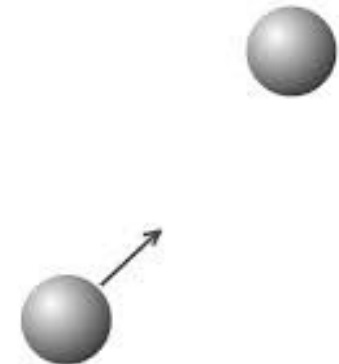


Лекция 18

Явления переноса в газах

Столкновения молекул

- В газовой среде могут иметь место неоднородности концентрации компонентов газовой смеси, скорости перемещения макроскопических масс вещества, температуры.
- Равновесие в газе устанавливается в результате столкновений между молекулами.
- Для этого достаточно, чтобы каждая молекула испытала одно-два столкновения.

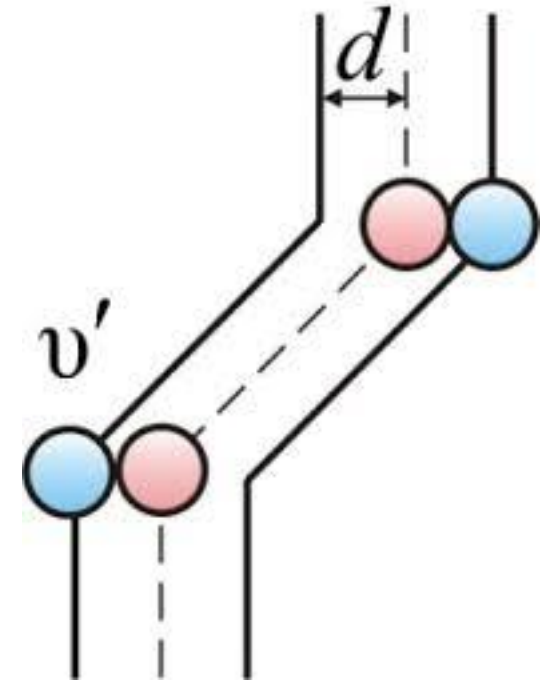


Столкновения молекул

- Для упрощения расчета предположим, что движется только одна молекула с постоянной скоростью v , а все остальные молекулы неподвижны.
- Будем называть движущуюся молекулу молекулой А. Вообразим, что с молекулой А жестко связана концентрическая с ней твердая сфера S вдвое большего диаметра.
- Назовем эту сферу сферой ограждения молекулы А. В момент столкновения расстояние между центрами сталкивающихся молекул равно диаметру молекулы d .

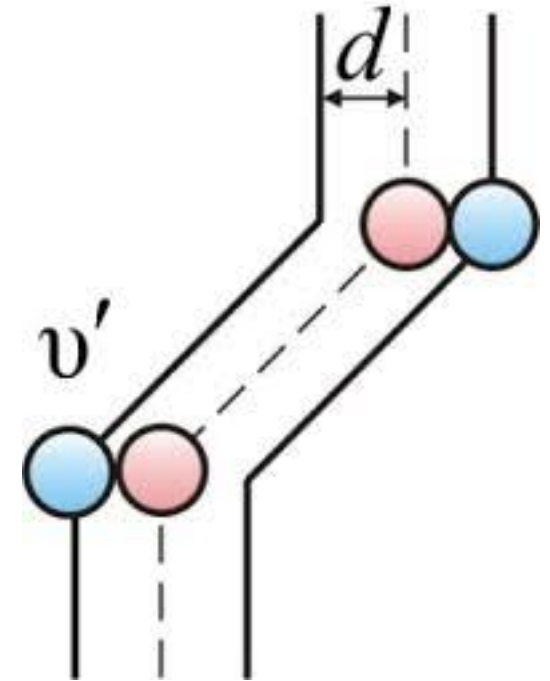
Столкновения молекул

- Между двумя последовательными столкновениями молекулы А ее сфера ограждения описывает цилиндр, длина которого и есть свободный пробег молекулы А. Из таких цилиндров складывается поверхность, описываемая с течением времени сферой ограждения
- Если центр другой молекулы лежит внутри или на боковой поверхности этого цилиндра, то она столкнется с молекулой А. В противном случае столкновения не произойдет.



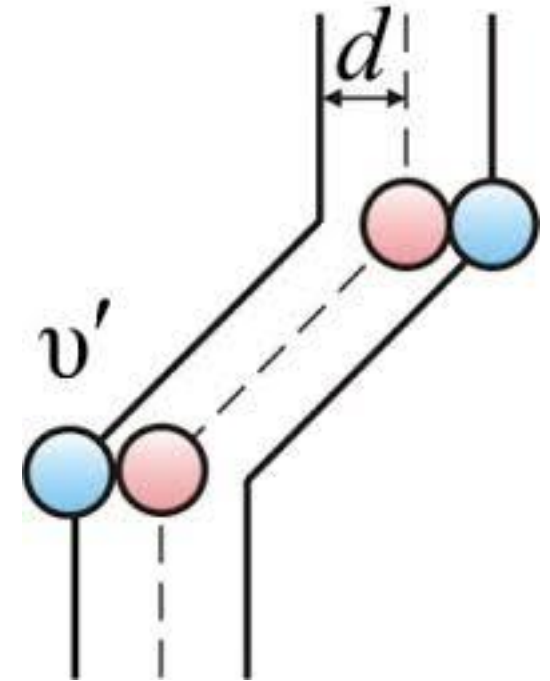
Столкновения молекул

- Пусть V – объем ломаного цилиндра, описываемого сферой S в единицу времени. Среднее число z столкновений движущейся молекулы с остальными молекулами в единицу времени равно среднему числу последних в объеме V ,
 - $z = Vn$,
- где n – число молекул в единице объема.



Столкновения молекул

- Тогда можно пренебречь теми частями объема, которые приходятся на изломы цилиндра,
- При вычислении V цилиндр можно считать прямым, а его высоту равной относительной скорости молекулы $\langle v_{\text{отн}} \rangle$.
- В этом приближении, $V = \sigma v_{\text{отн}}$ где $\sigma = \pi d^2$ – площадь поперечного сечения цилиндра.
- Эту величину называют также газокинетическим сечением молекулы.



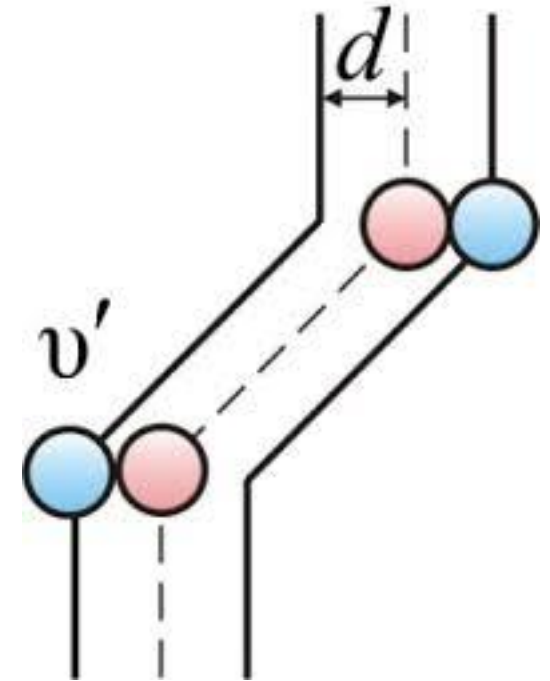
Длина свободного пробега

- $z = n\sigma \langle v_{\text{отн}} \rangle$
- Отсюда время t , которое молекула движется без столкновений равно

$$\bullet t = \frac{1}{z} = \frac{1}{n\sigma \langle v_{\text{отн}} \rangle}$$

- В течение этого времени молекула движется со средней скоростью

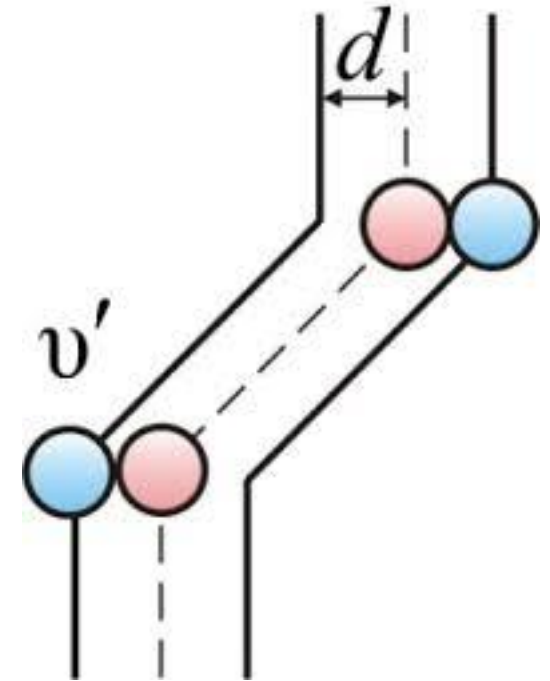
$$\bullet \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$



Длина свободного пробега

- Средняя длина свободного пробега равна
-
-

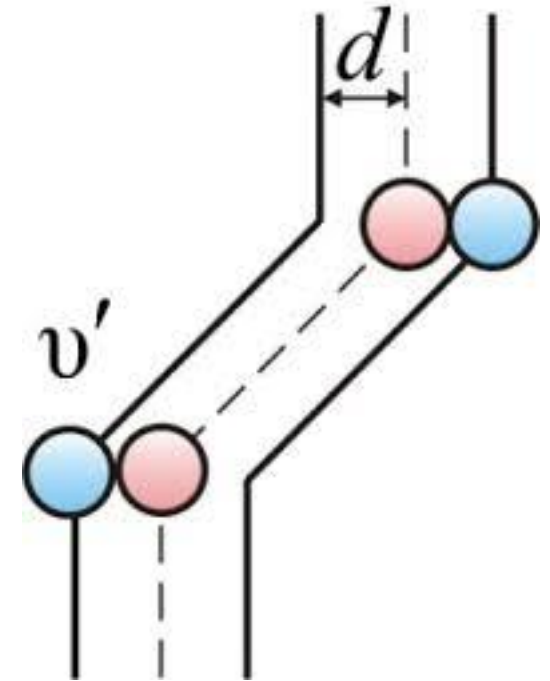
$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{n\sigma \langle v_{\text{отн}} \rangle}$$



Длина свободного пробега

- Нам неизвестно значение средней относительной скорости молекул.
- Относительное движение сводится к движению тела приведенной массы μ

- $$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$



Средняя относительная скорость

- Чтобы получить распределение молекул по относительным скоростям, достаточно в распределении Максвелла по абсолютным скоростям заменить массу на приведенную массу.
- $dW(v_{\text{отн}}) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} v_{\text{отн}}^2 \exp\left(-\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2kT}\right) dv_{\text{отн}}$.
- В таком случае среднюю относительную скорость можно найти путем замены в массы на приведенную массу

•

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}$$

Длина свободного пробега

- Если газ состоит из молекул одного типа, то $\mu = m/2$. В таком случае средняя относительная скорость будет равна

-

- $\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle,$

- и соответственно

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

Длина свободного пробега

- Длина свободного пробега не зависит от температуры.
- Физический смысл этого явления можно понять, если вспомнить, что с повышением температуры увеличивается средняя скорость молекул.
- Они при этом быстрее двигаются, но и чаще сталкиваются, в итоге ничего не выигрывая в свободном пробеге.

Длина свободного пробега

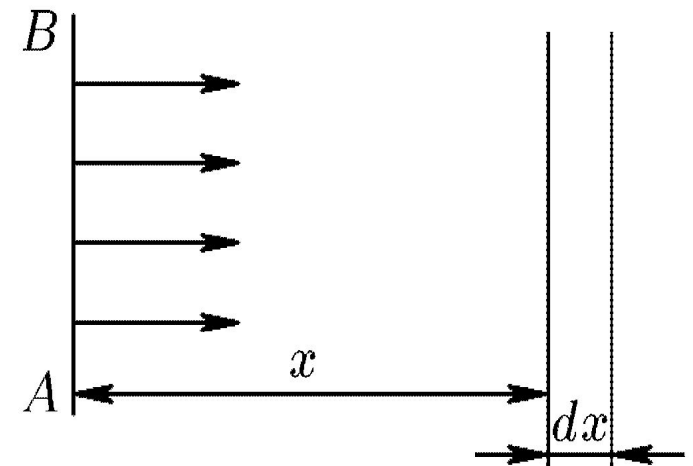
- В случае смеси двух газов с массой молекул m_1 и m_2 , концентрациями n_1 и n_2 и газокинетическими сечениями σ_{11} – столкновения молекул первого типа друг с другом, σ_{22} – столкновения молекул второго типа и $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ – столкновения молекул разных типов, действуя аналогично, мы получим для средней длины пробега:

- Молекул первого типа
$$\langle \lambda_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{11}n_1 + \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}n_2\sigma_{12}}.$$

- Молекул второго типа
$$\langle \lambda_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{22}n_2 + \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}n_1\sigma_{12}}.$$

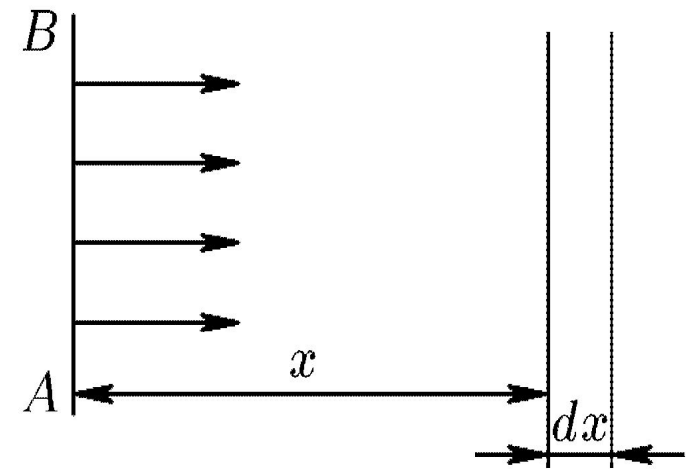
Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Допустим, что в газе распространяется параллельный пучок молекул.
- Пусть J_0 — интенсивность пучка, когда он пересекает плоскость AB , перпендикулярную к нему.
- Найдем интенсивность J того же пучка на расстоянии x от плоскости AB .



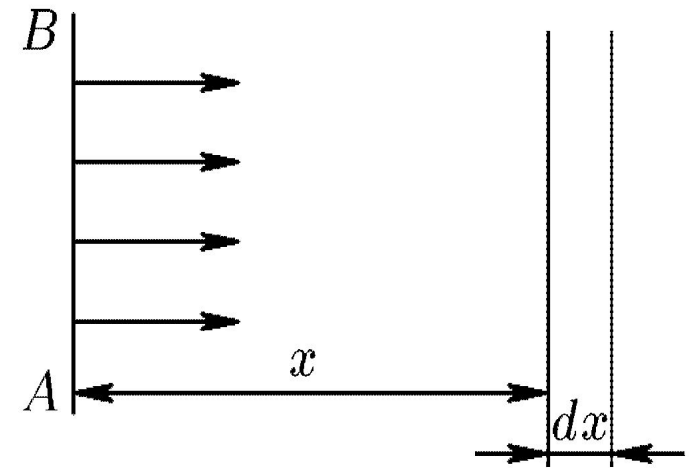
Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Возьмем бесконечно тонкий слой газа с толщиной dx и площадью поперечного сечения $S = 1$.
- Число молекул газа в нем равно $nSdx = ndx$.
- Среднее число частиц, выбывающих из пучка из-за столкновений с одной молекулой газа, равно $J\sigma$,
- из-за столкновений с ndx молекулами
- $dN = J\sigma ndx = (J/\lambda)dx$. На такую величину уменьшится интенсивность пучка после прохождения слоя dx



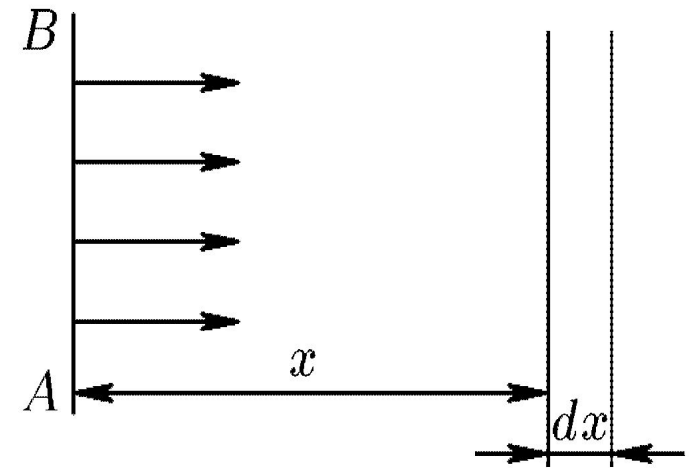
Рассеяние молекулярного пучка в газе

- $dJ = -\frac{J}{\lambda} dx.$
- Интегрирование этого выражения дает
- $J = J_0 \exp(-x/\lambda).$
- Из-за рассеяния интенсивность пучка убывает экспоненциально.
- В связи с этим величину $1/\lambda$ называют коэффициентом рассеяния.



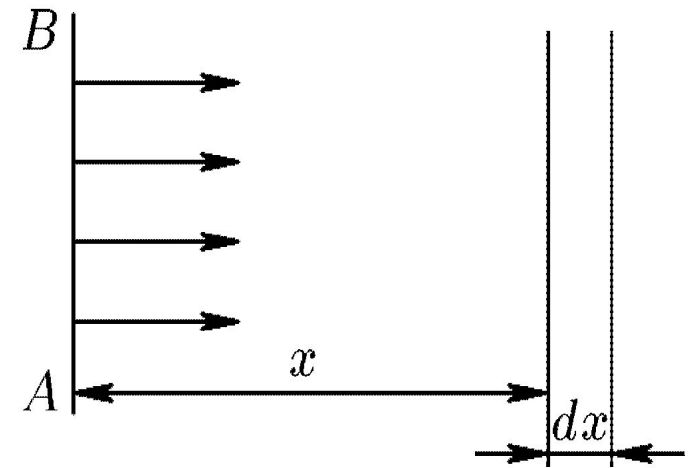
Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Если N_0 – число частиц, прошедших через площадку AB , то число частиц, прошедших без столкновения расстояние x , определяется выражением
-
- $N = N_0 \exp(-x/\lambda)$.



Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Число частиц, претерпевших столкновение в слое $(x, x + dx)$, равно
-
- $|dN| = \frac{1}{\lambda} N_0 \exp(-x/\lambda) dx.$
-
- Средний путь, пройденный частицами без столкновений,
-
- $\langle x \rangle = \frac{1}{N_0} \int x |dN| = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x \exp(-x/\lambda) dx = \lambda$
- Он совпадает с длиной свободного пробега λ .

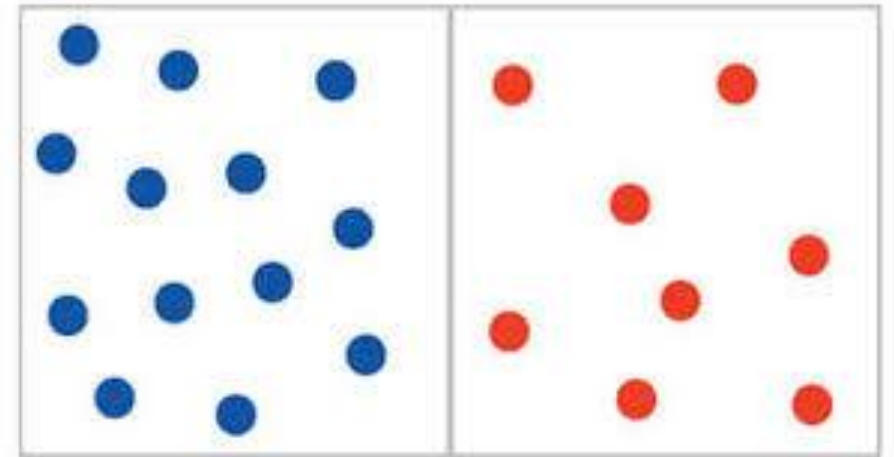


Принцип локального равновесия

- Принцип (или гипотезы) локального равновесия, который состоит в следующем. Как уже говорилось, в результате столкновений молекул друг с другом устанавливается равновесное распределение их по скоростям поступательного движения. Причем достаточно, чтобы каждая из молекул испытала одно-два соударения. В принципе локального равновесия предполагается, что все молекулы, попавшие в объем, размеры которого порядка $\langle \lambda \rangle$, испытают в нем соударения и что в этом малом объеме устанавливается локальное равновесие с некоторой температурой, плотностью и т. д. В другом подобном объеме также устанавливается равновесное состояние, но по другим по величине параметрами. Таким образом, каждой точке пространства можно приписать свои локальные параметры.

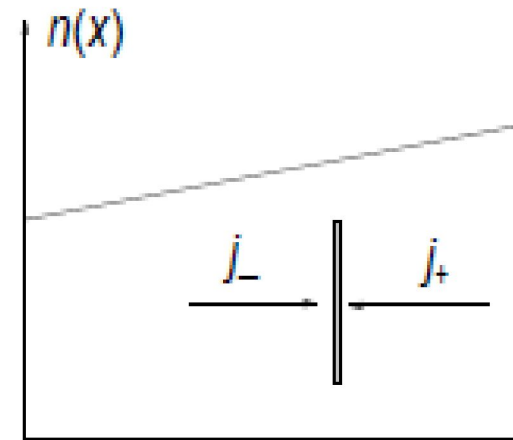
Диффузия

- Допустим, что закрытая горизонтальная труба разделена на две части перегородкой. По одну сторону перегородки находится какой-то газ 1, а по другую – газ 2.
- Пусть давления и температуры обоих газов одинаковы. Если удалить перегородку, то газы начнут перемешиваться. Причиной этого является хаотическое тепловое движение молекул. Спустя некоторое время концентрации компонентов смеси станут одинаковыми по обе стороны перегородки.
- Такое проникновение молекул одного газа в среду молекул другого газа называется взаимной, или концентрационной диффузией газов.
- Если газы по обе стороны перегородки тождественны, то диффузия также будет происходить. В этом случае она называется самодиффузией.



Диффузия

- Рассмотрим случай, когда в газе есть примесь другого газа. Общее давление везде одинаково, а концентрация примеси $n(x)$ меняется вдоль оси x .
- Выделим перпендикулярную этой оси единичную площадку. Потoki молекул в единицу времени с одной и другой стороны пропорциональны концентрациям в элементах объема, находящихся на расстояниях, отстоящих примерно на величину свободного пробега слева и справа от площадки.
- Будем приближенно считать, что по направлению к площадке двигаются $1/6$ часть молекул с одинаковой скоростью равной средней скорости молекул примеси.



Диффузия

- В таком случае потоки можно выразить следующим образом:

-

- $j_- \approx \frac{1}{6} \langle v \rangle n(x - \lambda), j_+ \approx \frac{1}{6} \langle v \rangle n(x + \lambda), j_- \neq j_+.$

- Результирующий поток есть сумма этих потоков

-

$$\begin{aligned} j = j_- - j_+ &= \frac{1}{6} \langle v \rangle [n(x - \lambda) - n(x + \lambda)] = -\frac{1}{6} \langle v \rangle \left[2\lambda \frac{dn}{dx} \right] \\ &= -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \frac{dn}{dx} = -D \frac{dn}{dx} \end{aligned}$$

Диффузия

- Величина

-

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda$$

-

- называется коэффициентом диффузии.
- Диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации.
Это закон Фика.

Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- Пусть на частицы (они могут быть как макроскопическими, так и молекулярных размеров) действует постоянная сила \vec{F}
- В результате частица участвует в хаотическом тепловом движении и одновременно под действием силы \vec{F} приобретает скорость $\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} t$ регулярного движения в сторону действия этой силы.
- После усреднения по временам пробега получаем
 - $\langle \vec{v}_0 \rangle = \frac{\langle \tau \rangle \vec{F}}{m} = B \vec{F},$
- где $\langle \tau \rangle$ – среднее время пробега между столкновениями. Коэффициент пропорциональности B называется подвижностью молекулы.

Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- В поле силы \vec{F} частица обладает потенциальной энергией $U(x) = -Fx$ (ось x направлена в сторону действующей силы). Если состояние стационарное и температура постоянна, то концентрация частиц меняется в пространстве в соответствии с формулой Больцмана

- $n = n_0 \exp(-U(x)/kT) = n_0 \exp(-Fx/kT)$.

- Из-за действия силы возникает поток, величина которого ей пропорциональна. Также эта величина пропорциональна плотности,

$$j_F = n\langle v \rangle = VFn,$$

- .

Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- С другой стороны, из-за градиента концентрации имеется направленный противоположно диффузионный поток

-

$$\bullet j_D = -D \frac{dn}{dx}.$$

-

- В состоянии равновесия суммарный поток частиц равен нулю

-

$$\bullet j_F + j_D = BF_n - D \frac{dn}{dx} = 0.$$

Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- Используя выражение для концентрации n , задаваемое распределением Больцмана из последнего равенства получим соотношение, связывающее коэффициент диффузии и подвижность частиц:

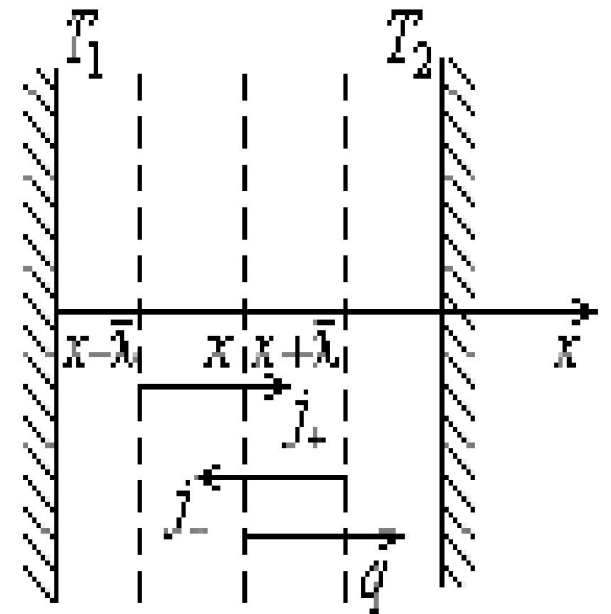
-

- $D = kTV.$

- Оно было установлено Эйнштейном и носит его имя.

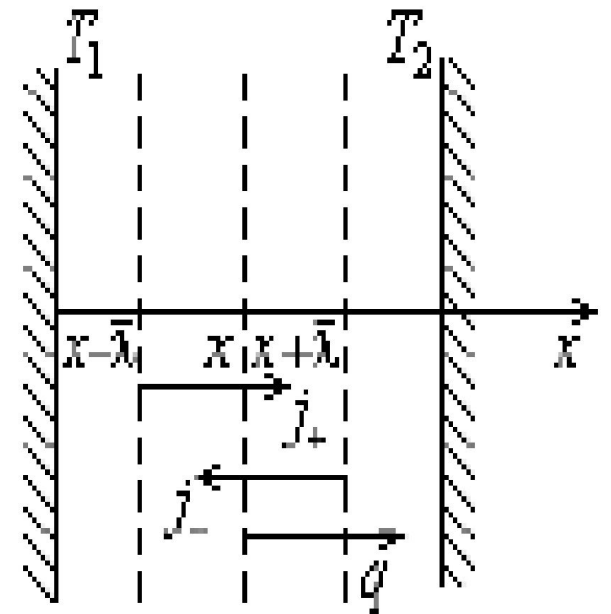
Теплопроводность

- Если между двумя стенками, имеющими разные температуры, находится слой газа, то через этот газ осуществляется перенос тепла от горячей стенки к холодной ($T_1 > T_2$).
- Будем считать, что длина свободного пробега много меньше расстояния h между стенками.
- Требуется найти поток тепла q через единичную площадку с координатой x в сечении, параллельном стенкам.



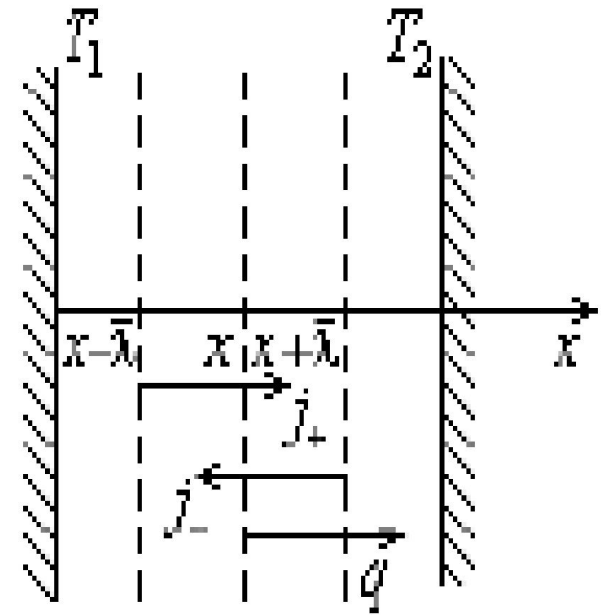
Теплопроводность

- Слева и справа через это сечение проходят потоки частиц j_+ и j_- . Так как пространство замкнуто, то в стационарных условиях эти потоки равны $j_+ = j_- = j$. Вместе с тем частицы, пересекающие сечение слева, имеют более высокую температуру, чем частицы, пересекающие сечение справа, в результате чего через сечение осуществляется перенос энергии.



Теплопроводность

- Каждая молекула переносит среднее количество тепла, равное $\frac{c_V T}{N_A}$ (c_V - молярная теплоемкость, N_A - число Авогадро). Таким образом, поток энергии через единицу площади сечения с координатой x равен
-
- $q = \langle \varepsilon \rangle (x - \lambda) j_+ - \langle \varepsilon \rangle (x + \lambda) j_- = \frac{j c_V}{N_A} (T(x - \lambda) - T(x + \lambda))$



Теплопроводность

Поскольку λ мало, это выражение в скобках можно разложить по этому параметру малости, сохранив только первый член:

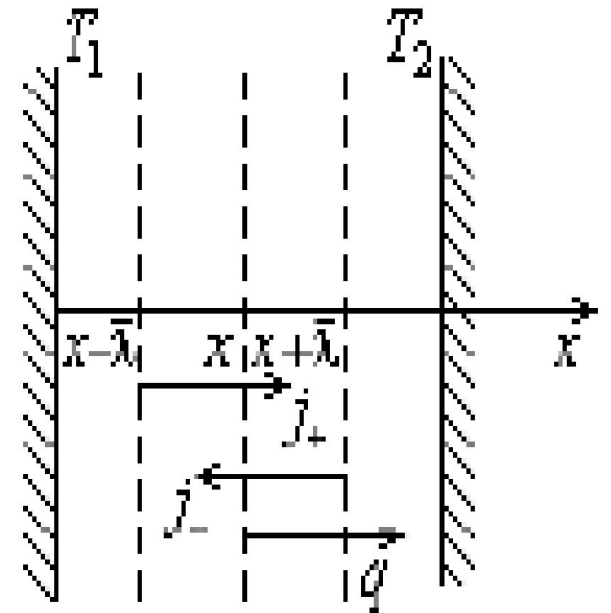
$$q = -2 \frac{j \lambda c_V}{N_A} \frac{dT}{dx}.$$

Как и при определении диффузионных потоков будем приближенно считать, что $j = \frac{n \langle v \rangle}{6}$. Тогда получим

$$q = -\frac{1}{3} \frac{n c_V}{N_A} \lambda \langle v \rangle \frac{dT}{dx} = -\kappa \frac{dT}{dx},$$

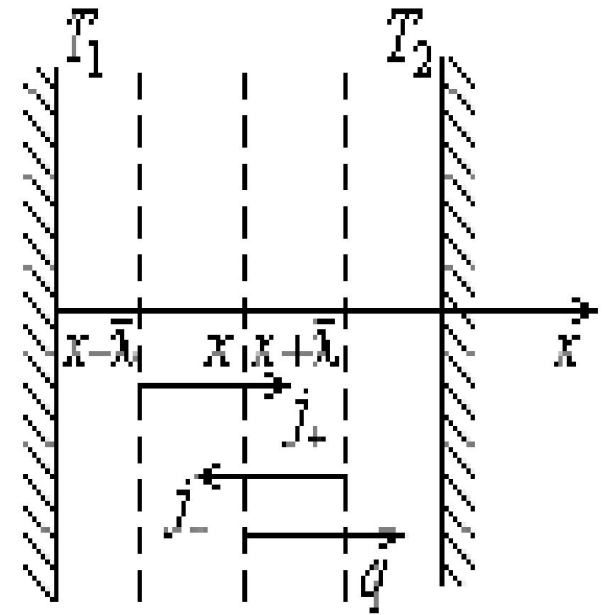
где κ - коэффициент теплопроводности:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{n c_V}{N_A} \lambda \langle v \rangle.$$



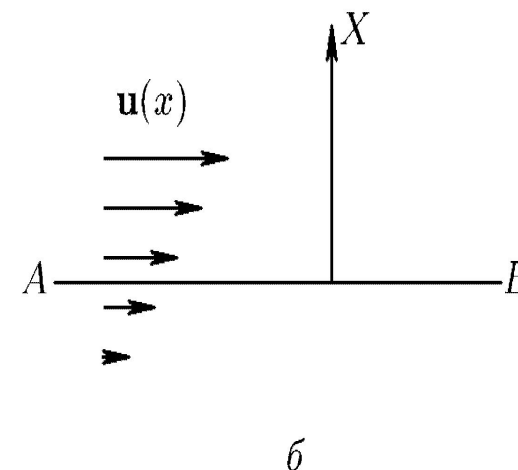
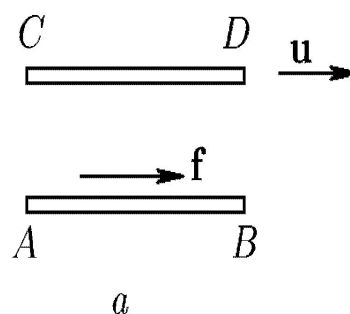
Теплопроводность

- Поток тепла пропорционален градиенту температуры и направлен против него.
- Этот факт был установлен экспериментально и назван **законом Фурье**.



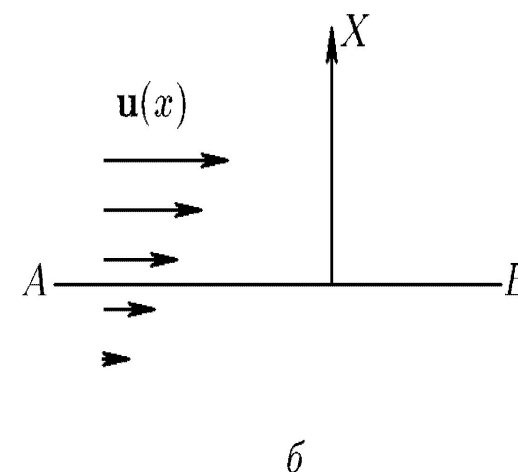
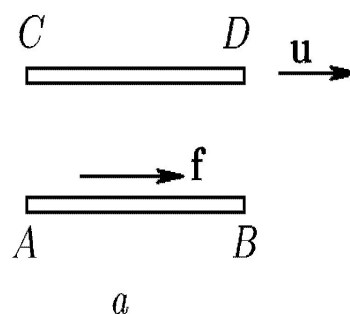
Вязкость газа

- Между двумя параллельными пластинками AB и CD находится воздух или другой газ. При движении пластинки CD появляется сила, действующая на пластинку AB и направленная в сторону движения. Эта сила и есть сила вязкости.



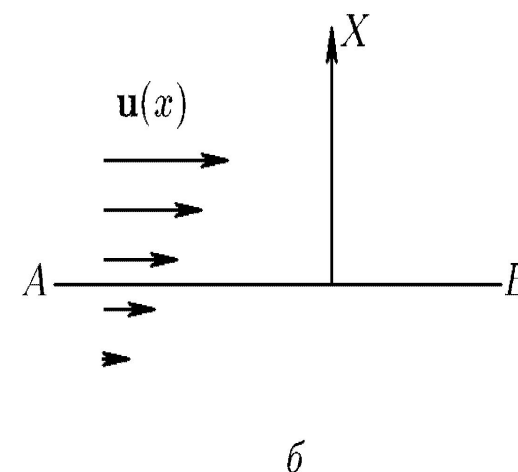
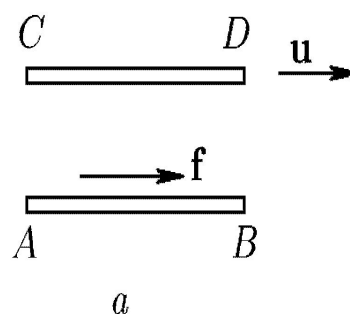
Вязкость газа

- Будем представлять себе газ неограниченным и движущимся стационарно плоскопараллельными слоями в горизонтальном направлении. Скорость этого макроскопического движения u меняется в направлении, перпендикулярном к слоям. Это направление мы примем за ось X . Таким образом, мы предполагаем, что $u = u(x)$.



Вязкость газа

- При наличии упорядоченного движения газа средняя скорость молекулы не нуль, а равна $u = u(x)$. С этой скоростью связано количество движения mu , которым обладает рассматриваемая молекула. Такое количество движения условимся называть упорядоченным.
- Молекулы, лежащие над плоскостью AB , обладают большим упорядоченным количеством движения, чем молекулы, расположенные под ней.
- Переходя из пространства над плоскостью MN в пространство под ней, молекулы передают часть своего упорядоченного количества движения молекулам, с которыми они сталкиваются в пространстве ниже плоскости MN .



Вязкость газа

- Количественное рассмотрение вязкости аналогично рассмотрению задач диффузии и теплопроводности. Только в этом случае происходит перенос импульса. Теперь вместо $\frac{c_V}{N_A}$ надо использовать m , а вместо $T(x)$ надо использовать $u(x)$.
- Тогда для силы напряжения трения Π (силы трения, действующей на единичную площадку в сечении между слоями) получаем
 - $$\Pi = -\eta \frac{du}{dx}, \quad \eta = \frac{1}{3} mn \langle v \rangle \lambda,$$
- где η – коэффициент вязкости.
-

Вязкость газа

- Так как λ обратно пропорциональна n , то отсюда следует, что вязкость и теплопроводность не зависят от плотности газа. К такому выводу впервые пришел Максвелл, и этот вывод показался ему парадоксальным. Однако опыты, поставленные самим Максвеллом и другими физиками, подтвердили указанный вывод.

Вязкость газа

- Независимость вязкости и теплопроводности от плотности газа имеет простое объяснение. Если плотность газа велика, то в переносе импульса и энергии участвует много молекул. Однако передача импульса и энергии за время между двумя последовательными столкновениями производится малыми порциями и на малые расстояния. Если же плотность мала, то уменьшается и число молекул, участвующих в переносе. Но это уменьшение полностью компенсируется тем, что теперь молекулы переносят импульс и энергию более крупными порциями и на большие расстояния.

Явления в разреженных газах

- Если средняя длина свободного пробега λ того же порядка, что и характерный линейный размер сосуда d , в котором заключен газ, или больше, то состояние газа называют вакуумом. Воздух в комнате, например, при атмосферном давлении в состоянии вакуума не находится, так как в этом случае $\lambda \sim 10^{-5}$ см. Однако в сосуде, линейные размеры которого меньше 10^{-5} см (поры дерева и многих других пористых тел), тот же воздух уже находится в условиях вакуума.

Явления в разреженных газах

- Различают три вида вакуума:
- 1) низкий, когда λ меньше характерного размера сосуда d , но приближается к нему;
- 2) средний, когда λ сравнима с d ,
- 3) высокий (или глубокий), когда λ значительно больше d .
- Газ в состоянии высокого вакуума называется ультраразреженным.

Явления в разреженных газах

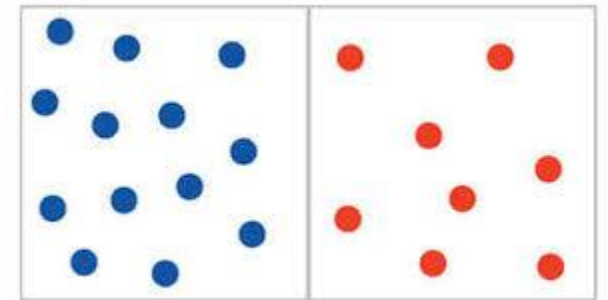
- В плотных газах $\lambda \ll d$. В этих случаях столкновения между молекулами самого газа играют основную роль в его поведении. Только такие случаи и имелись в виду во всем предшествующем изложении.
- В другом предельном случае, когда газ становится ультраразреженным, столкновения между самими молекулами относительно редки и перестают играть заметную роль.
- Основную роль в этом случае играют столкновения молекул со стенками сосуда.

Явления в разреженных газах

- Пусть сосуд разделен перегородкой на две части А и В. Часть А заполнена газом, в части В газа нет. Выделим мысленно на поверхности перегородки площадку s . Число молекул, ежесекундно ударяющихся об эту площадку, определяется формулой

- $$N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle s = ns \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = C \frac{P_s}{\sqrt{mT}},$$

- где C – постоянная, равная $\sqrt{1/2\pi k}$.
- Прделаем теперь в перегородке отверстие, площадь которого равна s .



Явления в разреженных газах

- Поток молекул газа через отверстие в стенке называется эффузионным потоком, если размеры отверстия и толщина стенки малы по сравнению с длиной свободного пробега λ .
- Допустим теперь, что по разные стороны перегородки находится один и тот же газ, но при разных давлениях и температурах. Если газ находится в состоянии высокого вакуума, то возникнут два эффузионных потока: из А в В и из В в А

Явления в разреженных газах

- Ввиду отсутствия столкновений между молекулами эти два потока совершенно независимы друг от друга. Поэтому количество молекул, ежесекундно проходящих через отверстие s из А в В, определится выражением

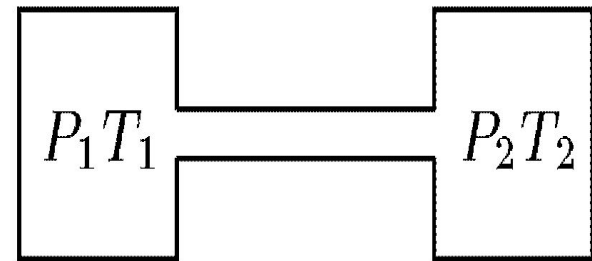
- $$N = \frac{C_s}{\sqrt{m}} \left(\frac{P_A}{\sqrt{T_A}} - \frac{P_B}{\sqrt{T_B}} \right),$$

- где P_A, P_B, T_A, T_B – давления и температуры газа в А и В. В состоянии равновесия, когда средние числа молекул в А и В остаются неизменными, должно быть $N = 0$, т. е.

- $$\frac{P_A}{\sqrt{T_A}} = \frac{P_B}{\sqrt{T_B}}.$$

Явления в разреженных газах

- Пусть два сосуда 1 и 2 соединены между собой трубкой и поддерживаются при разных температурах T_1 и T_2 .
- Когда поперечное сечение трубки очень велико по сравнению с длиной свободного пробега,
- Условие равновесия носит гидродинамический характер: должны быть равны давления P_1 и P_2 в обоих сосудах. В противоположном случае, когда длина свободного пробега очень велика по сравнению с поперечными размерами трубки, гидродинамический подход неприменим.

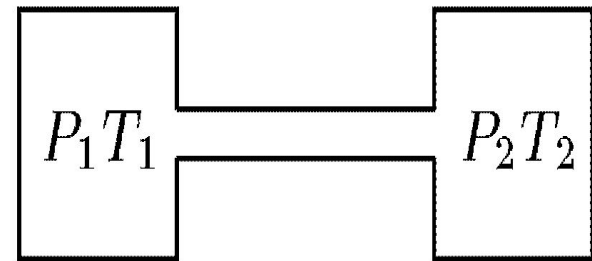


Явления в разреженных газах

- Условие равновесия требует, чтобы среднее число частиц газа, проходящих через трубку в одном направлении, было равно среднему числу частиц, проходящих в противоположном направлении. Это условие приводит к соотношению

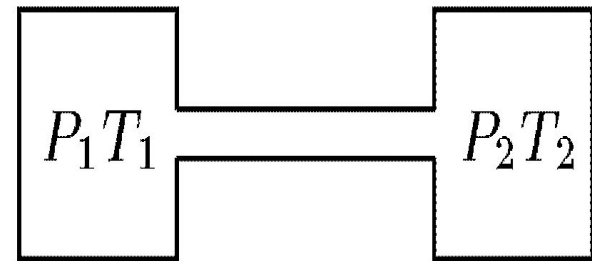
$$\bullet \frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}.$$

- Следовательно, если температуры T_1 и T_2 различны, то при равновесии будут различны и давления P_1 и P_2 .



Явления в разреженных газах

- Допустим теперь, что сосуд разделен пористой перегородкой на две части, поддерживаемые при разных температурах T_1 и T_2 . Пусть размеры пор малы по сравнению с длиной свободного пробега.
- Тогда, если первоначальные давления P_1 и P_2 были равны, то газ начнет перетекать в направлении от более низкой к более высокой температуре. Это явление называется **тепловой диффузией** или **эффектом Кнудсена**.



До следующей лекции

