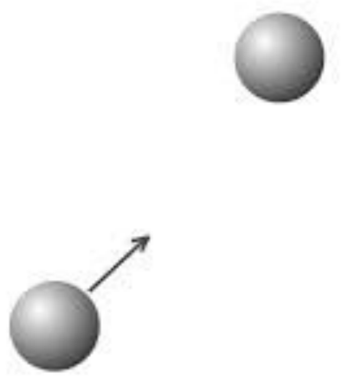
Лекция 18

Явления переноса в газах

Столкновения молекул

- В газовой среде могут иметь место неоднородности концентрации компонентов газовой смеси, скорости перемещения макроскопических масс вещества, температуры.
- Равновесие в газе устанавливается в результате столкновений между молекулами.
- Для этого достаточно, чтобы каждая молекула испытала одно-два столкновения.

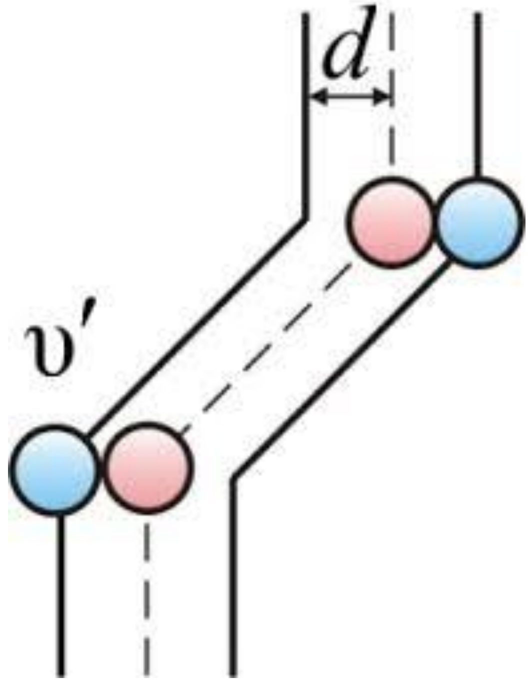


Столкновения молекул

- Для упрощения расчета предположим, что движется только одна молекула с постоянной скоростью v, а все остальные молекулы неподвижны.
- Будем называть движущуюся молекулу молекулой А. Вообразим, что с молекулой А жестко связана концентрическая с ней твердая сфера S вдвое большего диаметра.
- Назовем эту сферу сферой ограждения молекулы А. В момент столкновения расстояние между центрами сталкивающихся молекул равно диаметру молекулы d.

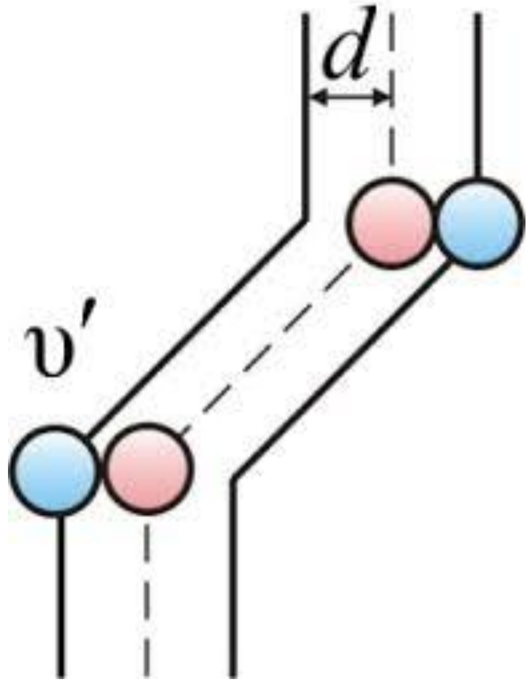
Столкновения молекул

- Между двумя последовательными столкновениями молекулы А ее сфера ограждения описывает цилиндр, длина которого и есть свободный пробег молекулы А. Из таких цилиндров складывается поверхность, описываемая с течением времени сферой ограждения
- Если центр другой молекулы лежит внутри или на боковой поверхности этого цилиндра, то она столкнется с молекулой А. В противном случае столкновения не произойдет.



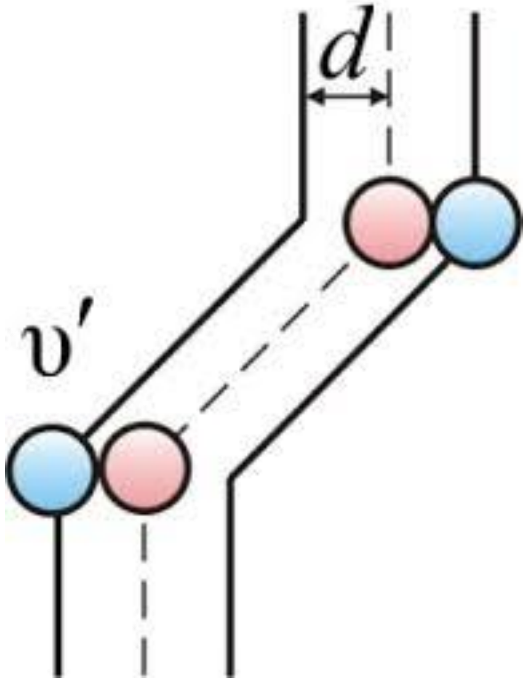
Столкновения молекул

- Пусть V – объем ломаного цилиндра, описываемого сферой S в единицу времени. Среднее число z столкновений движущейся молекулы с остальными молекулами в единицу времени равно среднему числу последних в объеме V,
  - $z = Vn$,
- где n – число молекул в единице объема.



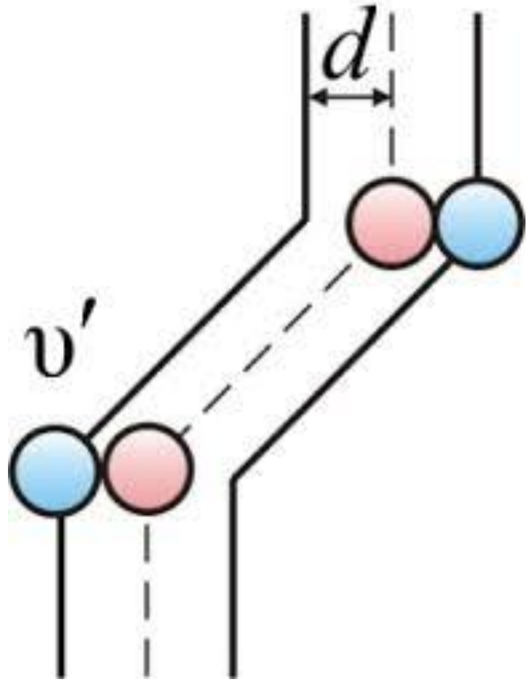
Столкновения молекул

- Тогда можно пренебречь теми частями объема , которые приходятся на изломы цилиндра,
- При вычислении V цилиндр можно считать прямым, а его высоту равной относительной скорости молекулы $< v_{\text{отн}} >$.
- В этом приближении, $V = \sigma v_{\text{отн}}$ где $\sigma = \pi d^2$ – площадь поперечного сечения цилиндра.
- Эту величину называют также газокинетическим сечением молекулы.



Длина свободного пробега

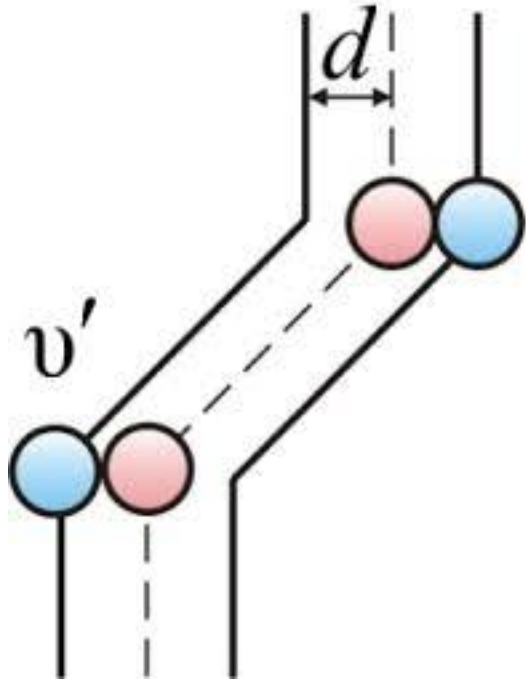
-
    - $z = n\sigma < v_{\text{отн}}>$
- Отсюда время *t*, которое молекула движется без столкновений равно
-
    - $t = \frac{1}{z} = \frac{1}{n\sigma\langle v_{\text{отн}}\rangle}$
- В течение этого времени молекула двигается со средней скоростью
-
    - $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$



Длина свободного пробега

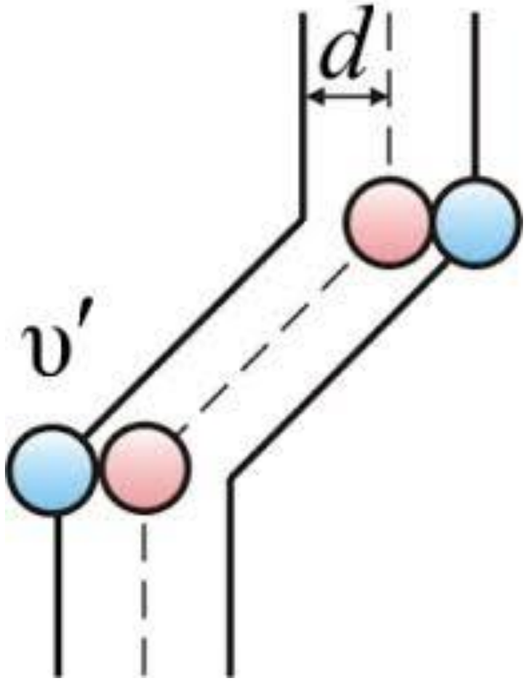
- Средняя длина свободного пробега равна
-
-

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{n\sigma \langle v_{\text{отн}} \rangle}$$



Длина свободного пробега

- Нам неизвестно значение средней относительной скорости молекул.
- Относительное движение сводится к движению тела приведенной массы μ



- $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$,

Средняя относительная скорость

- Чтобы получить распределение молекул по относительным скоростям, достаточно в распределении Максвелла по абсолютным скоростям заменить массу на приведенную массу.
- $dW(v_{\text{отн}}) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} v_{\text{отн}}^2 exp\left(-\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2kT}\right) dv_{\text{отн}}.$
  - В таком случае среднюю относительную скорость можно найти путем замены в массы на приведенную массу
-

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}$$

Длина свободного пробега

- Если газ состоит из молекул одного типа, то $\mu = m/2$. В таком случае средняя относительная скорость будет равна
-
- $\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2}\langle v \rangle,$
- и соответственно

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

Длина свободного пробега

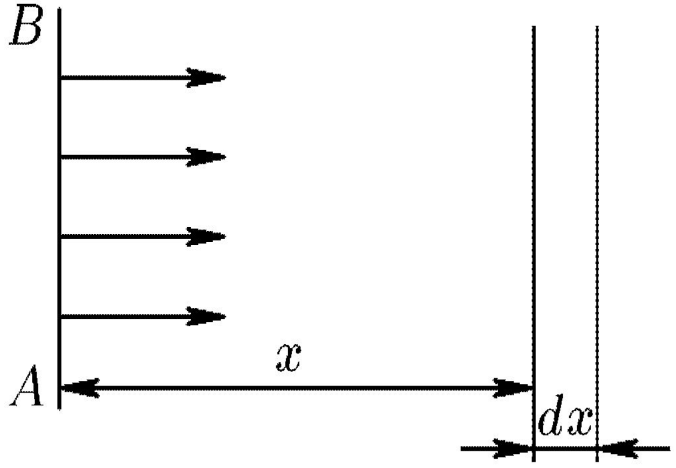
- Длина свободного пробега не зависит от температуры.
- Физический смысл этого явления можно понять, если вспомнить, что с повышением температуры увеличивается средняя скорость молекул.
- Они при этом быстрее двигаются, но и чаще сталкиваются, в итоге ничего не выигрывая в свободном пробеге.

Длина свободного пробега

- .В случае смеси двух газов с массой молекул m_1 и m_2, концентрациями n_1 и n_2 и газокинетическими сечениями σ_{11} – столкновения молекул первого типа друг с другом, σ_{22} – столкновения молекул второго типа и $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ – столкновения молекул разных типов, действуя аналогично, мы получим для средней длины пробега:
-
- Молекул первого типа $\langle\lambda_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma_{11}n_1 + \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}n_2\sigma_{12}}.$
-
- Молекул второго типа $\langle\lambda_2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma_{22}n_2 + \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}n_1\sigma_{12}}.$

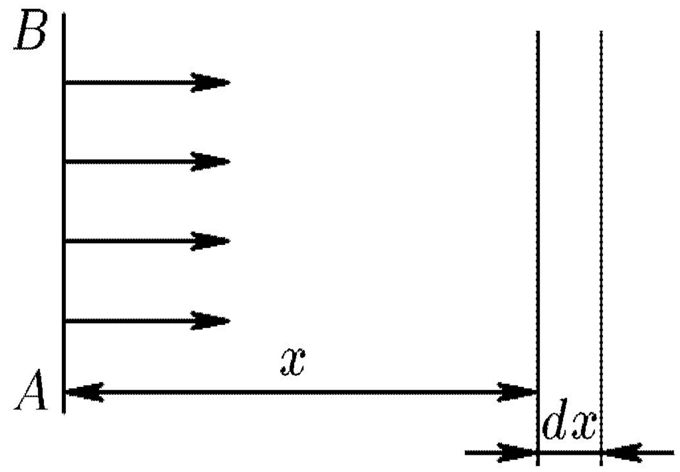
Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Допустим, что в газе распространяется параллельный пучок молекул.
- Пусть *Jo* — интенсивность пучка, когда он пересекает плоскость *AB*, перпендикулярную к нему.
- Найдем интенсивность *J* того же пучка на расстоянии *x* от плоскости *AB*.



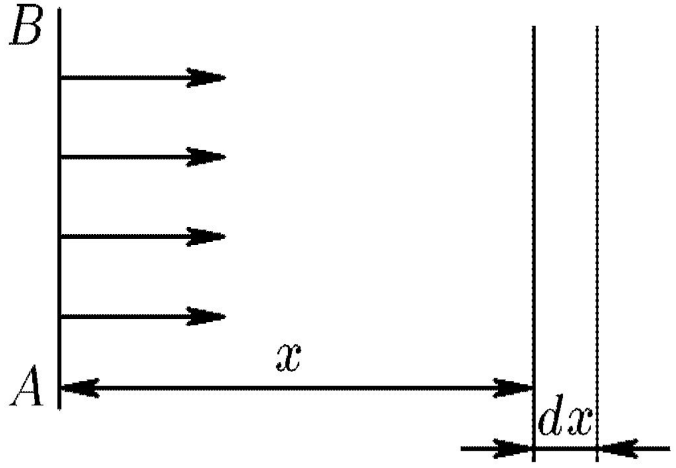
Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Возьмем бесконечно тонкий слой газа с толщиной dx и площадью поперечного сечения $S = 1$.
- Число молекул газа в нем равно $nSdx = ndx$.
- Среднее число частиц, выбывающих из пучка из-за столкновений с одной молекулой газа, равно $J\sigma$,
- из-за столкновений с ndx молекулами
- $dN = J\sigma ndx = (J/\lambda)dx$. На такую величину уменьшится интенсивность пучка после прохождения слоя dx



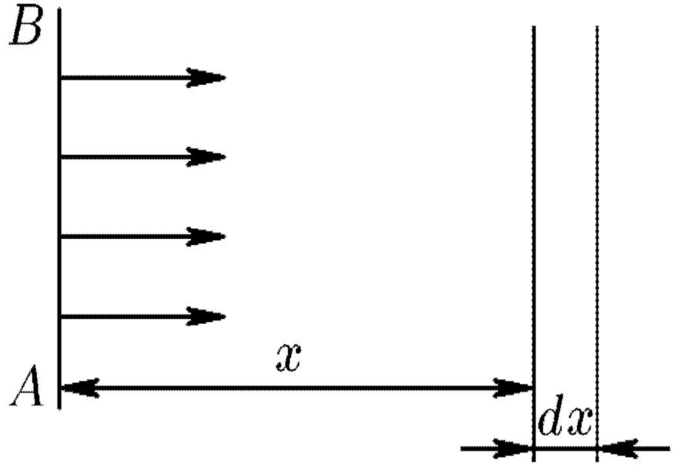
Рассеяние молекулярного пучка в газе

-
    - $dJ = -\frac{J}{\lambda}dx.$
- Интегрирование этого выражения дает
-
    - $J = J_0 exp(-x/\lambda).$
- Из-за рассеяния интенсивность пучка убывает экспоненциально.
- В связи с этим величину $1/\lambda$ называют коэффициентом рассеяния.



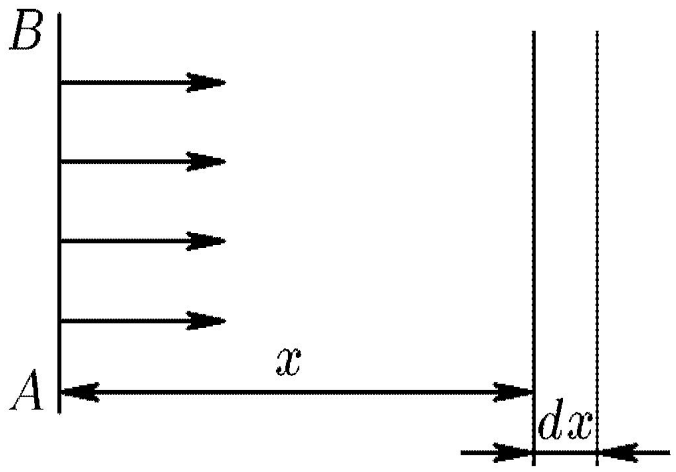
Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Если N_0 – число частиц, прошедших через площадку AB, то число частиц, прошедших без столкновения расстояние x, определяется выражением
-
- $N = N_0 exp(-x/\lambda)$.



Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Число частиц, претерпевших столкновение в слое (x, $x + dx$), равно
-
- $|dN| = \frac{1}{\lambda} N_0 exp(-x/\lambda)dx.$
-
- Средний путь, пройденный частицами без столкновений,
-
- $\langle x \rangle = \frac{1}{N_0} \int x|dN| = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty x exp(-{}^x/_\lambda)dx = \lambda$
- Он совпадает с длиной свободного пробега λ.

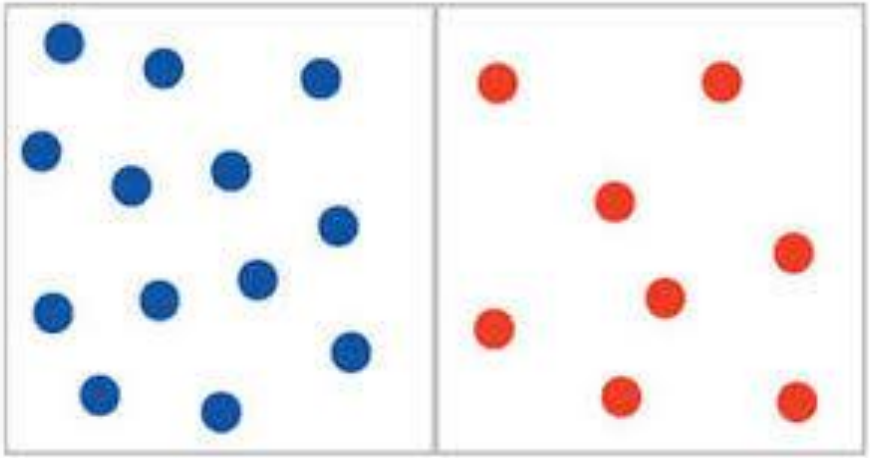


Принцип локального равновесия

- Принцип (или гипотезы) локального равновесия, который состоит в следующем. Как уже говорилось, в результате столкновений молекул друг с другом устанавливается равновесное распределение их по скоростям поступательного движения. Причем достаточно, чтобы каждая из молекул испытала одно-два соударения. В принципе локального равновесия предполагается, что все молекулы, попавшие в объем, размеры которого порядка $<\lambda>$, испытают в нем соударения и что в этом малом объеме устанавливается локальное равновесие с некоторой температурой, плотностью и т. д. В другом подобном объеме также устанавливается равновесное состояние, но по другим по величине параметрами. Таким образом, каждой точке пространства можно приписать свои локальные параметры.

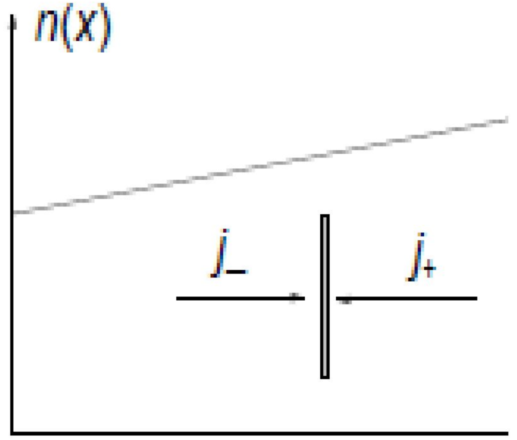
Диффузия

- Допустим, что закрытая горизонтальная труба разделена на две части перегородкой. По одну сторону перегородки находится какой-то газ 1, а по другую – газ 2.
- Пусть давления и температуры обоих газов одинаковы. Если удалить перегородку, то газы начнут перемешиваться. Причиной этого является хаотическое тепловое движение молекул. Спустя некоторое время концентрации компонентов смеси станут одинаковыми по обе стороны перегородки.
- Такое проникновение молекул одного газа в среду молекул другого газа называется взаимной, или концентрационной диффузией газов.
- Если газы по обе стороны перегородки тождественны, то диффузия также будет происходить. В этом случае она называется самодиффузией.



Диффузия

- Рассмотрим случай, когда в газе есть примесь другого газа. Общее давление везде одинаково, а концентрация примеси $n(x)$ меняется вдоль оси x .
- Выделим перпендикулярную этой оси единичную площадку. Потоки молекул в единицу времени с одной и другой стороны пропорциональны концентрациям в элементах объема, находящихся на расстояниях, отстоящих примерно на величину свободного пробега слева и справа от площадки.
- Будем приближенно считать, что по направлению к площадке двигаются 1/6 часть молекул с одинаковой скоростью равной средней скорости молекул примеси.



Диффузия

- В таком случае потоки можно выразить следующим образом:
-
  - $j_- \approx \frac{1}{6}\langle v\rangle n(x-\lambda),\ j_+ \approx \frac{1}{6}\langle v\rangle n(x+\lambda),\ \ j_- \neq j_+.$
- Результирующий поток есть сумма этих потоков
-

$$j = j_- - j_+ = \frac{1}{6}\langle v\rangle[n(x-\lambda) - n(x+\lambda)] = -\frac{1}{6}\langle v\rangle\left[2\lambda\frac{dn}{dx}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda\frac{dn}{dx} = -D\frac{dn}{dx}$$

Диффузия

- Величина
-

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda$$

-
- называется коэффициентом диффузии.
- Диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации. Это закон Фика.

Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- Пусть на частицы (они могут быть как макроскопическими, так и молекулярных размеров) действует постоянная сила $\vec{F}$
- В результате частица участвует в хаотическом тепловом движении и одновременно под действием силы $\vec{F}$ приобретает скорость $\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} t$ регулярного движения в сторону действия этой силы.
- После усреднения по временам пробега получаем
- $\langle \overrightarrow{v_0} \rangle = \frac{\langle \tau \rangle \vec{F}}{m} = B\vec{F},$
- где $\langle \tau \rangle$ – среднее время пробега между столкновениями. Коэффициент пропорциональности B называется подвижностью молекулы.

Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- В поле силы $\vec{F}$ частица обладает потенциальной энергией $U(x) = -Fx$ (ось x направлена в сторону действующей силы). Если состояние стационарное и температура постоянна, то концентрация частиц меняется в пространстве в соответствии с формулой Больцмана
  - $n = n_0 exp(-U(x)/kT) = n_0 exp(-Fx/kT).$
- Из-за действия силы возникает поток, величина которого ей пропорциональна Также эта величина пропорциональна плотности,

$$j_F = n\langle v\rangle = BFn,$$

- .

Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

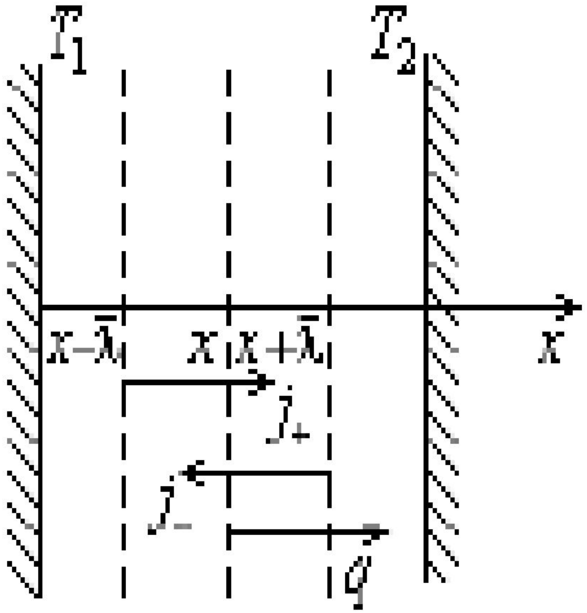
- С другой стороны, из-за градиента концентрации имеется направленный противоположно диффузионный поток
-
  - $j_D = -D\frac{dn}{dx}.$
-
- В состоянии равновесия суммарный поток частиц равен нулю
-
  - $j_F + j_D = BFn - D\frac{dn}{dx} = 0.$

Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- Используя выражение для концентрации n, задаваемое распределением Больцмана из последнего равенства получим соотношение, связывающее коэффициент диффузии и подвижность частиц:
-
- $D = kTB.$
- Оно было установлено Эйнштейном и носит его имя.

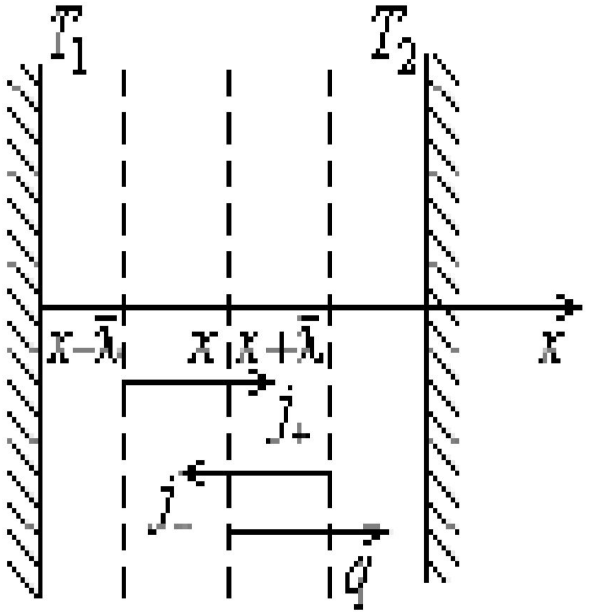
Теплопроводность

- Если между двумя стенками, имеющими разные температуры, находится слой газа, то через этот газ осуществляется перенос тепла от горячей стенки к холодной ($T_1 > T_2$,).
- Будем считать, что длина свободного пробега много меньше расстояния *h* между стенками.
- Требуется найти поток тепла *q* через единичную площадку с координатой *x* в сечении, параллельном стенкам.



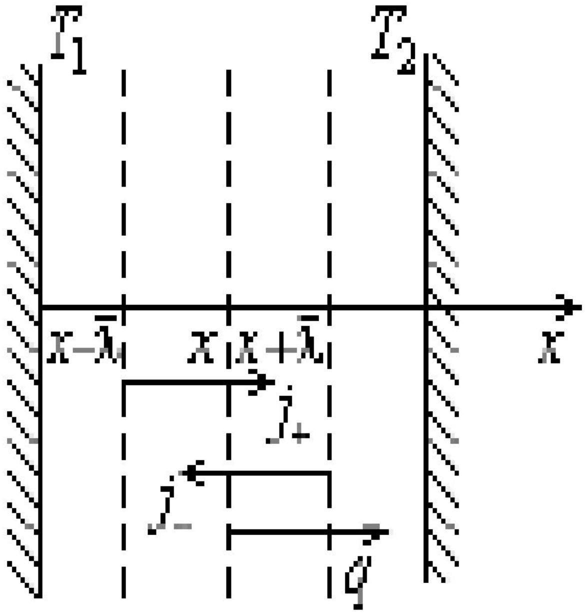
Теплопроводность

- Слева и справа через это сечение проходят потоки частиц *j*+ и *j*–. Так как пространство замкнуто, то в стационарных условиях эти потоки равны $j_+ = j_- = j$. Вместе с тем частицы, пересекающие сечение слева, имеют более высокую температуру, чем частицы, пересекающие сечение справа, в результате чего через сечение осуществляется перенос энергии.



Теплопроводность

- Каждая молекула переносит среднее количество тепла, равное $\frac{c_V T}{N_A}$ (c_V - молярная теплоемкость, *NA* - число Авогадро). Таким образом, поток энергии через единицу площади сечения с координатой *x* равен
-
- $q = \langle\varepsilon\rangle(x-\lambda)j_+ - \langle\varepsilon\rangle(x+\lambda)j_- = \frac{jc_V}{N_A}\left(T(x-\lambda) - T(x+\lambda)\right)$



Теплопроводность

Поскольку λ мало, это выражение в скобках можно разложить по этому параметру малости, сохранив только первый член:

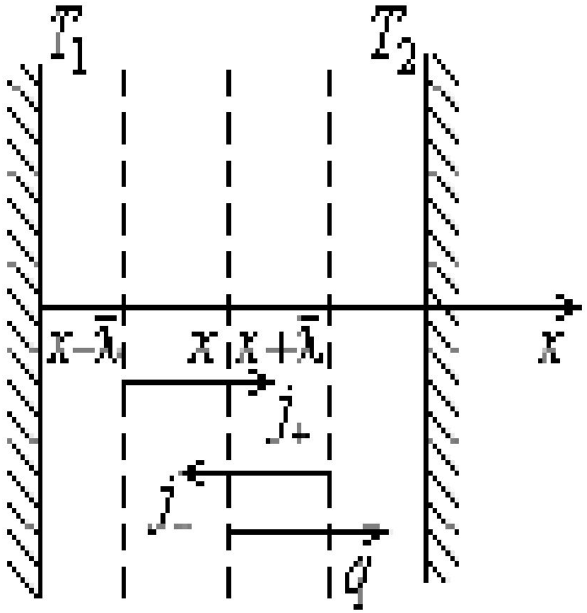
$$q = -2\frac{j\lambda c_V}{N_A}\frac{dT}{dx}.$$

Как и при определении диффузионных потоков будем приближенно считать, что $j = \frac{n\langle v\rangle}{6}$. Тогда получим

$$q = -\frac{1}{3}\frac{nc_V}{N_A}\lambda < v > \frac{dT}{dx} = -\kappa\frac{dT}{dx},$$

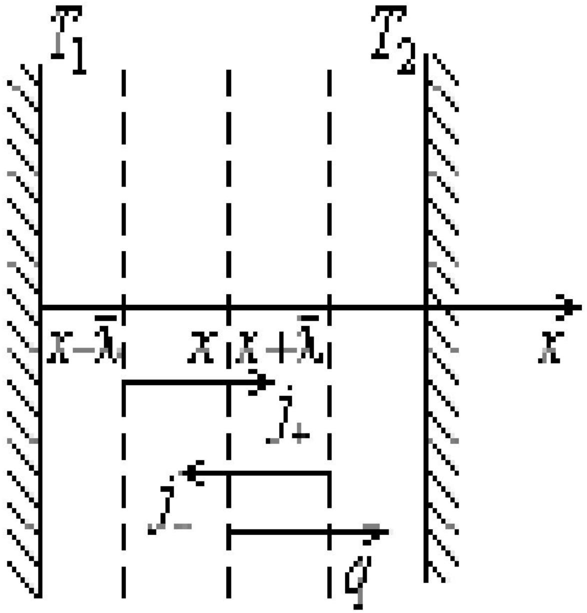
где κ- коэффициент теплопроводности:

$$\kappa = \frac{1}{3}\frac{nc_V}{N_A}\lambda < v >.$$



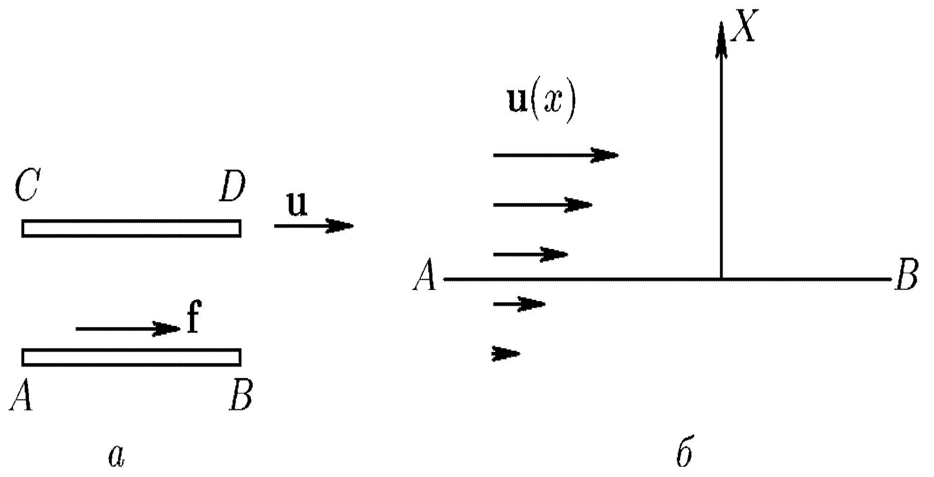
Теплопроводность

- Поток тепла пропорционален градиенту температуры и направлен против него.
- Этот факт был установлен экспериментально и назван законом Фурье.
-



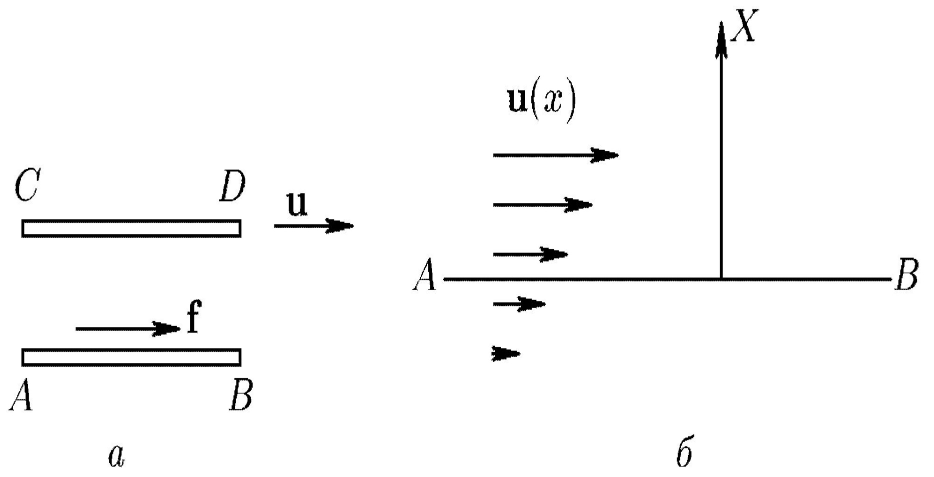
Вязкость газа

- Между двумя параллельными пластинками *AB* и *CD*) находится воздух или другой газ. При движении пластинки *CD* появляется сила, действующая на пластинку *AB* и направленная в сторону движения. Эта сила и есть сила вязкости.



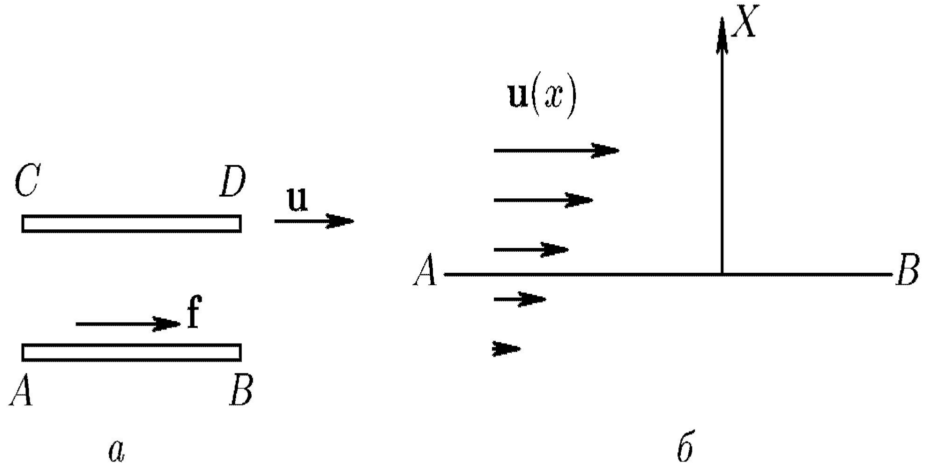
Вязкость газа

- Будем представлять себе газ неограниченным и движущимся стационарно плоскопараллельными слоями в горизонтальном направлении. Скорость этого макроскопического движения *u* меняется в направлении, перпендикулярном к слоям. Это направление мы примем за ось *X* Таким образом, мы предполагаем, что *u* = *u*(*x*).



Вязкость газа

- При наличии упорядоченного движения газа средняя скорость молекулы не нуль, а равна $u = u(x)$. С этой скоростью связано количество движения mu, которым обладает рассматриваемая молекула. Такое количество движения условимся называть упорядоченным.
- Молекулы, лежащие над плоскостью A B, обладают большим упорядоченным количеством движения, чем молекулы, расположенные под ней.
- Переходя из пространства над плоскостью MN в пространство под ней, молекулы передают часть своего упорядоченного количества движения молекулам, с которыми они сталкиваются в пространстве ниже плоскости MN.



Вязкость газа

- Количественное рассмотрение вязкости аналогично рассмотрению задач диффузии и теплопроводности. Только в этом случае происходит перенос импульса. Теперь вместо $\frac{c_V}{N_A}$ в надо использовать m, а вместо $T(x)$ надо использовать $u(x)$.
- Тогда для силы напряжения трения Π (силы трения, действующей на единичную площадку в сечении между слоями) получаем
-
  - $\Pi = -\eta \frac{du}{dx}, \qquad \eta = \frac{1}{3} mn\langle v\rangle\lambda,$
- где η – коэффициент вязкости.
-

Вязкость газа

- Так как λ обратно пропорциональна *n*, то отсюда следует, что вязкость и теплопроводность не зависят от плотности газа. К такому выводу впервые пришел Максвелл, и этот вывод показался ему парадоксальным. Однако опыты, поставленные самим Максвеллом и другими физиками, подтвердили указанный вывод.

Вязкость газа

- Независимость вязкости и теплопроводности от плотности газа имеет простое объяснение. Если плотность газа велика, то в переносе импульса и энергии участвует много молекул. Однако передача импульса и энергии за время между двумя последовательными столкновениями производится малыми порциями и на малые расстояния. Если же плотность мала, то уменьшается и число молекул, участвующих в переносе. Но это уменьшение полностью компенсируется тем, что теперь молекулы переносят импульс и энергию более крупными порциями и на большие расстояния.

Явления в разреженных газах

- Если средняя длина свободного пробега λ того же порядка, что и характерный линейный размер сосуда d, в котором заключен газ, или больше, то состояние газа называют вакуумом. Воздух в комнате, например, при атмосферном давлении в состоянии вакуума не находится, так как в этом случае $\lambda \sim 10^{-5}$ см. Однако в сосуде, линейные размеры которого меньше 10^{-5} см (поры дерева и многих других пористых тел), тот же воздух уже находится в условиях вакуума.

Явления в разреженных газах

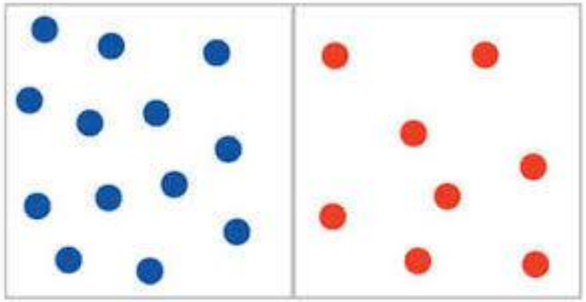
- Различают три вида вакуума:
- 1) низкий, когда λ меньше характерного размера сосуда d, но приближается к нему;
- 2) средний, когда λ сравнима с d,
- 3) высокий (или глубокий), когда λ значительно больше d.
- Газ в состоянии высокого вакуума называется ультраразреженным.

Явления в разреженных газах

- В плотных газах $\lambda \ll d$. В этих случаях столкновения между молекулами самого газа играют основную роль в его поведении. Только такие случаи и имелись в виду во всем предшествующем изложении.
- В другом предельном случае, когда газ становится ультраразреженным, столкновения между самими молекулами относительно редки и перестают играть заметную роль.
- Основную роль в этом случае играют столкновения молекул со стенками сосуда.

Явления в разреженных газах

- Пусть сосуд разделен перегородкой на две части А и В. Часть А заполнена газом, в части В газа нет. Выделим мысленно на поверхности перегородки площадку *s*. Число молекул, ежесекундно ударяющихся об эту площадку, определяется формулой
-
  - $N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle s = ns\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = C\frac{P_s}{\sqrt{mT}},$
-
- где *C* – постоянная, равная $\sqrt{1/2\pi k}$.
- Проделаем теперь в перегородке отверстие, площадь которого равна s.



Явления в разреженных газах

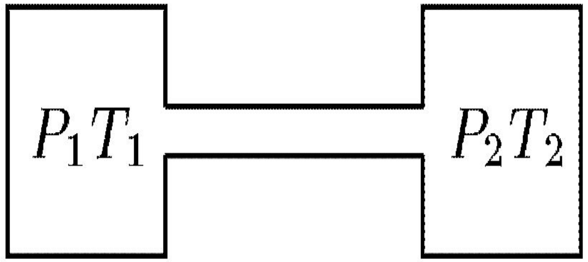
- Поток молекул газа через отверстие в стенке называется эффузионным потоком, если размеры отверстия и толщина стенки малы по сравнению с длиной свободного пробега λ.
- Допустим теперь, что по разные стороны перегородки находится один и тот же газ, но при разных давлениях и температурах. Если газ находится в состоянии высокого вакуума, то возникнут два эффузионных потока: из A в B и из B в A

Явления в разреженных газах

- Ввиду отсутствия столкновений между молекулами эти два потока совершенно независимы друг от друга. Поэтому количество молекул, ежесекундно проходящих через отверстие s из A в B, определится выражением
-
- $$N = \frac{C_s}{\sqrt{m}}\left(\frac{P_A}{\sqrt{T_A}} - \frac{P_B}{\sqrt{T_B}}\right),$$
- где P_A, P_B, T_A, T_B – давления и температуры газа в A и B. В состоянии равновесия, когда средние числа молекул в A и B остаются неизменными, должно быть $N = 0$, т. е.
-
- $$\frac{P_A}{\sqrt{T_A}} = \frac{P_B}{\sqrt{T_B}}.$$

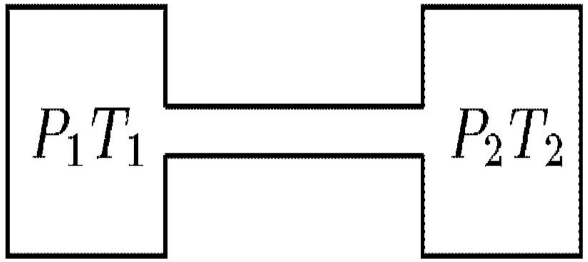
Явления в разреженных газах

- Пусть два сосуда 1 и 2 соединены между собой трубкой и поддерживаются при разных температурах T_1 и T_2.
- Когда поперечное сечение трубки очень велико по сравнению с длиной свободного пробега,
- Условие равновесия носит гидродинамический характер: должны быть равны давления P_1 и P_2 в обоих сосудах. В противоположном случае, когда длина свободного пробега очень велика по сравнению с поперечными размерами трубки, гидродинамический подход неприменим.



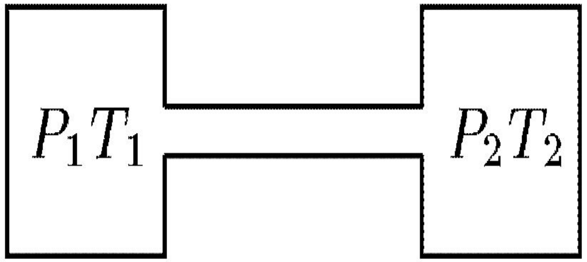
Явления в разреженных газах

- Условие равновесия требует, чтобы среднее число частиц газа, проходящих через трубку в одном направлении, было равно среднему числу частиц, проходящих в противоположном направлении. Это условие приводит к соотношению
  - $$\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}.$$
- Следовательно, если температуры T_1 и T_2 различны, то при равновесии будут различны и давления P_1 и P_2.



Явления в разреженных газах

- Допустим теперь, что сосуд разделен пористой перегородкой на две части, поддерживаемые при разных температурах T_1 и T_2. Пусть размеры пор малы по сравнению с длиной свободного пробега.
- Тогда, если первоначальные давления P_1 и P_2 были равны, то газ начнет перетекать в направлении от более низкой к более высокой температуре. Это явление называется тепловой диффузией или эффектом Кнудсена.



До следующей лекции