

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЭЛЛИПС

Выполнили работу:

студенты группы 22928/2

подгруппы 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (и большая, чем расстояние между фокусами).

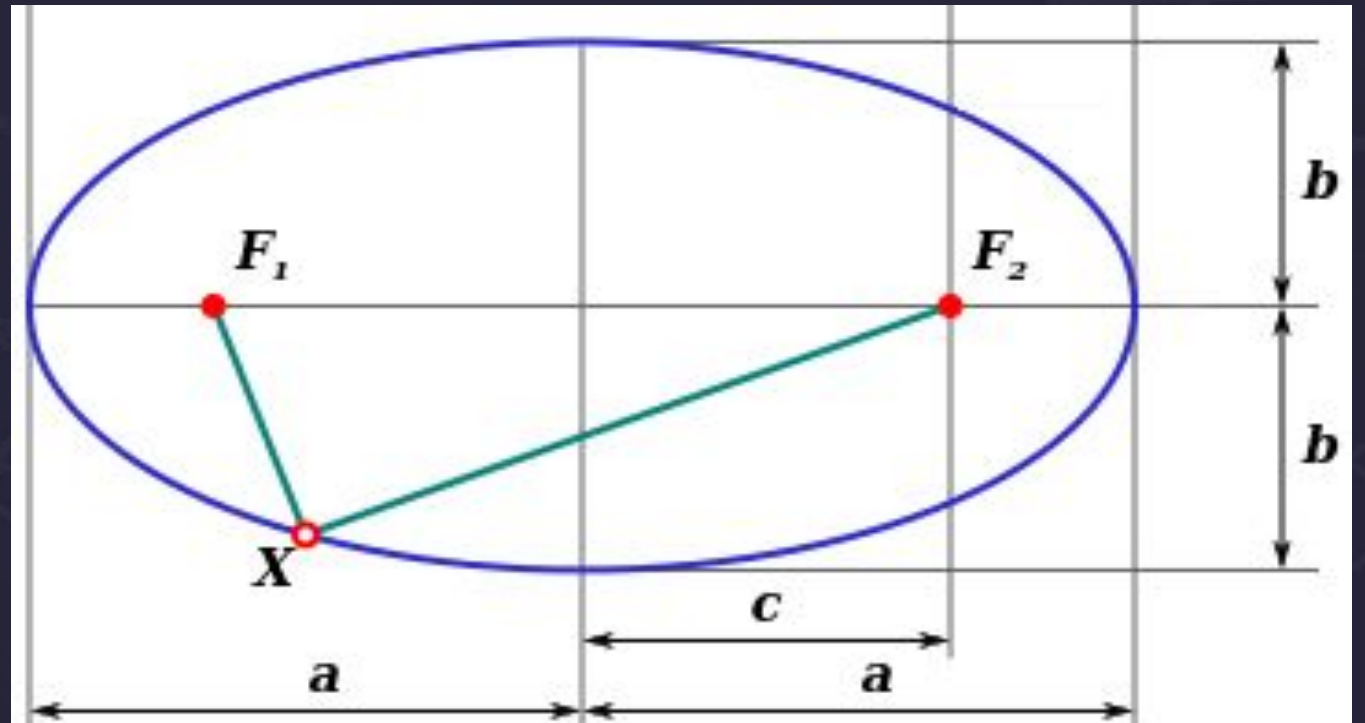
ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЛИПСА

a – большая полуось

b – малая полуось

c – фокальное расстояние
(полурастояние между
фокусами)

ε – эксцентриситет
эллипса



ВЫВОД КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Дано:

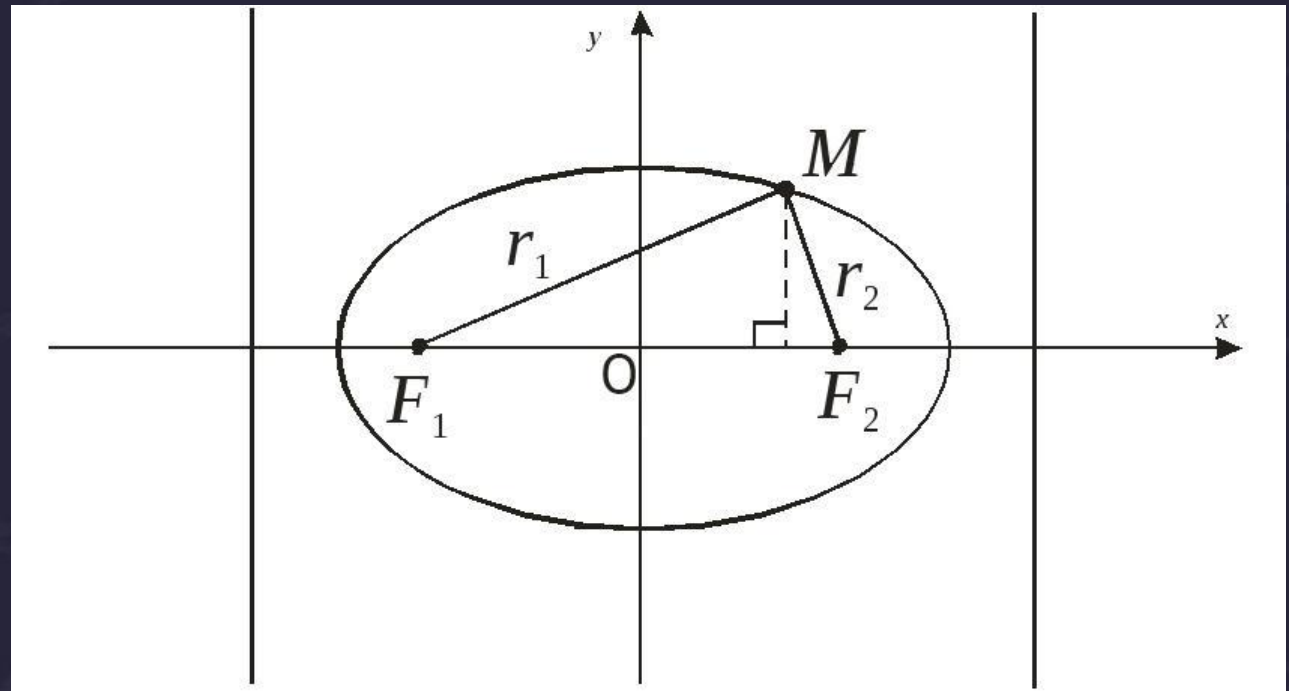
Эллипс

F_1 и F_2 – фокусы

a – большая
полуось

c – половина

расстояния между
фокусами



Возьмем за ось абсцисс прямую F_1F_2 , а точку O поместим на середине этого отрезка.

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка плоскости. Пусть $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$. По определению эллипса точка M принадлежит эллипсу тогда, когда $r_1 + r_2 = 2a$.

Координаты фокусов равны соответственно $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, следовательно

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

ВЫВОД КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Подставим r_1 и r_2 : $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$

Полученное уравнение – уравнение эллипса в заданной системе координат.

Преобразуем его к виду $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$(a^2 - cx) = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$; возведем в квадрат еще раз;

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

ВЫВОД КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Обозначим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, получим $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

После приведения к каноническому виду уравнение эллипса запишется так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ при } a > b$$

Если фокусы лежат на оси Oy , то каноническое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ при } a > b$$

СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

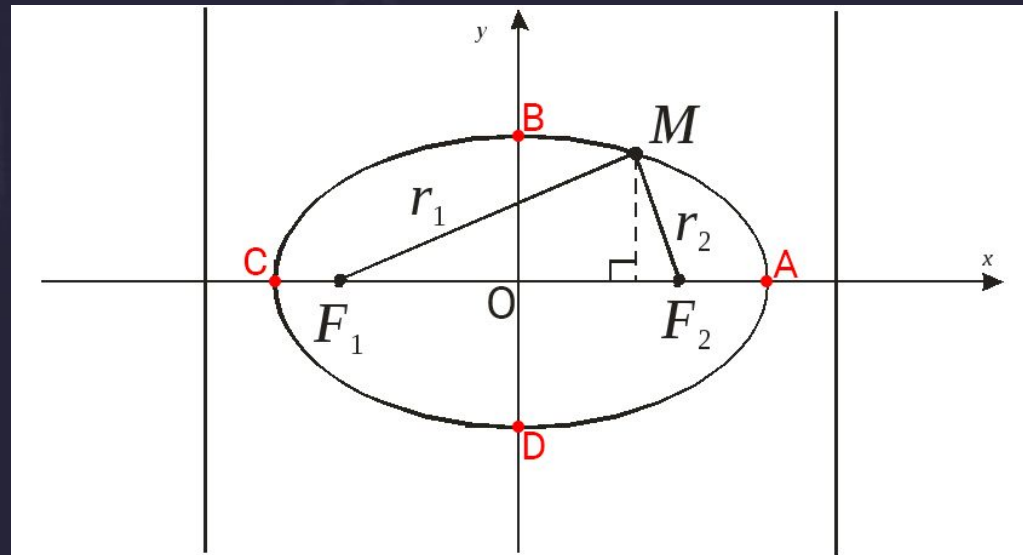
Свойство 1: эллипс пересекает каждую из осей координат в двух точках.

Доказательство

Для определения точек пересечения эллипса с осью Ox нужно решить

совместно два уравнения: $y = 0$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Отсюда получим $x = \pm a$. Таким образом, точками пересечения эллипса с осью Ox будут точки $A(a; 0)$ и $C(-a; 0)$. Аналогично, точки пересечения эллипса с осью Oy – $B(0; b)$ и $D(0; -b)$.



СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 2: Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равная удвоенной большей полуоси.

Доказательство

Действительно, используя полученные выражения для расстояний от точки эллипса до его фокусов, получим: $F_1M + F_2M = a + \epsilon x + a - \epsilon x = 2a$

СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 3: эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.

Доказательство

В уравнение эллипса переменные x и y входят только во второй степени, поэтому если точка $M(x; y)$ принадлежит эллипсу, то точки $M_1(x; -y)$ и $M_2(-x; y)$ также принадлежат ему, т.к. их координаты удовлетворяют уравнению эллипса. Точка M_1 симметрична M относительно оси Ox , а точка M_2 – относительно Oy . Таким образом, эллипс имеет две оси симметрии, они взаимно перпендикулярны. Большая и малая полуоси эллипса лежат на его осях симметрии.

СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 4: эллипс имеет центр симметрии.

Доказательство

Если координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяют уравнению эллипса, то этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки $N(-x; -y)$. Точка M симметричная точке N относительно начала координат. Таким образом, эллипс имеет центр симметрии.

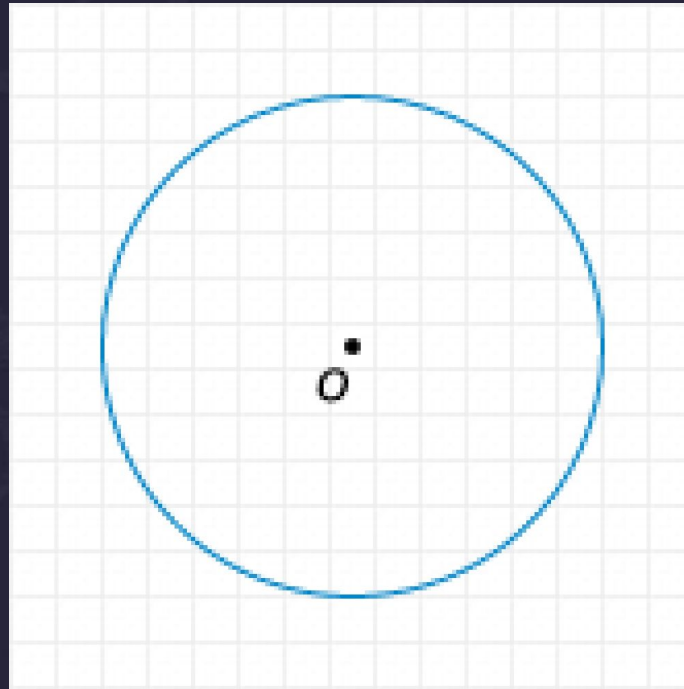
СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 5: эллипс может быть получен сжатием окружности.

Доказательство

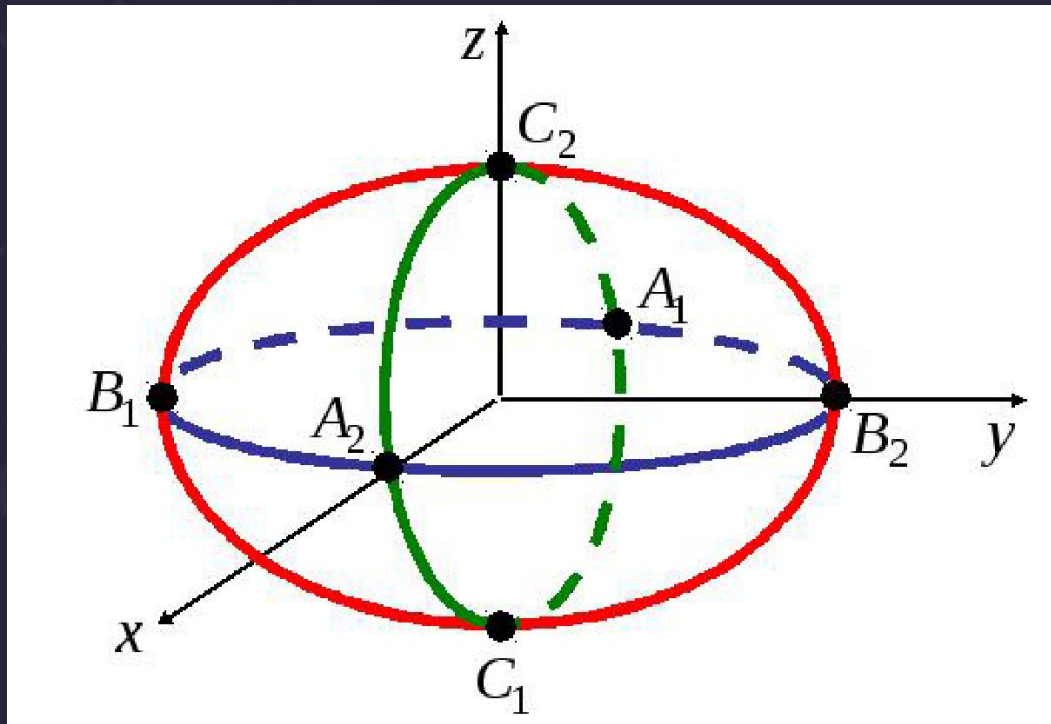
Пусть $\omega(0, a)$ – окружность с центром в начале координат и радиуса a . Тогда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Точке $P(X; Y)$ на окружности сопоставим точку $P_1(x; y)$ такую, что $x = X$ и $y = \frac{y}{a}Y$. Точка P_1 получается сдвигом точки P , при котором абсцисса не меняется, а ордината уменьшается в отношении $\frac{b}{a}$. Координаты точки P_1 удовлетворяют уравнению эллипса. В самом деле, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{(\frac{b}{a}Y)^2}{b^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$. Таким образом, эллипс можно получить из окружности равномерным сжатием к оси Ox , при котором координаты точек уменьшаются в одном и том же соотношении, равном $\frac{b}{a}$. Отсюда следует, что форма эллипса зависит от значения соотношения $\frac{b}{a}$: чем меньше это отношение, тем более сжатым будет эллипс и наоборот, чем больше отношение $\frac{b}{a}$, тем эллипс будет менее сжатым.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЭЛЛИПСА



Окружност
ь

ЭЛЛИПСОИД



Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

Величины a , b и c называются полуосями эллипсоида.

Если они все различны, то эллипсоид называется трехостным.

Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения.

ЭЛЛИПС В НАШЕЙ ЖИЗНИ



Земл

я



Мяч для игры в
американский
футбол

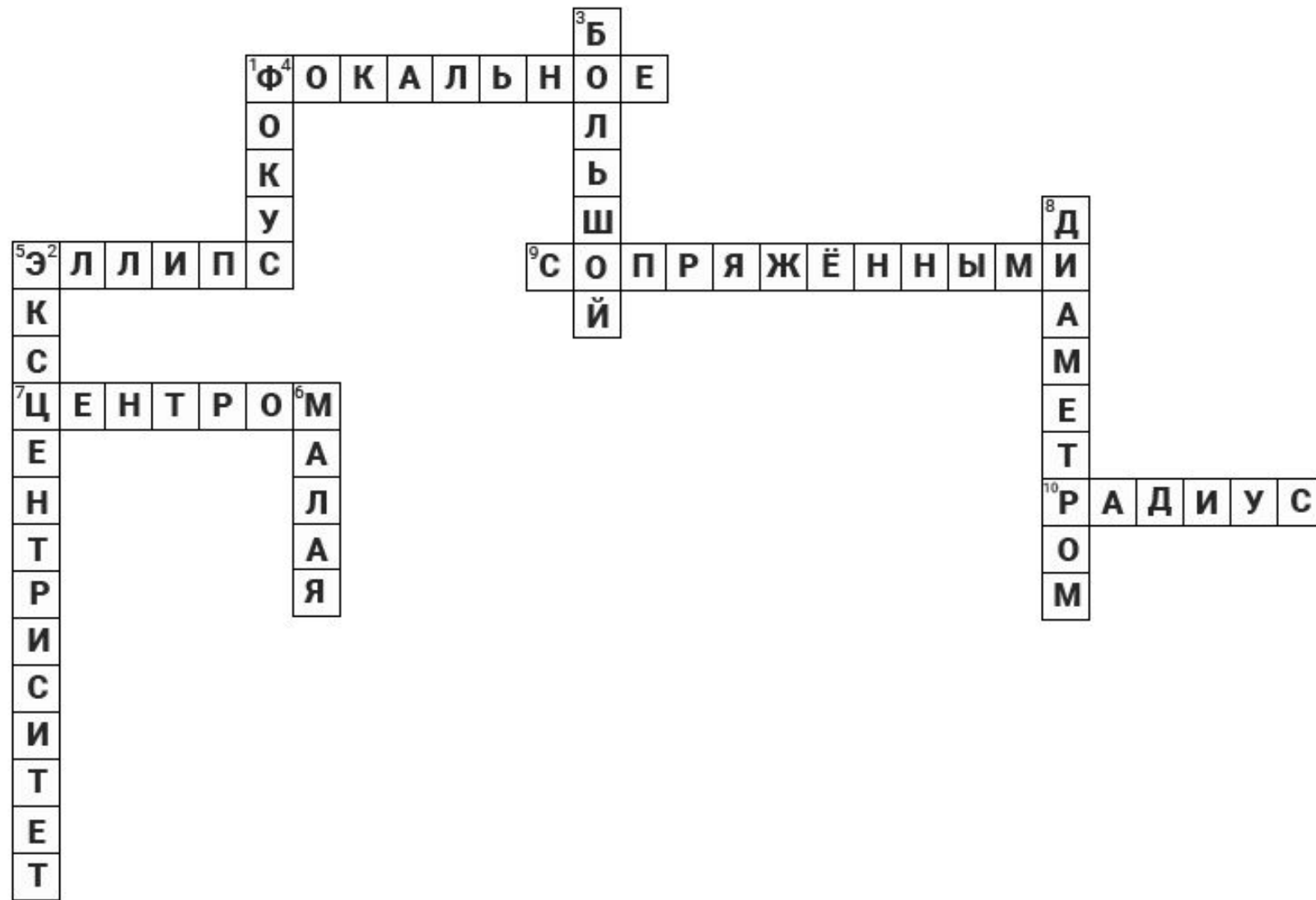


Зеркал

о

РЕШЕНИЕ КРОССВОРДА

ОТВЕТЫ НА КРОССВОРД



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1

Найти эксцентриситет эллипса.

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$$

ЗАДАЧА 2

Составить уравнение эллипса с фокусами на оси Ox , если расстояние между его фокусами равно 12, а эксцентриситет равен $\frac{3}{10}$.

ЗАДАЧА 3

Найти длину перпендикуляра,
восстановленного из фокуса эллипса

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

к большой оси до
пересечения с эллипсом.

ЗАДАЧА 4

Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$, проведённых из точки $M (12; -3)$