



**Натуральные и целые числа,
арифметические действия
над ними.**

1. Арифметические действия над целыми числами

Числа, появившиеся в результате счета, называются **натуральными числами**.

Они обозначаются с помощью десяти знаков (цифр): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Множество N натуральных чисел бесконечно. Оно имеет наименьшее число 1, но не имеет наибольшего.

Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел**:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... – ряд
натуральных чисел N или (Z_+)

т.е. $N = \{1; 2; 3; \dots n \dots\}$.

- Для натурального числа n есть противоположное число $-n$, а для $-n$ противоположное n .

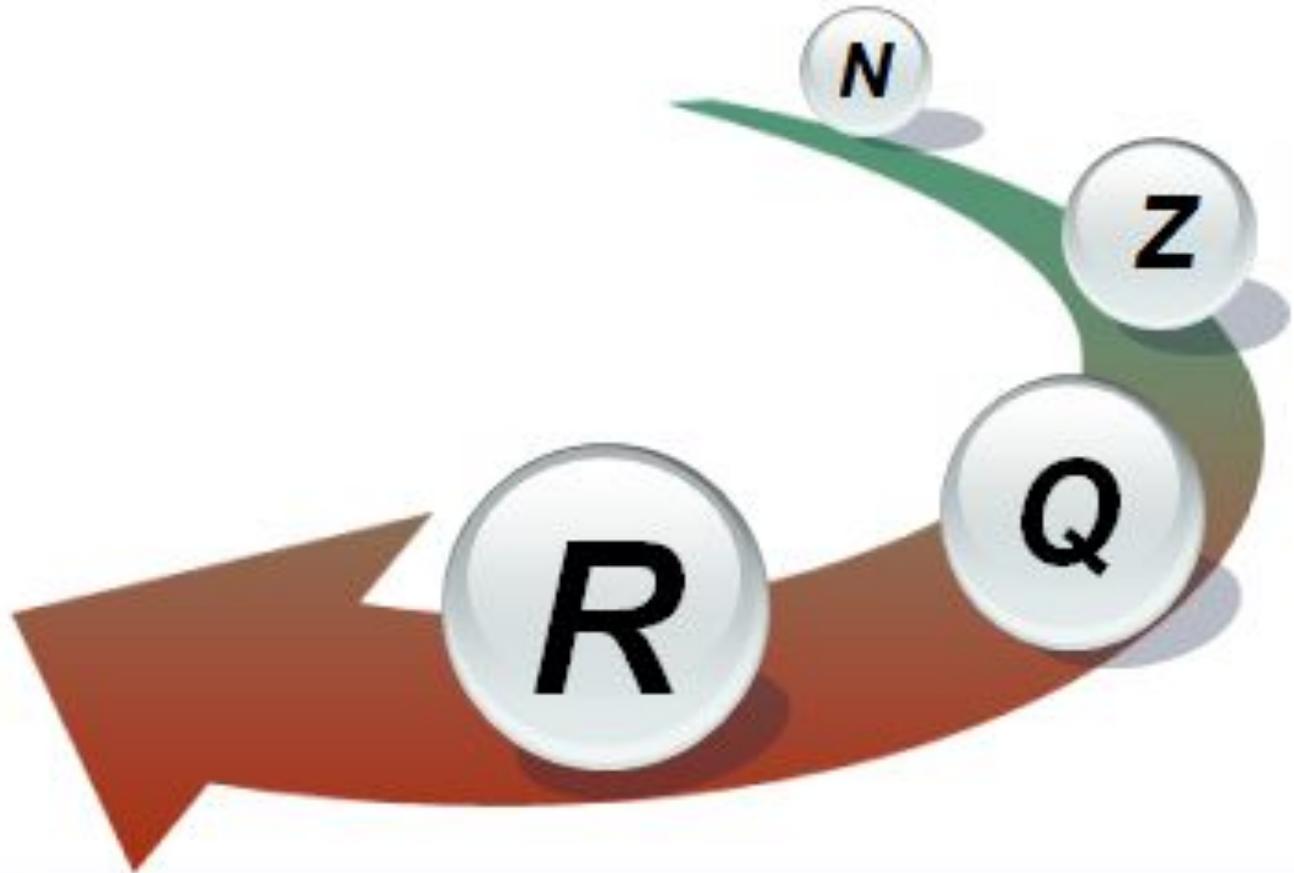
$-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, \dots$ – ряд отрицательных чисел Z_-

- Число ноль считают противоположным самому себе.

- Совокупность чисел $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ образует множество всех **целых чисел**, т.е. $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$

$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ – ряд целых чисел Z (Z_+ и Z_- и 0)

Множества чисел



● Над целыми числами устанавливаются **действия сложения и умножения**, которые обладают следующими основными свойствами:

1. *переместительное свойство сложения: $a + b = b + a$;*
2. *сочетательное свойство сложения:*
 $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. *переместительное свойство умножения: $a \cdot b = b \cdot a$;*
4. *сочетательное свойство умножения:*
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
5. *распределительное свойство: $(a + b) \cdot c = a c + b c$;*
6. *свойство нуля при сложении: $a + 0 = a$;*
7. *свойство нуля при умножении: $a \cdot 0 = 0$;*
8. *свойство единицы при умножении: $a \cdot 1 = a$.*

- **Вычитание и деление** определяются как действия, обратные сложению и умножению.
- **Вычесть из числа a число b** - значит найти такое число c , которое при сложении с числом b дает число a , т.е. **$c = a - b$** , если **$c + b = a$** .
- Число c называется *разностью чисел a и b* .
- Для целых чисел вычитание всегда выполнимо и единственно.

- **Разделить число a на число b** - значит найти такое число q , при умножении на которое число b дает число a , т.е.

$$q = a : b, \text{ если } q \cdot b = a.$$

a – делимое, b – делитель, q – частное.

$a : b$ – a делится на b без остатка.

- При сложении, умножении и вычитании целых чисел всегда получаются целые числа.
- Деление не всегда выполнимо на множестве целых чисел. Невозможно деление на нуль.

- Целое число называется **чётным**, если оно делится нацело на 2, и **нечётным**, если оно не делится на 2.
- Нуль обладает свойствами четного числа.

Деление с остатком.

- Для любых чисел a и b ($b > 0$) справедливо утверждение: число a всегда можно представить и притом единственным образом в виде:
 $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$
- Число q называется частным, а число r – остатком.
- Если $r = 0$, то a делится на b нацело.
- Например: $37 = 5 \cdot 7 + 2$.

2. Простые и составные натуральные числа

- Пусть a – натуральное число.
- **Делителем** числа a называется натуральное число, на которое число a делится нацело.
- Например, число 20 имеет 6 делителей:
1, 2, 4, 5, 10, 20.

- Натуральное число a , не равное 1, называется **простым**, если оно имеет только 2 делителя: 1 и само число a .
- Натуральное число a называется **составным**, если оно имеет более двух делителей.
- 1 – единственное натуральное число, которое не является ни простым, ни составным.
- Т.о., множество натуральных чисел состоит из 1, простых и составных чисел.
- Наименьшее простое число – это 2 – единственное четное простое число. Остальные простые числа – нечётные.
- Вот первые 20 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73.

Основная теорема арифметики:

Всякое составное натуральное число можно представить в виде произведения простых множителей и притом единственным способом, т.е.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

где p_1, p_2, \dots, p_n - различные простые делители составного числа a , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - число их повторений в разложении числа a .

Это равенство называется *разложением натурального числа a на простые множители*.

Например, $288 = 2^5 \cdot 3^2$, $13 = 13^1$

3. Признаки делимости чисел.

Признак делимости на 2: число делится на 2, если его последняя цифра четная или ноль.

Примеры:

- 1) число 52738 делится на 2, т.к. последняя цифра 8 – четная;
- 2) 7691 не делится на 2, т.к. 1 – цифра нечетная;
- 3) 1250 делится на 2, т.к. последняя цифра ноль.

Признак делимости на 4: число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

Примеры:

- 1) Число $317\underline{00}$ делится на 4, т.к. оканчивается двумя нулями;
- 2) $2156\underline{34}$ не делится на 4, т.к. последние две цифры дают число 34, не делящееся на 4;
- 3) $166\underline{08}$ делится на 4, т.к. две последние цифры 08 дают число 8, делящееся на 4.

Признак делимости на 8: число делится на 8, если три последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 8.

Примеры:

- 1) Число 125 000 делится на 8, т.к. оканчивается тремя нулями;
- 2) 170004 не делится на 8, т.к. последние цифры дают число 4, не делящееся на 8;
- 3) 111 120 делится на 8, т.к. три последние цифры дают число 120, делящееся на 8.

Признак делимости на 3 (и 9): на 3 (или на 9), делятся только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (или на 9).

Примеры:

- 1) Число 17 835 делится на 3 и не делится на 9, т.к. сумма его цифр $1+7+8+3+5=24$ делится на 3 и не делится на 9;
- 2) 106 499 не делится ни на 3, ни на 9, т.к. сумма его цифр $1+0+6+4+9+9=29$ не делится ни на 3, ни на 9;
- 3) 52 632 делится на 3 и 9, т.к. $5+2+6+3+2=18$

Признак делимости на 6: число делится на 6, если оно делится одновременно на 2 и на 3.

Пример:

Число 126 делится на 6, т.к. оно делится и на 2 и на 3.

Признак делимости на 5: на 5 делятся числа, оканчивающиеся на 0 или 5.

Пример:

240 делится на 5;

554 не делится на 5.

Признак делимости на 10, 100, 1000: на 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100 – только те числа, у которых две последние цифры нули, на 1000 – те, у которых три последние цифры нули.

Примеры:

Число 8200 делится на 10 и на 100;

542 000 делится на 10, 100, 1000.

Признак делимости на 11: на 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11.

Примеры:

1. Число 103 785 делится на 11, т.к. $1+3+8=12$ равна сумме $0+7+5=12$.
2. Число 9 163 627 делится на 11, т.к. $9+6+6+7=28$ и $1+3+2=6$, разность $28-6=22$ делится на 11.
3. Число 461 025 не делится на 11, т.к. $4+1+2=7$ и $6+0+5=11$ не равны друг другу, а их разность $11 - 7 = 4$ не делится на 11.

Обозначения

$$\overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

Пример: $\overline{2543} = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3$

Пример: $\overline{100410} = 1 \cdot 100000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10$

4. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) чисел.

- Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из данных натуральных чисел, называется *наибольшим общим делителем этих чисел – НОД.*
- Если $\text{НОД}(a, b, \dots) = 1$, то эти числа называются *взаимно простыми.*

Примеры. Найти НОД чисел:

1) 48 и 36.

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ 4 \text{ раза} \\ \\ 1 \text{ раз} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ 2 \text{ раза} \\ \\ 2 \text{ раза} \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3,$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\text{НОД}(48; 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Примеры. Найти НОД чисел:

2) 28 и 15.

$$28 = 2^2 \cdot 7, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad \text{НОД}(28; 15) = 1$$

3) $\text{НОД}(6; 88; 15) = 1$

- Наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел a, b, \dots называется *наименьшим общим кратным этих чисел – НОК*.

- Пример. $НОК(48; 36) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$

- *Основные свойства НОД и НОК:*

1) НОД чисел a и b делится на любой их общий делитель.

2) $НОК = \frac{ab}{НОД}$

Упражнения

1. Разложить на простые множители числа:
6, 18, 36, 49, 150, 1024, 2250, 9555.
2. Найти НОД и НОК двух чисел:
2 и 4; 9 и 12; 17 и 36; 28 и 42; 144 и 168.
3. Найти НОД и НОК трех чисел:
4, 6, 8; 15, 18, 21; 16, 24 и 28;
10, 21 и 23; 8, 15 и 19; 56, 70 и 126.
4. Найти НОД и НОК четырех чисел:
2, 8, 9, 70; 4, 16, 32, 64; 15, 16, 36, 100;
40, 60, 100, 150.

Домашнее задание

1. Разложить на простые множители числа: 1001, 2904, 16473.
2. Найти НОД и НОК двух чисел:
4 и 6; 15 и 21; 60 и 240; 98 и 100.
3. Найти НОД и НОК трех чисел:
54, 90 и 162; 26, 51 и 78;
216, 336 и 612.
4. Найти НОД и НОК четырех чисел:
54, 81, 135, 189; 90, 135, 1485, 1800.