

Логарифмическая функция. Её свойства и график

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

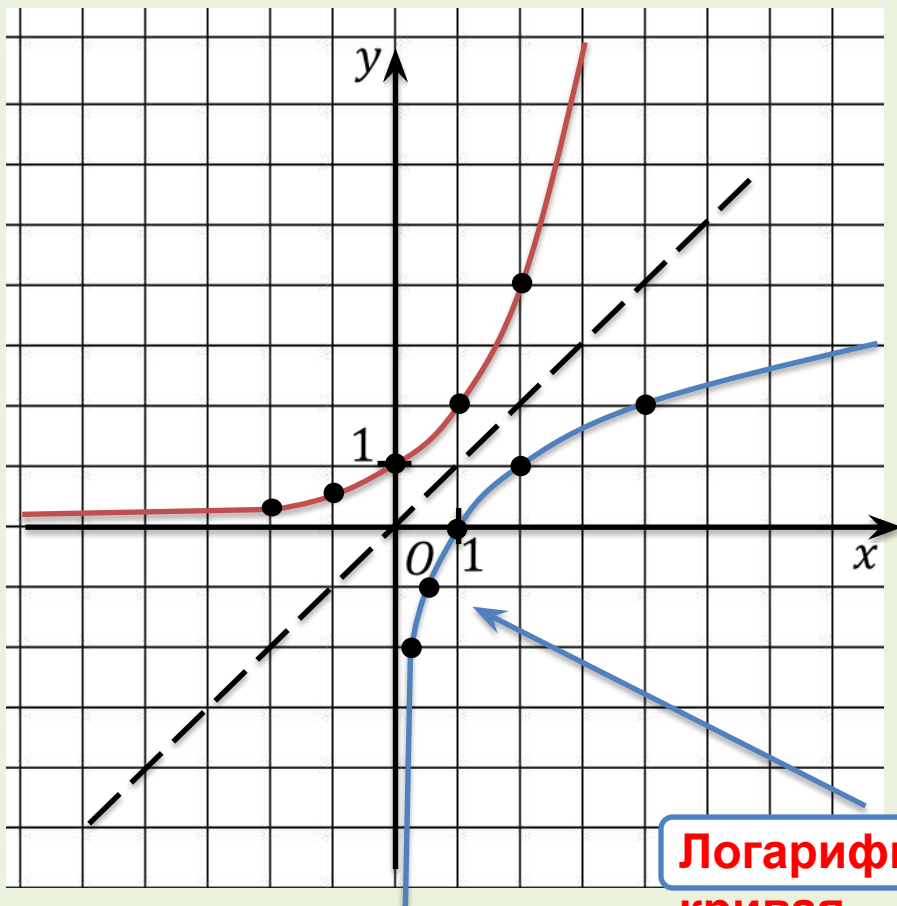
$$b > 0 \rightarrow \log_a b$$

$$y = \log_a x, x \in (0; +\infty)$$

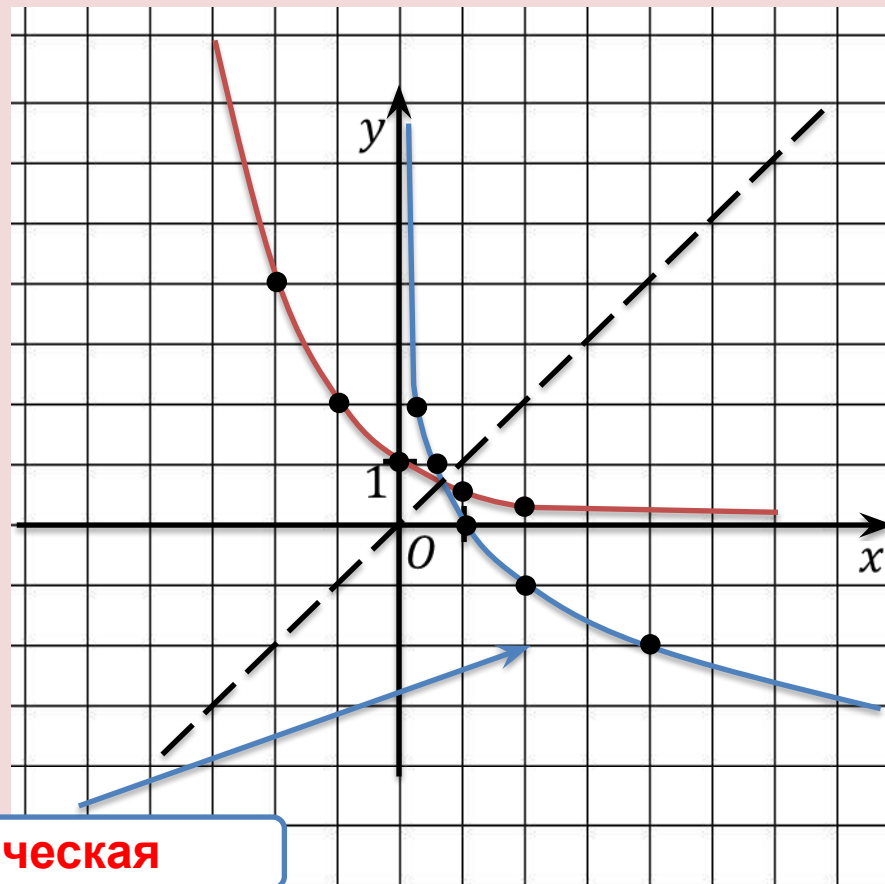
$$y = a^x, a > 0, a \neq 1$$

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$
 – обратная для функции

$$y = a^x, a > 1$$

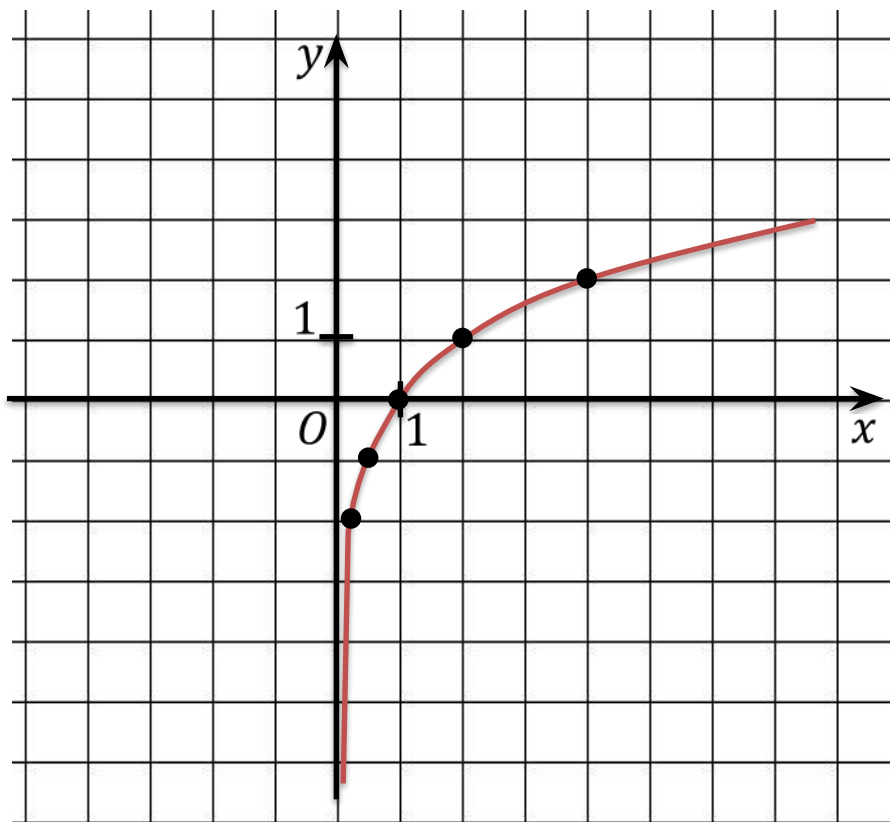


$$y = a^x, 0 < a < 1$$



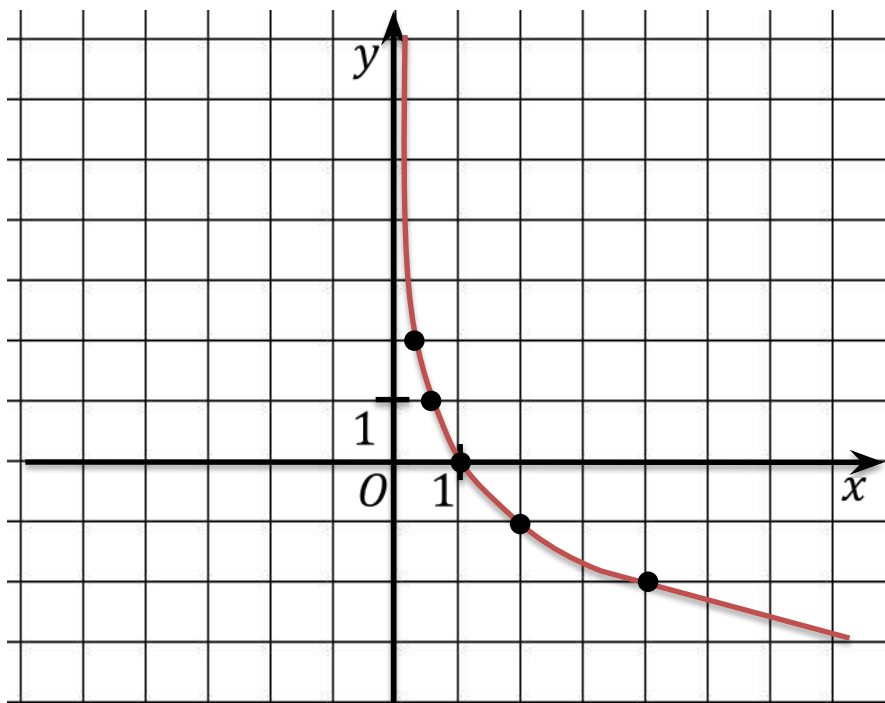
**Логарифмическая
кривая**

$$y = \log_a x, a > 1$$



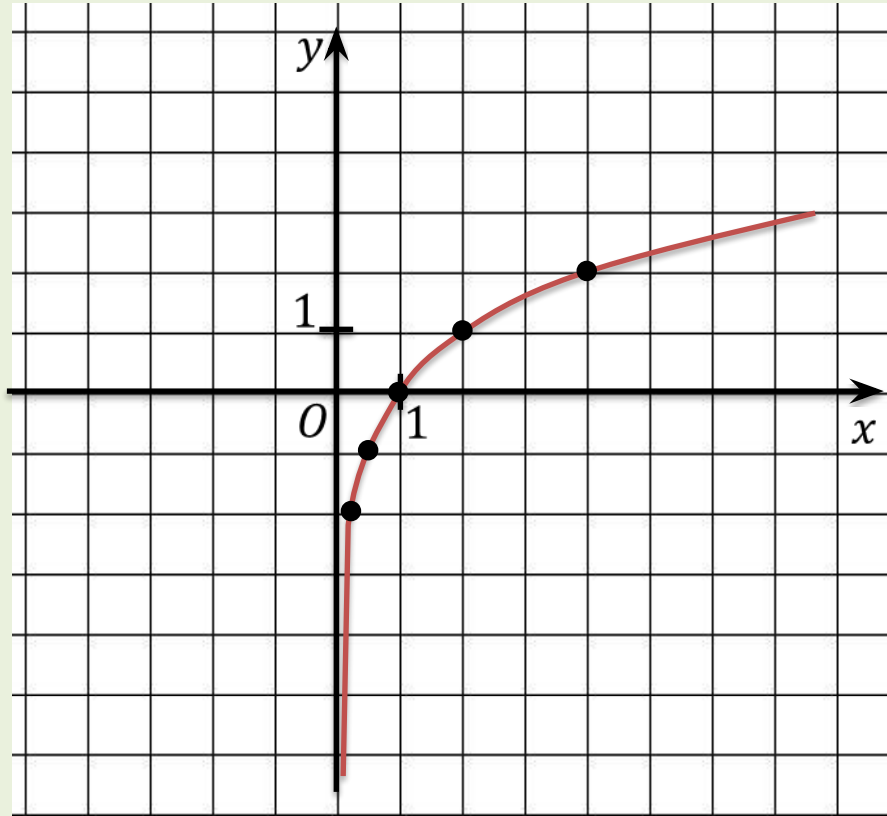
1. $D(y) = (0; +\infty)$
2. $E(y) = R$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция возрастает на $D(y)$
5. функция не ограничена ни сверху, ни снизу
6. $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим}}$ – не существует
7. функция непрерывная
8. функция выпукла вверх

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x, 0 < a < 1$$

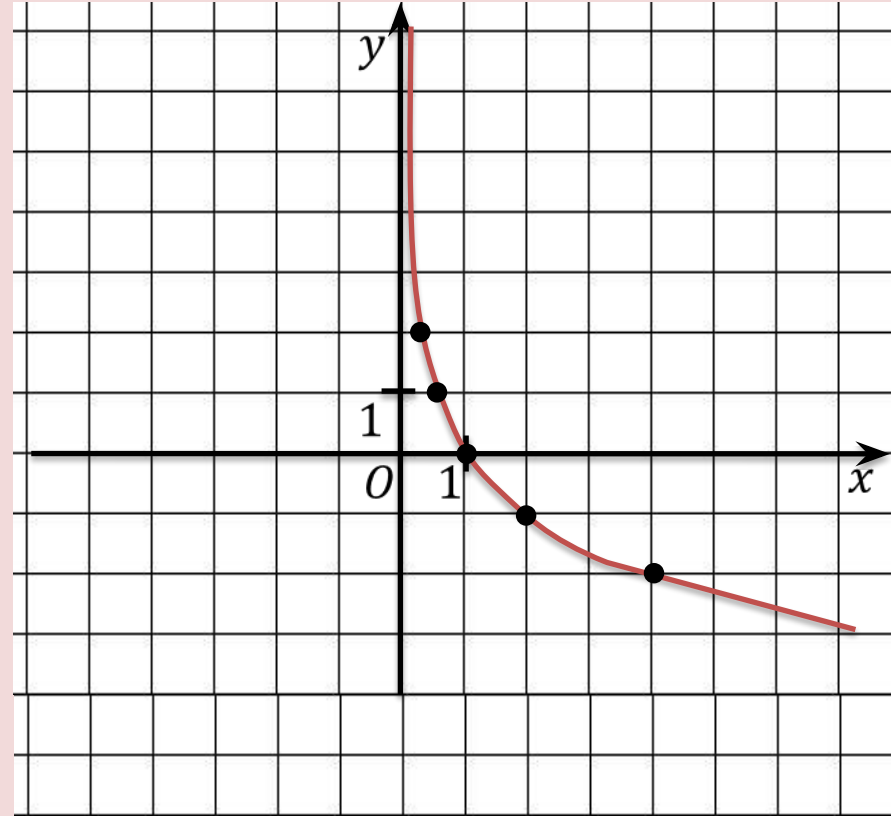


1. $D(y) = (0; +\infty)$
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция убывает на $D(y)$
5. функция не ограничена ни сверху, ни снизу
6. $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим}}$ – не существует
7. функция непрерывная
8. функция выпукла вниз

$$y = \log_a x, a > 1$$



$$y = \log_a x, 0 < a < 1$$



Пример:

$$\log_a a^c = c$$

Найти значение логарифмической функции $y = \log_2 x$ в точках $x_1 = \frac{2}{\sqrt{8}}$
 $x_2 = 16\sqrt{128}$.

Решение:

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{1-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \\ \log_2 &= -\frac{1}{2} \\ &= 2^4 \cdot 2^{\frac{7}{2}} = 2^{4+3,5} = 2^{7,5} \\ \log_2 &= 7,5 \end{aligned}$$

Пример:

Сравнить числа $\log_4 7$ и $\log_4 23$.

Решение:

$4 > 1 \Rightarrow y = \log_4 x$ – возрастает

$7 < 23 \Rightarrow \log_4 7 < \log_4 23$

Пример:

Сравнить числа $\log_{\frac{2}{3}} 0,8$ и $\log_{\frac{2}{3}} 1$.

Решение:

$$\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow y = \log_{\frac{2}{3}} x - \text{убывает}$$

$$0,8 < 1 \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} 0,8 > \log_{\frac{2}{3}} 1$$

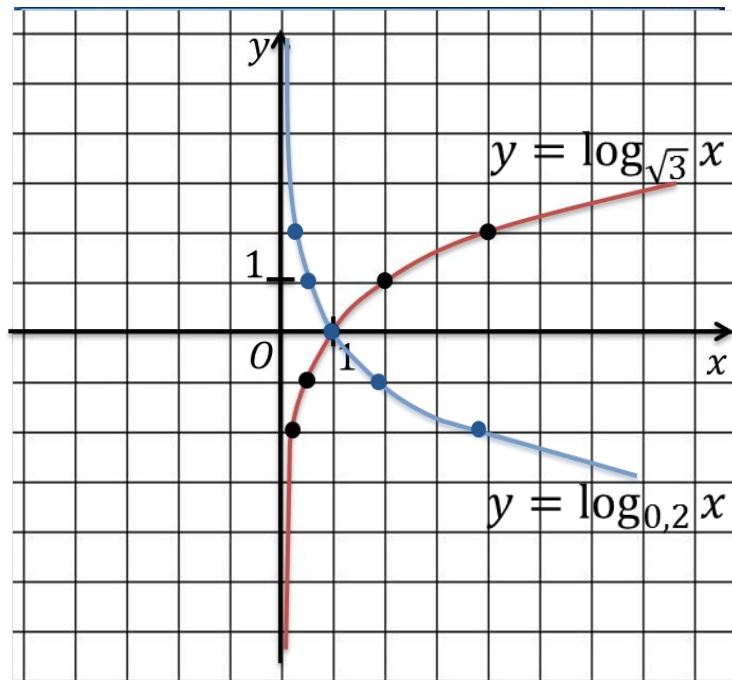
Пример:

Схематично построить графики функций $y = \log_{\sqrt{3}} x$ и $y = \log_{0,2} x$.

Решение:

$$\sqrt{3} \approx 1,73 > 1$$

$$0 < 0,2 < 1$$



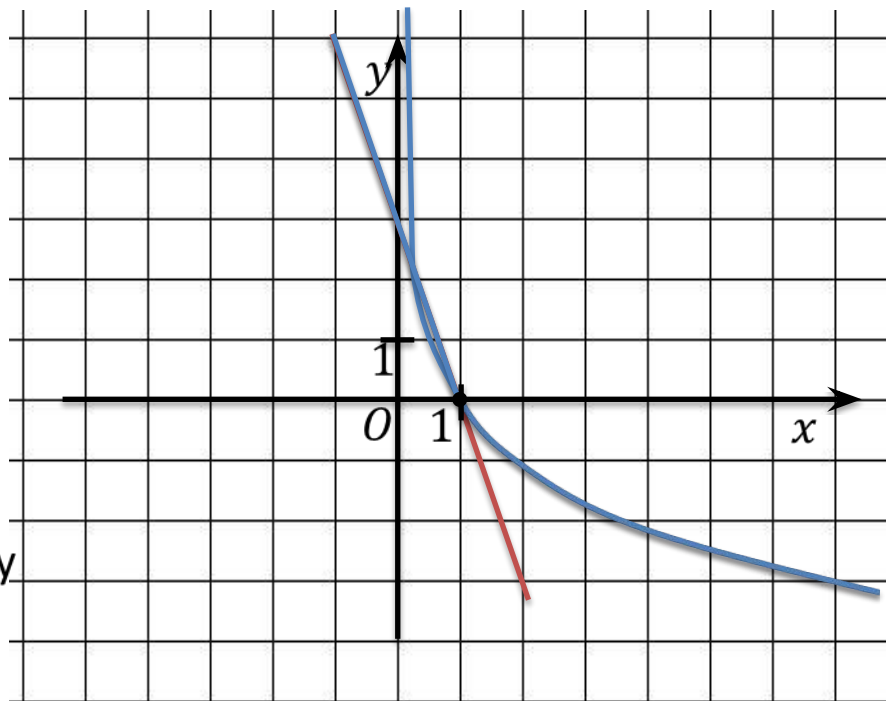
Пример:

Построить и прочесть график функции

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 3, & \text{при } x \leq 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x, & \text{при } x > 1 \end{cases}.$$

Решение:

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция убывает на R
5. функция не ограничена ни сверху, ни снизу
6. $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим}}$ – не существует
7. функция непрерывная на R
8. функция выпукла вниз при $x \in (1; +\infty)$



Пример:

Найти область определения функции $y = \log_6(4x - 1)$.

Решение:

$$4x - 1 > 0$$

$$4x > 1$$

$$x > \frac{1}{4}$$

$$x \in \left(\frac{1}{4}; +\infty \right)$$

Функцию вида $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **логарифмической функцией**.

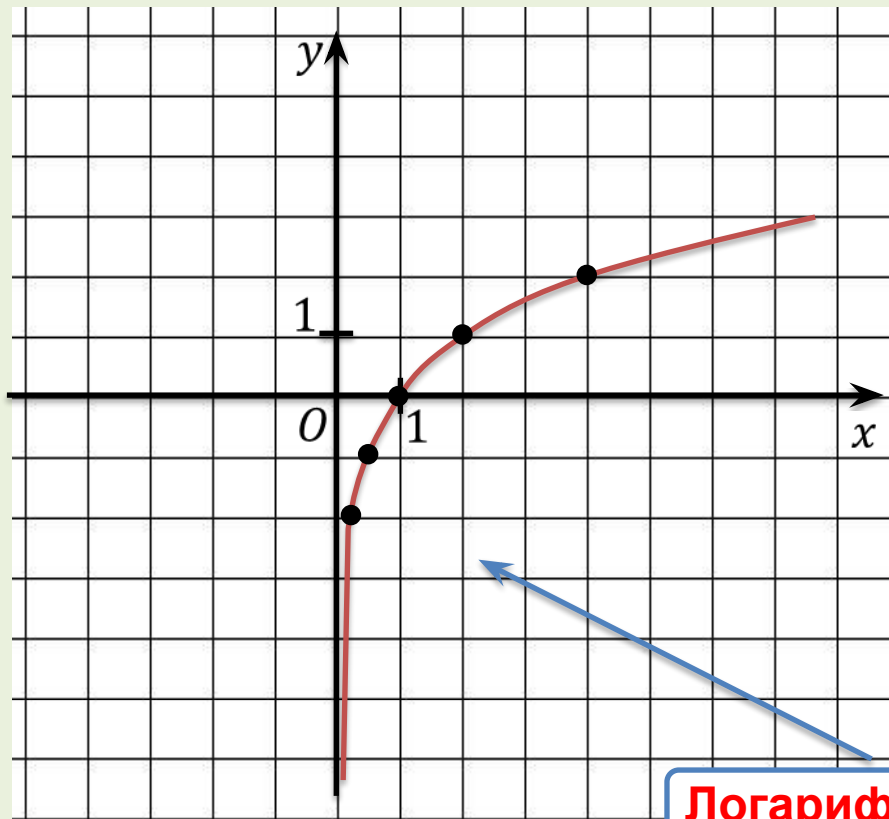
Возрастает

Убывает

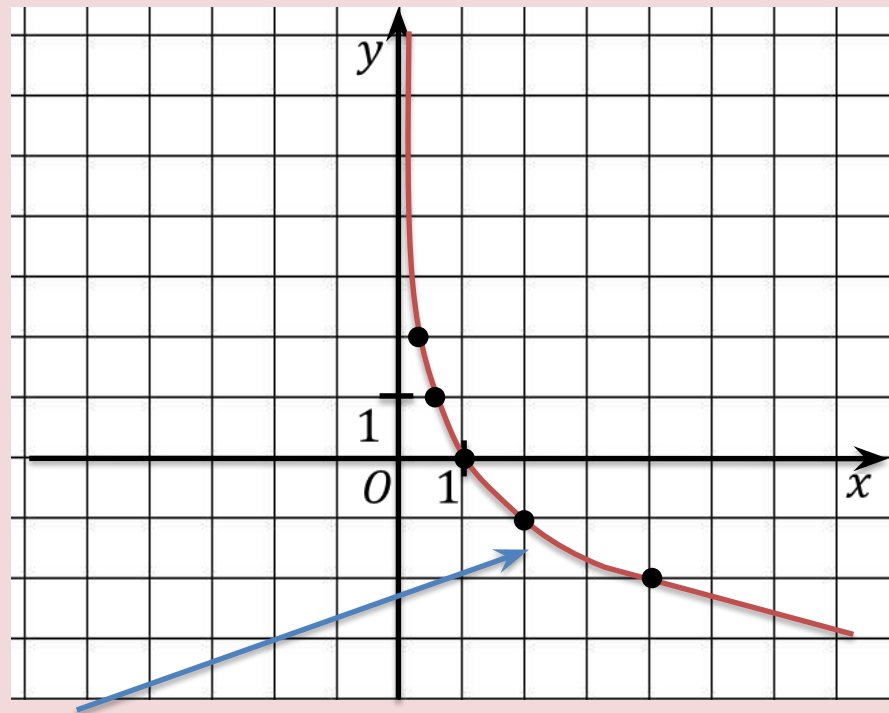
Непрерывна

Непрерывна

$$y = \log_a x, a > 1$$



$$y = \log_a x, 0 < a < 1$$



Логарифмическая
кривая