Натуральные и целые числа, арифметические действия над ними.

1. Арифметические действия над целыми числами

Числа, появившиеся в результате счета, называются ***натуральными числами***.

Они обозначаются с помощью десяти знаков (цифр): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Множество *N* натуральных чисел бесконечно. Оно имеет наименьшее число 1, но не имеет наибольшего.

Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют ***ряд натуральных чисел:***

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, … – *ряд натуральных чисел* ***N*** *или* ***(Z_+)***

т.е. $N = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots n \ldots\}$.

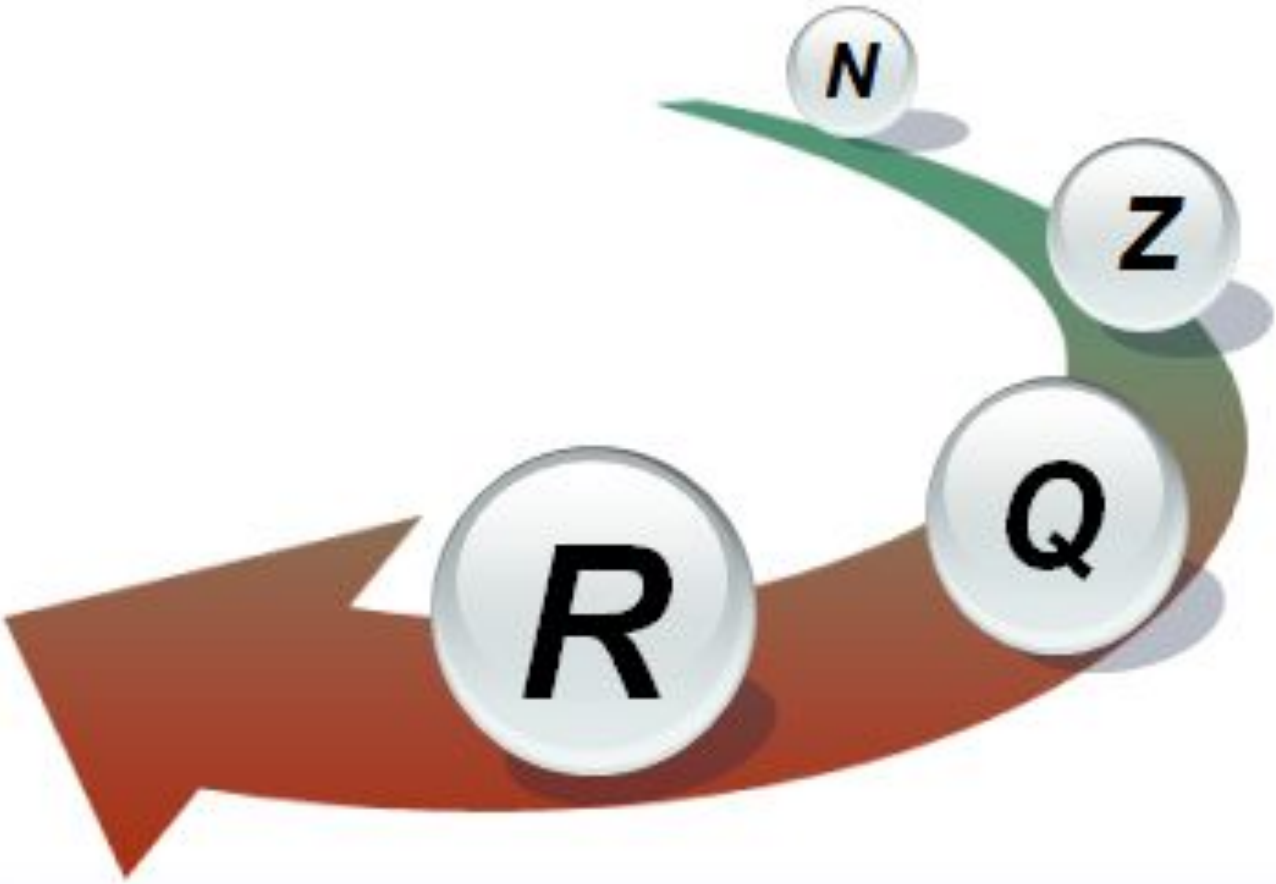
- Для натурального числа *n* есть противоположное число -*n*, а для -*n* противоположное *n*.

-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, … – *ряд отрицательных чисел* ***Z_-***

- Число ноль считают противоположным самому себе.
- Совокупность чисел $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ образует множество всех ***целых чисел***, т.е. $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots\}$

…, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, … – *ряд целых чисел* ***Z*** ***(***Z_+ *и* Z_- *и* ***0)***

Множества чисел



- Над целыми числами устанавливаются ***действия сложения и умножения***, которые обладают следующими основными свойствами:

1. *переместительное свойство сложения*: $a+b = b+a$;
2. *сочетательное свойство сложения:* $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. *переместительное свойство умножения:* $a \cdot b = b \cdot a$;
4. *сочетательное свойство умножения:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
5. *распределительное свойство:* $(a + b) \cdot c = a\,c + b\,c$;
6. *свойство нуля при сложении:* $a + 0 = a$;
7. *свойство нуля при умножении:* $a \cdot 0 = 0$;
8. *свойство единицы при умножении:* $a \cdot 1 = a$.

- ***Вычитание и деление*** определяются как действия, обратные сложению и умножению.
- ***Вычесть из числа а число b*** - значит найти такое число ***с***, которое при сложении с числом *b* дает число ***а***, т.е. $c = a - b$, если $c + b = a$.
- Число ***с*** называется *разностью чисел* ***а*** и ***b.***
- Для целых чисел вычитание всегда выполнимо и единственно.

- ***Разделить число a на число b*** - значит найти такое число q, при умножении на которое число b дает число a, т.е.

$$q = a : b, \text{ если } q \cdot b = a.$$

a – делимое, b – делитель, q – частное.

$a \vdots b$ – *a делится на b без остатка*.

- При сложении, умножении и вычитании целых чисел всегда получаются целые числа.
- Деление не всегда выполнимо на множестве целых чисел. Невозможно деление на нуль.

- Целое число называется ***чётным***, если оно делится нацело на 2, и ***нечётным***, если оно не делится на 2.
- Нуль обладает свойствами четного числа.

Деление с остатком.

- Для любых чисел ***a*** и ***b*** (*b>0*) справедливо утверждение: число ***a*** всегда можно представить и притом единственным образом в виде: ***a = bq + r***, где $0 \le r < b$
- Число *q* называется частным, а число *r* – остатком.
- Если *r* = 0, то ***a*** делится на ***b*** нацело.
- Например: 37 = 5 · 7 + 2.

2. Простые и составные натуральные числа

- Пусть a – натуральное число.
- Делителем числа a называется натуральное число, на которое число a делится нацело.
- Например, число 20 имеет 6 делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

- Натуральное число $\boldsymbol{a}$, не равное 1, называется ***простым***, если оно имеет только 2 делителя: 1 и само число a.
- Натуральное число $\boldsymbol{a}$ называется ***составным***, если оно имеет более двух делителей.
- 1 – единственное натуральное число, которое не является ни простым, ни составным.
- Т.о., множество натуральных чисел состоит из 1, простых и составных чисел.
- Наименьшее простое число – это 2 – единственное четное простое число. Остальные простые числа – нечётные.
- Вот первые 20 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73.

Основная теорема арифметики:

Всякое составное натуральное число можно представить в виде произведения простых множителей и притом единственным способом, т.е.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - различные простые делители составного числа a, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - число их повторений в разложении числа a.

Это равенство называется *разложением натурального числа* $\underline{a}$ на простые множители.

Например, $288 = 2^5 \cdot 3^2, \quad 13 = 13^1$

3. Признаки делимости чисел.

Признак делимости на 2: число делится на 2, если его последняя цифра четная или нуль.

Примеры:

1) число 52738 делится на 2, т.к. последняя цифра 8 – четная;
2) 7691 не делится на 2, т.к. 1 – цифра нечетная;
3) 1250 делится на 2, т.к. последняя цифра нуль.

Признак делимости на 4: число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

Примеры:

1) Число 317<u>00</u> делится на 4, т.к. оканчивается двумя нулями;
2) 2156<u>34</u> не делится на 4, т.к. последние две цифры дают число 34, не делящееся на 4;
3) 166<u>08</u> делится на 4, т.к. две последние цифры 08 дают число 8, делящееся на 4.

Признак делимости на 8: число делится на 8, если три последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 8.

Примеры:

1) Число 125 <u>000</u> делится на 8, т.к. оканчивается тремя нулями;
2) 170<u>004</u> не делится на 8, т.к. последние цифры дают число 4, не делящееся на 8;
3) 111 <u>120</u> делится на 8, т.к. три последние цифры дают число 120, делящееся на 8.

Признак делимости на 3 (и 9): на 3 (или на 9), делятся только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (или на 9).

Примеры:

1) Число 17 835 делится на 3 и не делится на 9, т.к. сумма его цифр $1+7+8+3+5=24$ делится на 3 и не делится на 9;
2) 106 499 не делится ни на 3, ни на 9, т.к. сумма его цифр $1+0+6+4+9+9=29$ не делится ни на 3, ни на 9;
3) 52 632 делится на 3 и 9, т.к. $5+2+6+3+2=18$

Признак делимости на 6: число делится на 6, если оно делится одновременно на 2 и на 3.

Пример:

Число 126 делится на 6, т.к. оно делится и на 2 и на 3.

Признак делимости на 5: на 5 делятся числа, оканчивающиеся на 0 или 5.

Пример:

24<u>0</u> делится на 5;

55<u>4</u> не делится на 5.

Признак делимости на 10, 100, 1000: на 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100 – только те числа, у которых две последние цифры нули, на 1000 – те, у которых три последние цифры нули.

Примеры:

Число 8200 делится на 10 и на 100;

542 000 делится на 10, 100, 1000.

Признак делимости на 11: на 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11.

Примеры:

1. Число <u>1</u>0<u>3</u> 7<u>8</u>5 делится на 11, т.к. 1+3+8=12 равна сумме 0+7+5=12 .
2. Число 9 163 627 делится на 11, т.к. 9+6+6+7=28 и 1+3+2=6, разность 28-6=22 делится на 11.
3. Число 461 025 не делится на 11, т.к. 4+1+2=7 и 6+0+5=11 не равны друг другу, а их разность 11 – 7 = 4 не делится на 11.

Обозначения

$$\overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

<u>*Пример:*</u> $\overline{2543} = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3$

<u>*Пример:*</u> $\overline{100410} = 1 \cdot 100000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10$

4. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) чисел.

- Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из данных натуральных чисел, называется *наибольшим общим делителем этих чисел – НОД.*
- Если НОД ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, **…**) = 1, то эти числа называются *взаимно простыми*.

Примеры. Найти НОД чисел:

1) 48 и 36.

Решение:

48	2	
24	2	
12	2	4 раза
6	2	
3	3	1 раз
1		

36	2	
18	2	2 раза
9	3	
3	3	2 раза
1		

$48 = 2^4 \cdot 3,$ $\qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2$

$$НОД\,(48; 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Примеры. Найти НОД чисел:

2) 28 и 15.

$$28 = 2^2 \cdot 7, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad НОД\left(28; 15\right) = 1$$

3) $НОД\left(6; 88; 15\right) = 1$

- Наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел ***a*, *b*, …** называется ***наименьшим общим кратным этих чисел – НОК.***
- Пример. $НОК\left(48;36\right)=2^4\cdot 3^2=144$
- ***Основные свойства НОД и НОК:***

1) НОД чисел *a* и *b* делится на любой их общий делитель.

2) $НОК=\dfrac{ab}{НОД}$

Упражнения

1. Разложить на простые множители числа:
   6, 18, 36, 49, 150, 1024, 2250, 9555.
2. Найти НОД и НОК двух чисел:
   2 и 4; 9 и 12; 17 и 36; 28 и 42; 144 и 168.
3. Найти НОД и НОК трех чисел:
   4, 6, 8; 15, 18, 21; 16, 24 и 28;
   10, 21 и 23; 8, 15 и 19; 56, 70 и 126.

4. Найти НОД и НОК четырех чисел:

2, 8, 9, 70; 4, 16, 32, 64; 15, 16, 36, 100; 40, 60, 100, 150.

Домашнее задание

1. Разложить на простые множители числа: 1001, 2904, 16473.
2. Найти НОД и НОК двух чисел:
   4 и 6;   15 и 21;   60 и 240;   98 и 100.
3. Найти НОД и НОК трех чисел:
   54, 90 и 162;   26, 51 и 78;
   216, 336 и 612.
4. Найти НОД и НОК четырех чисел:
   54, 81, 135, 189;   90, 135, 1485, 1800.