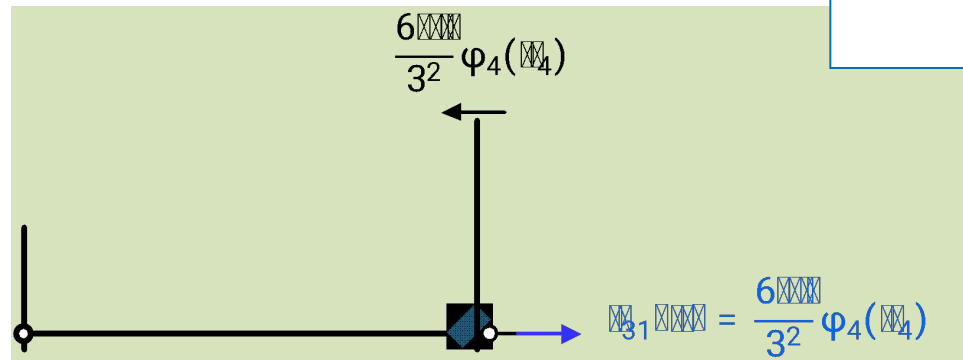
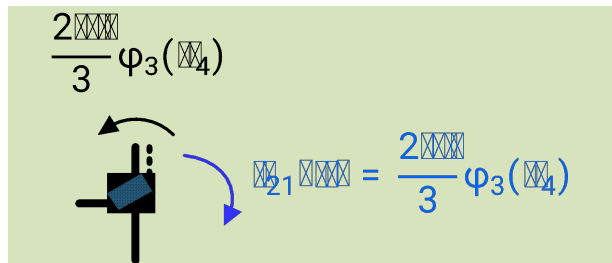
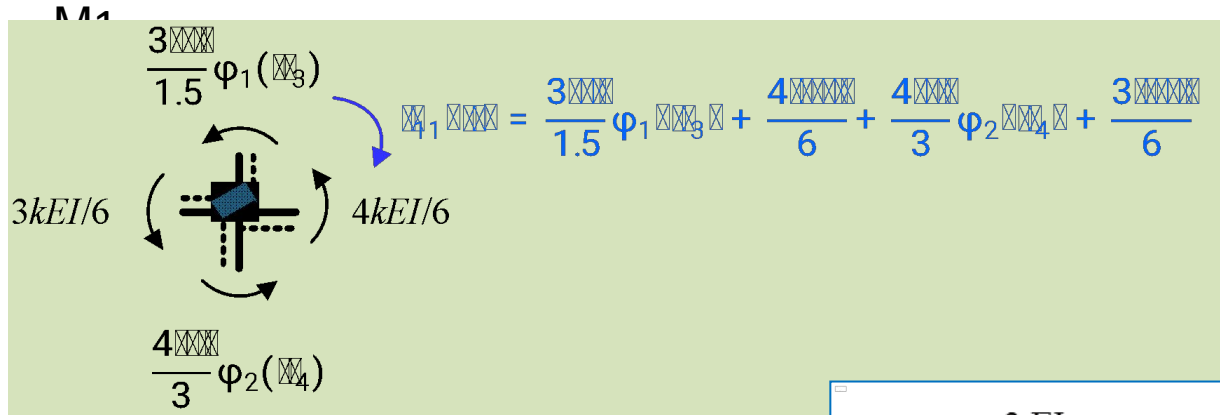
$$\frac{v_1}{v_5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \quad v_1(v) := \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot v \quad \frac{v_2}{v_5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \quad v_2(v) := \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot v$$

$$\frac{v_3}{v_5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} \quad v_3(v) := \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot v \quad \frac{v_4}{v_5} \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} \quad v_4(v) := \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v \quad v_5(v) := v$$



2. Формирование матрицы жесткости (МЖ)

Определение коэффициентов первого столбца МЖ по эп.

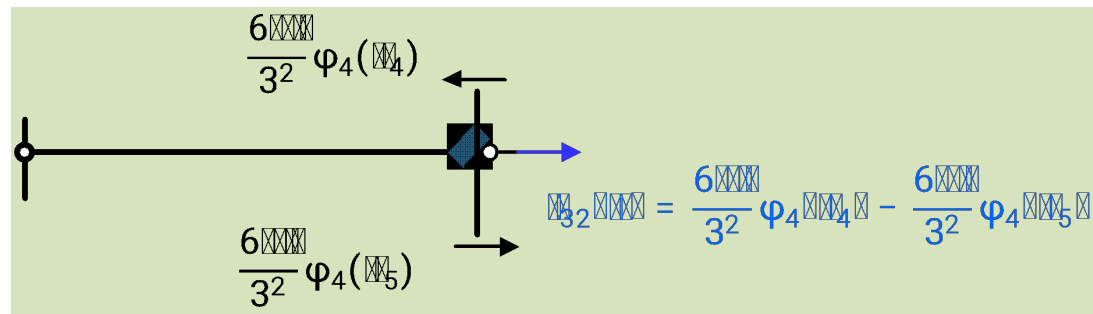
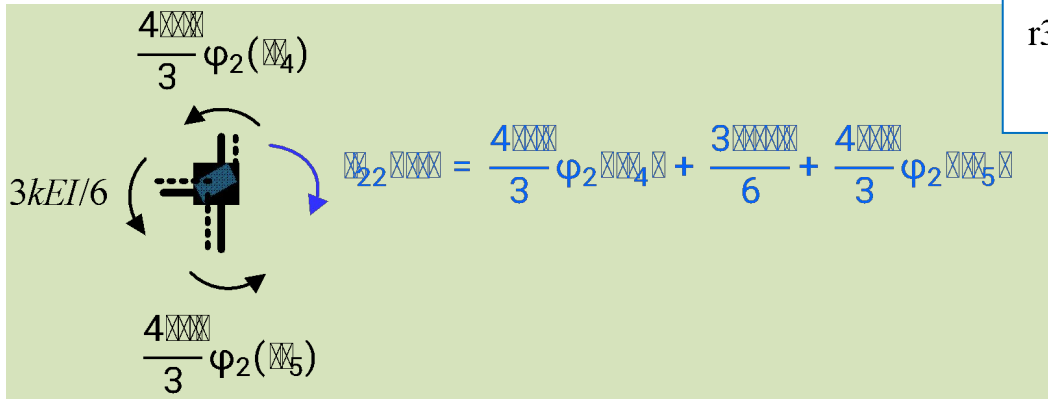
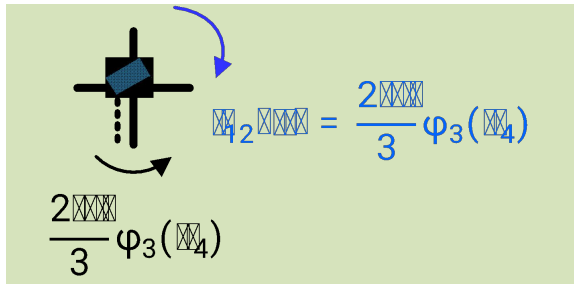


$$r_{11}(v) := \frac{3 \cdot EI}{b} \cdot \varphi_1(v_3(v)) + \frac{4 \cdot k \cdot EI}{L} + \frac{4 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_2(v_4(v)) + \frac{3 \cdot k \cdot EI}{L}$$

$$r_{21}(v) := \frac{2 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_3(v_4(v))$$

$$r_{31}(v) := \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_4(v))$$

Определение коэффициентов второго столбца МЖ по эп. М2

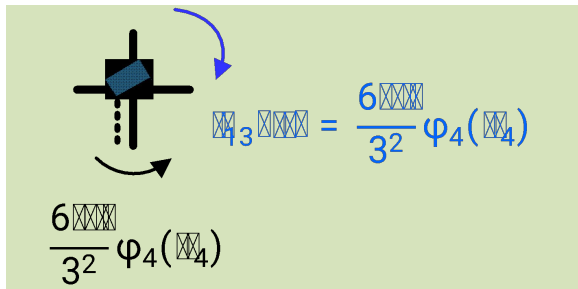


$$r_{12}(v) := \frac{2 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_3(v_4(v))$$

$$r_{22}(v) := \frac{4 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_2(v_4(v)) + \frac{3 \cdot k \cdot EI}{L} + \frac{4 \cdot EI}{h} \cdot \varphi_2(v_5(v))$$

$$r_{32}(v) := \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_4(v)) - \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_5(v))$$

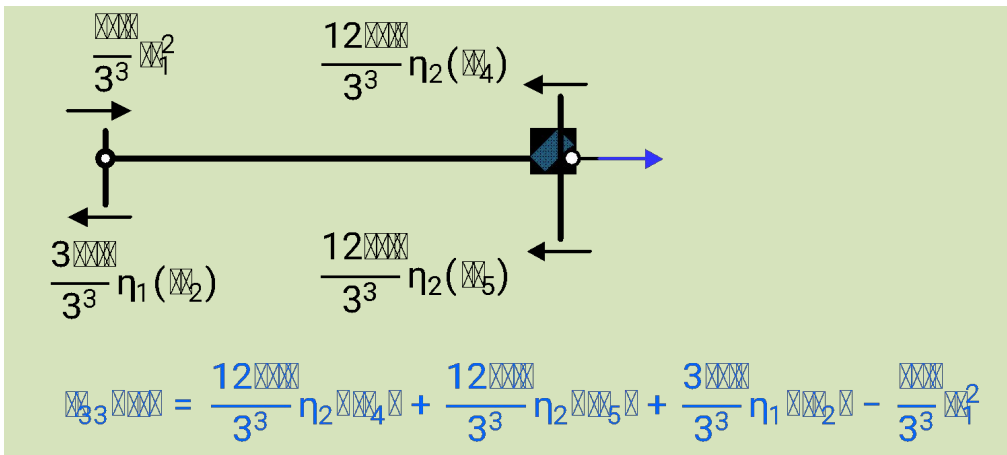
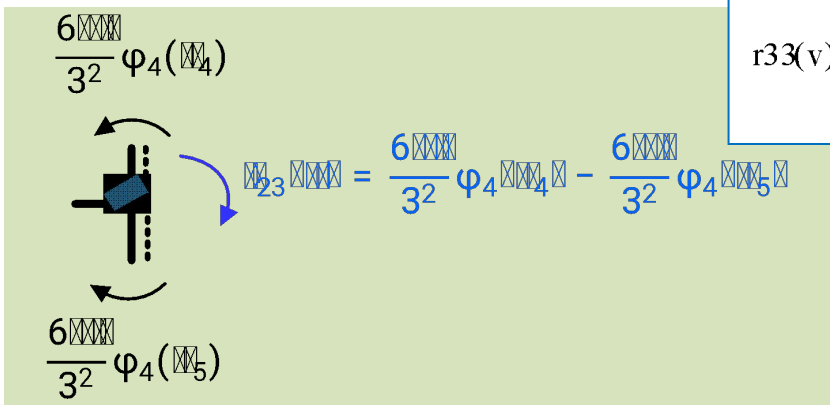
Определение коэффициентов третьего столбца МЖ по эп.



$$r_{13}(v) := \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_4(v))$$

$$r_{23}(v) := \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_4(v)) - \frac{6 \cdot EI}{h^2} \cdot \varphi_4(v_5(v))$$

$$r_{33}(v) := \frac{12 \cdot EI}{h^3} \cdot \eta_2(v_4(v)) + \frac{12 \cdot EI}{h^3} \cdot \eta_2(v_5(v)) + \frac{3 \cdot EI}{h^3} \cdot \eta_1(v_2(v)) - \frac{EI}{h^3} \cdot v_1(v)^2$$

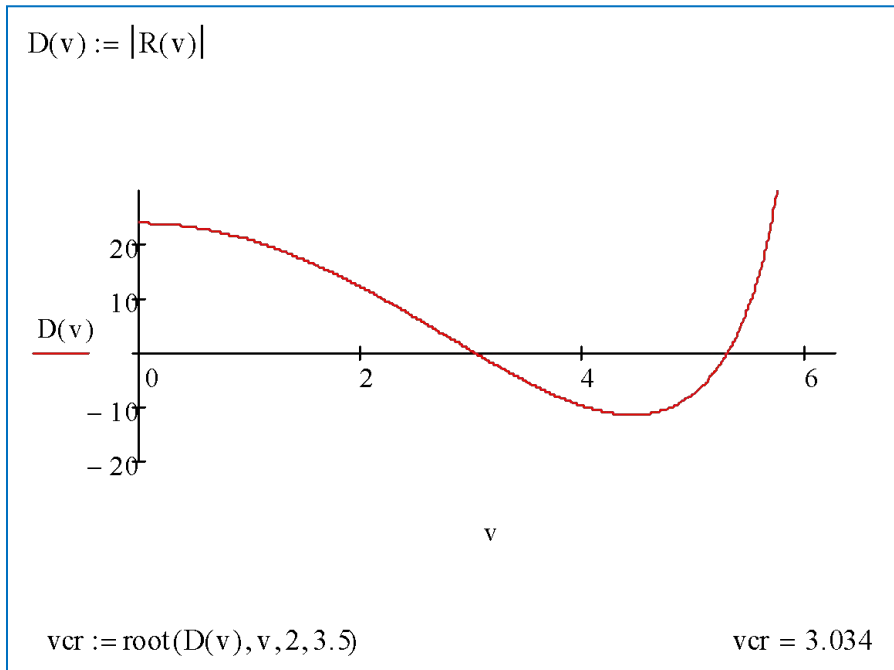


Матрица

ЖЕСТКОСТИ

$$R(v) := \begin{pmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) & r_{13}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) & r_{23}(v) \\ r_{31}(v) & r_{32}(v) & r_{33}(v) \end{pmatrix}$$

3. Решение характеристического уравнения



Интерфейс с функцией MathCad-a

root()
 $\text{root}(f(\text{var}), \text{var}, [a, b])$

Возвращает значение переменной var , для которого функция f принимает нулевое значение. Если указаны параметры a и b , функция root находит значение var на этом интервале. В противном случае var необходимо определить с помощью начального приближения до вызова функции root .

4. Определение критического параметра нагрузки F_{cr}

$$F_{cr} := \frac{v_{cr}^2 \cdot EI}{3^2 \cdot 3} = 0.341$$

поскольку $v = v_5 = 3 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot F}{EI}}$

$$EI := 2 \cdot 10^{11} \cdot I_2 = 7.64 \times 10^6$$

$$F_{cr} := \frac{v_{cr}^2 \cdot EI}{h^2 \cdot 3} = 2.605 \times 10^6$$

5. Определение коэффициентов приведенных длин μ сжатых элементов

$$\mu_1 := \frac{\pi}{v_1(v_{cr})} = 1.793$$

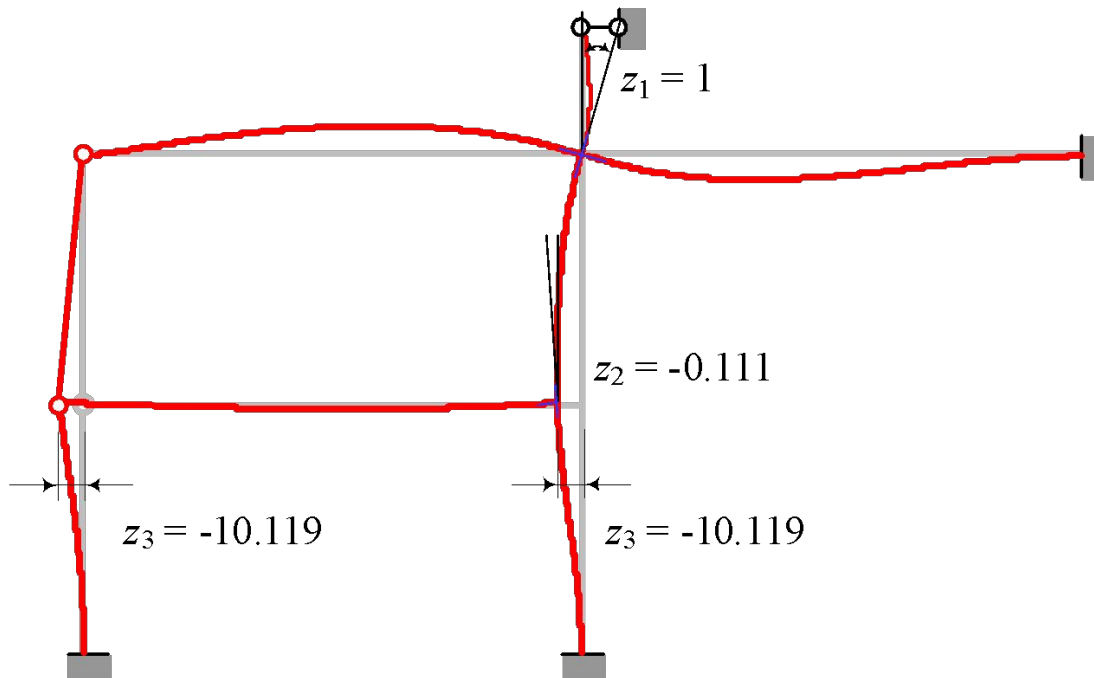
$$\mu_2 := \frac{\pi}{v_2(v_{cr})} = 1.793$$

$$\mu_3 := \frac{\pi}{v_3(v_{cr})} = 3.586$$

$$\mu_4 := \frac{\pi}{v_4(v_{cr})} = 1.268$$

$$\mu_5 := \frac{\pi}{v_5(v_{cr})} = 1.035$$

6. Построение формы потери устойчивости



$$z_1 := 1 \quad z_2 := 0 \quad z_3 := 0$$

Given

$$r_{12}(vcr) \cdot z_2 + r_{13}(vcr) \cdot z_3 = -(r_{11}(vcr) \cdot z_1)$$

$$r_{22}(vcr) \cdot z_2 + r_{23}(vcr) \cdot z_3 = -(r_{21}(vcr) \cdot z_1)$$

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -0.111 \\ -10.119 \end{pmatrix}$$