ВСПОМИНАЕМ ПОНЯТИЯ

Косачев Арсений
Группа 15114

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В пространстве с декартовыми координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$ уравнение теплопроводности принимает вид

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = f(x, t).}$$

Уравнение теплопроводности называется *однородным*, если $f(x, t) \equiv 0$, т.е. система теплоизолирована.

Для случая одной пространственной переменной *x*

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t).$$

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

Это уравнение имеет вид:

$$\Delta\varphi = f,$$

В трёхмерной декартовой системе координат уравнение принимает форму:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x, y, z) = f(x, y, z).$$

$\varphi(x, y, z)$ – электростатический потенциал;

Потенциал точечного заряда;

Потенциал гауссовой объёмной плотности заряда

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ(ДЛЯ УР-ИЯ ЛАПЛАСА):

1-ая краевая задача(задача Дирихле): $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S = f(x) \end{cases}$

n-внешняя нормаль
S-граница

2-ая краевая задача(задача Неймана): $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_S = f(x) \end{cases}$

3-ья краевая задача(задача Робена): $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ (\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u)|_S = f(x) \end{cases}$

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ КРУГА

Рассмотрим на плоскости xOy круг с центром в начале координат радиуса R. Пусть на его окружности задана некоторая функция $r = f(\varphi)$, где φ – полярный угол. Найдем функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ u\big|_{r=R} = f(\varphi). \end{cases}$$

Решение задачи можно найти методом разделения переменных, полагая $u = \Phi(\varphi) \cdot R(r)$. Подставляя эту функцию в уравнение , получим

$$r^2 \Phi(\varphi) R''(r) + r\Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0$$

или

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -k^2.$$

Таким образом, находим два дифференциальных уравнения

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0$$

Общее решение первого из этих уравнений будет $\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi$. Второе уравнение $R = Cr^k + Dr^{-k}$.

$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k})$. Если $k = 0$, то уравнения принимают вид

$\Phi''(\varphi) = 0, \;\; rR''(r) + R'(r) = 0$. Откуда получаем $u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0 \ln r)$.

Так как решение должно быть периодической функцией от φ с наименьшим положительным периодом 2π, то в найденном выражении для u_0 $B_0 = 0$. Далее функция $u(r,\varphi)$ должна быть непрерывной и конечной в круге, поэтому $D_0 = 0$ и $D_k = 0$.

Сумма должна быть периодической функцией от φ. Для этого k должно принимать целые значения. Итак,

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot r^n$$

Постоянные A_n и B_n находят так, чтобы выполнялось краевое условие задачи. Подставляя в выражение для $u(r,\varphi)$ значение

$r = R$, получим $f(\varphi) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n$.

Найденная сумма является рядом Фурье для функции $f(\varphi)$ на интервале $(-\pi, \pi)$. Следовательно, A_n и B_n должны определяться по формулам

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \;\; A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \;\; B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Интеграл Пуассона для задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре выглядит следующим образом.

Пусть для гармонической в шаре функции $u(r, \varphi)$ поставлено условие равенства на границе функции u_0: $u(R, \varphi) = u_0(\varphi)$,
при этом функции принадлежат следующим классам гладкости: $u(r,\varphi) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}),\ u_0(\varphi) \in C^1(\partial D)$,
где ∂D — граница шара D, а $\overline{D}$ — его замыкание. Тогда решение такой задачи Дирихле представимо в виде интеграла Пуассона:

$$u(r,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{\omega_n R} \int\limits_{\partial D} \frac{u_0(\psi)}{|r-\psi|^n}\, dS(\psi),\ r \in [0; R),$$

где ω_n — площадь единичной сферы, а n — размерность пространства.