Линейные блочные коды

OTK 2018

Линейный блоковый код

- Информационный поток бит (символов) разбивается на блоки по k бит (символов).
- Каждый блок кодируется кодовым словом из n бит (символов).



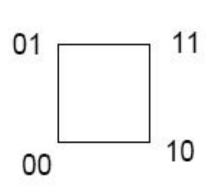
Линейный блоковый код (ЛБК) Геометрический подход

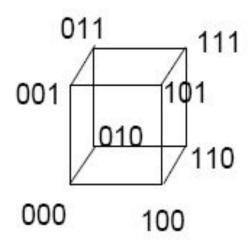
- Линейный блоковый код (*n,k*)
 - Множество $C \subset V_n$ с мощностью 2^k называется ЛБК если и только если существует подпространство векторного пространства V_n .

$$V_k \to C \subset V_n$$

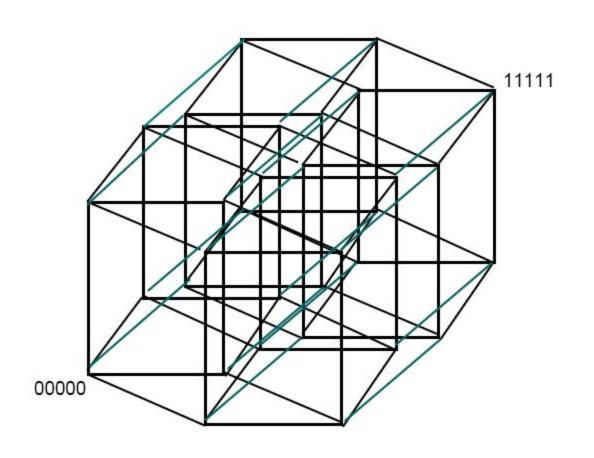
- Элементы С называются кодовыми словами.
- Нулевое слово является словом кода.
- Любая линейная комбинация кодовых слов есть слово того же кода справедливо для линейного группового кода (свойство замкнутости).

Геометрия пространства Пример



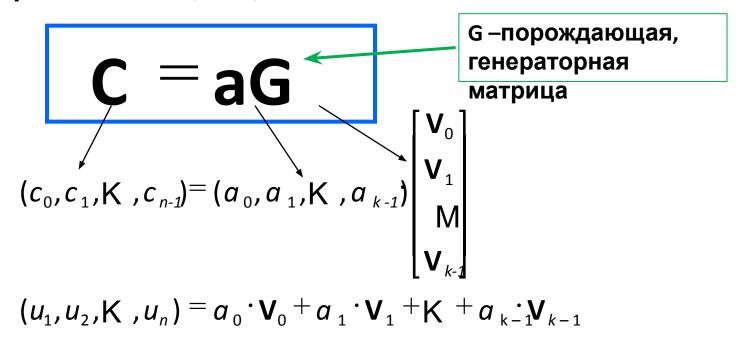


Пятимерный куб Хэмминга



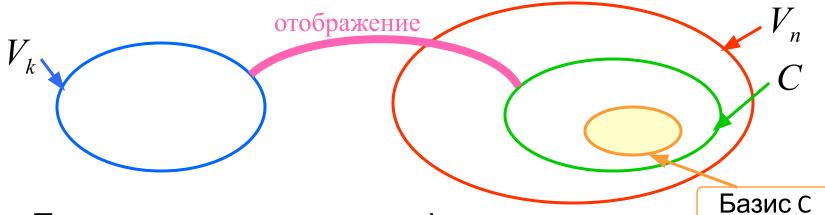
Алгебраический подход

• Кодирование (*n*,*k*) блочного кода



- Строки **G** - линейно независимы.

Порождающая матрица



– Порождающая матрица G формируется таким образом, чтобы её строки $\{V_0,V_1,oxedge V_{k-1}\}$

– были векторами базиса,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbb{Z} \\ \mathbf{V}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \mathbb{Z} & v_{0,n-1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \mathbb{Z} & v_{1,n-1} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ v_{k-1,0} & v_{k-1,1} & \mathbb{Z} & v_{k-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Пример

• Блочный код (6,3)

				Вектор сообщения	Слова кода
ı		, 1		000	000000
	\mathbf{v}_{0}		110100	100	110100
G =	\mathbf{V}_1	=	011010	010	011010
	$\lfloor \mathbf{V}_2 \rfloor$		101001	110	101110
				001	101001
				101	011101
				011	110011
				111	000111

Пример 2

Код повторений
$$C = \{00000, 111111\}$$

Код с проверкой на четность (один избыточный символ

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Систематический блоковый код

- Систематичный блоковый код (n,k)
 - Для систематического кода, первые (или последние) k символов являются информационными.

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P} \mid \mathbf{I}_k]$$
 или $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mid \mathbf{P}]$
 $\mathbf{I}_k = k \times k$ единична матрица
 $\mathbf{P}_k = k \times (n^{\mathbf{F}}k)$ подматрица

$$\mathbf{C} = (c_0, c_1, ..., c_{n-1}) =$$
 $= (p_0 p_1, ..., p_{n \nmid k \mid 1}, a_0, a_1, ..., a_{k \mid 1})$
проверочные символы информационные символы

Проверочная матрица

• Для любого линейного кода можно найти матрицу $\mathbf{H}_{(n-k)\times n}$, такую, что её строки будут ортогональны строкам \mathbf{G}

•

$$\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$$

- **Н** называется проверочной матрицей, её строки линейно независимы *t*.
- Для систематического блочного кода:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_{n-k} \mid -\mathbf{P}^T]$$
 или $\mathbf{H} = [-\mathbf{P}^T \boxtimes \mathbf{I}_{n-k}]$

$$\mathbf{H}\mathbf{G}^{T} = [-\mathbf{P}^{T} \mid \mathbf{I}_{n-k}][\mathbf{I}_{k} \mid \mathbf{P}]^{T} = -\mathbf{P}^{T}\mathbf{I}_{k} + \mathbf{I}_{n-k}\mathbf{P}^{T} = 0$$

Определение кода через проверочные уравнения:

- $C = \{x \in F: H x^T = 0\}$
- Рассмотрим код длины 6: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
- Положим, что

•
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

•
$$x_2 + x_3 + x_5 = 0$$

•
$$x_1 + x_3 + x_6 = 0$$

- Система уравнений имеет решения x_1, x_2, x_3 , для заданных x_4, x_5, x_6
- Проверочные уравнения задает проверочная матрица

•
$$H \mathbf{x}^T = 0$$

Систематический код

• Пусть
$$G = [I_k | P],$$

- $P = [p_{i,i}]$ подматрица размером $k \times (n k)$,
- $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ строки \mathbf{P}
- тогда

c = aG =
$$(a_0, ..., a_{k-1}, p)$$
,

- где $\mathbf{p} = \sum_{j} a_{j} \mathbf{p}_{j}$
- Проверочная матрица

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{P}^T \mid \mathbf{I}_{n-k}] = [h_{i,i}].$$

• Элементы уравнений

 $h_{i,j}$ удовлетворяют системе

•
$$Ha^T = 0$$
,

• где
$$\mathbf{a} = (a_0, ..., a_{k-1}, p_0, p_1, ..., p_{n-k-1})$$

Ортогональное подпространство

H

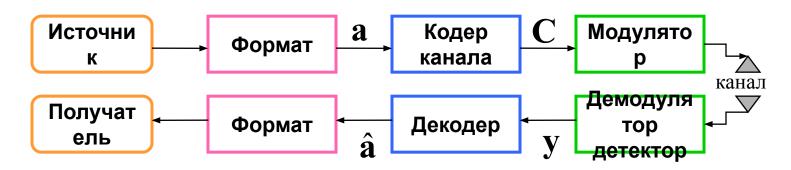
- Пусть код **C**={**c**_i} -> **G**
- Определим код через нуль-пространство **н**

•
$$C = \{c \in F: Hc^T = 0\}$$

- где F поле (множество) элементов кода
- Матрица Н аннулирует кодовые слова

• Образуется **ортогональное подпространство** относительно кода **С**

Синдром ошибки



$$y = c + e$$

 $\mathbf{y} = (y_0, y_1, ..., y_{n-1})$ принятое кодовое слово или вектор

$$\mathbf{e} = (e_0, e_1,, e_{n-1})$$
 вектор ошибок

- Синдром (отображение ошибок):
 - S является синдромом у, соответствующий отображению вектора ошибок е в Н.

$$S = yH^T = eH^T$$

Двойственный (дуальный) код

• Если **С** – линейный код размером *k*, то ортогональным или двойственным ему будет ф , определяемый как

$$C^{\perp} = \left\{ \mathbf{x} \in R^{n} \middle| \forall \mathbf{y} \in C, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \right\}$$

где
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum x_i \cdot y_i$$

Двойственный код является (n, n - k)-кодом. Если Н

 это порождающая матрица двойственного кода,
 то матрицу Н называют проверочной матрицей кода С

Двойственные (дуальные) коды Пример. Троичные коды

Троичный алфавит $Q = \{0,1,2\}$ Операции по mod 3

Пространство

$$Q^n$$

$$n = 4$$

Код (4, 2)

Полный код

000,001,002,010,011,012,020,021,022,100,200,101,....

Комбинаторный подход **Пространство Хэмминга**

- X— конечное q-элементное множество
- X^n состоит из всех n-ок (n мерных векторов) с координатами из множества X
- Пусть $\mathbf{a} = (a_0, ..., a_{n-1})$; $\mathbf{b} = (b_0, ..., b_{n-1})$ векторы множества X^n
- Метрика Хемминга d(a,b)
- $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ число позиций j, для которых $a_j \neq b_j$

Справедливо неравенство треугольника $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$

Пространство X^n — вместе с метрикой d называется метрическим пространством Хэмминга

Вес Хэмминга

• **Bec Хэмминга** вектора **U**, обозначается как *wt*(**U**), определяется как число ненулевых элементов в **U**

Комбинаторные соотношения

• . Число различных кодовых слов длины n и веса t

$$|\{\mathbf{x} \in \mathbf{F}; wt(\mathbf{x}) = t\}| = \binom{n}{t} = C_n^t = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

• Если 0 ≤*t* ≤*n* и **c** – кодовое слово длины *n*, тогда число различных слов длины *n* и расстоянием по отношению к **c** не более *t* равно

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \mathbb{Z} + \binom{n}{t}$$

Комбинаторно-геометрический подход Сферическая модель

• Определим множество $S(\mathbf{c}_i, \rho) = \{\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i) \le \rho\}$

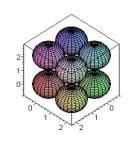
радиусом ρ с центром в \mathbf{c}_i

- которое описывает геометрическую фигуру шара
- Сфера шара описывается множеством

$$S_{=}(\mathbf{c}_i, \rho) = \{\mathbf{c}_j \in R^n \mid d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \rho\}$$

• Количество элементов шара или мощность шара

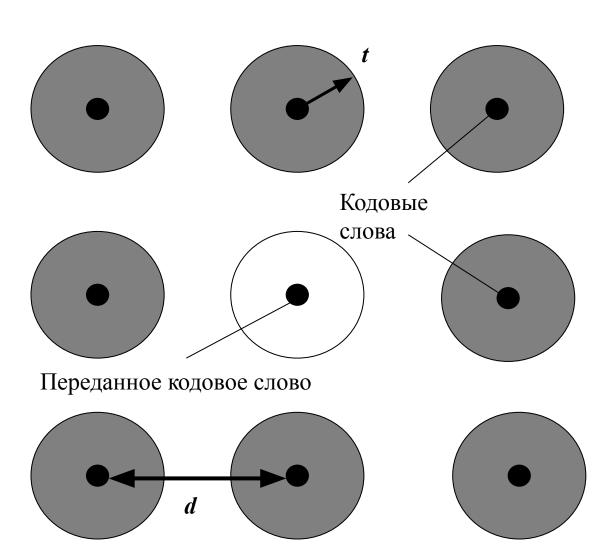
•
$$Vol(\mathbf{c}, \rho) = \left| |S(\mathbf{c}, \rho)| = \sum_{i=0}^{\rho} (q-1)^i C_n^i \right|$$



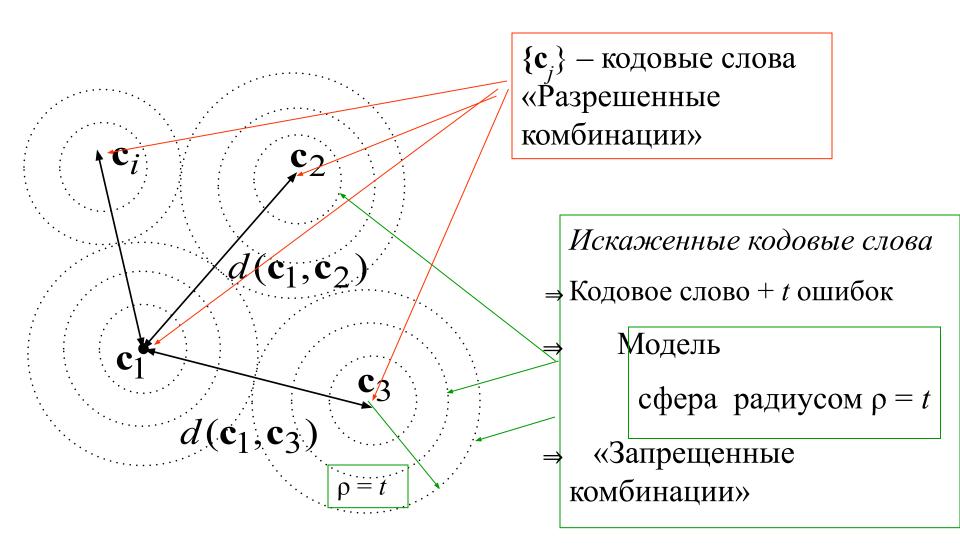
Сферическая модель

Слова корректирующего кода задают координаты центров пространственно расположенных шаров, имеющих радиус t.

Внутри шара располагаются слова, получающие из кодового слова в результате искажения t символов (так называемые запрещенные комбинации).



Сферическая модель



Корректирующая способность

- **Число обнаруживаемых ошибок**. Потребуем, чтобы сферы не захватывали соседние центры.
- В этом случае центры шаров однозначно различимы, но при этом кодовое расстояние должно удовлетворять соотношению

$$d(C) = d_{\min} \ge t_{ooh} + 1 \implies t_{ooh} = d_{\min} - 1$$

$$t_{OOH} = d_{\min} - 1$$

Гарантированное число исправляемых ошибок

- Возьмём кодовые вектора и образуем вокруг них сферы радиусом *t* и потребуем, чтобы эти сферы не пересекались, что гарантирует исправление ошибок.
- Условия для требуемого кодового расстояния:

$$d_{\min} = 2t_{ucnp} + 1 , \qquad t_{ucnp} = \frac{d_{\min} - 1}{2}$$

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

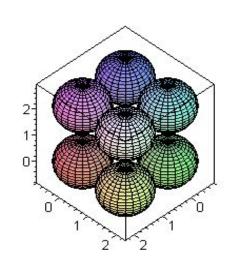
Обнаружение и исправление ошибок

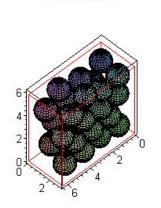
Это случай является композицией первых двух:

$$d_{\min} \ge t_{ucnp} + t_{ooh} + 1$$

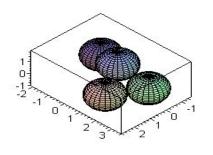
- Примеры.
- 1. Пусть n = 15, $d_{\min} = 5$, то $t_{ucпp} = 2$.
- 2. Если следует исправить 2° ошибки и обнаружить 4, то требуется $d_{\min} = 7$.

Задача оптимальной упаковки: максимальное заполнение объема для заданного расстояния d_{\min} Совершенный код





Spheres in Box



Код $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$, исправляющий ошибки, называются совершенным, если

Коды Хэмминга

Рида-Соломона

$$\bigcap_{\mathbf{c}\in C} S(\mathbf{c},e) = R^n$$

Подход на основе теории

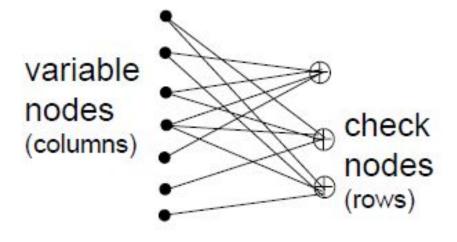
• Код Хэмминга (7,4,3)

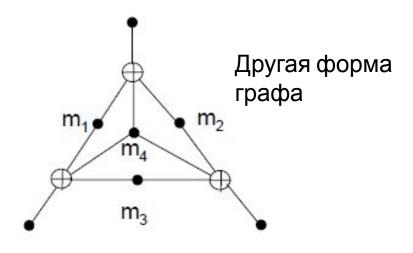
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Hесистемати}$$
 -ческий Системати-

ческий

• Граф Таннера





Алгебро-геометрический подход

 Определение кода через функцию отображения полинома

•
$$eval(f(x))$$
.

• Функция отображения полинома f(x) в вектор.

•
$$c \in (\mathbb{F}_q)^n$$
,

•

$$f \mapsto c = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

•

• где
$$c_i = f(\alpha_i), i = 1, 2, ..., n$$

•

•
$$\mathbb{F}_q = (\alpha_0 = 0, \alpha_1, ..., \alpha_{q-1})$$
 – конечное поле

Пример

- Задается множество (поле). В полином подставляются вместо х значения элементов поля. Вычисляется вектор.
- *Пример*. Пусть $\mathbb{F}_7 = (0,1,2,3,4,5,6)$, примитивный элемент $\alpha = 3$
- $\mathcal{F} = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^5\} = \{1, 3, 2, 6, 4, 5\}$
- f(x) = 2x + 1 c = eval(f) = (3,0,5,6,2,4)
- $f(x) = 3x^2 + x + 2$ c = eval(f) = (6,4,2,4,5,5)

Математика

Векторное пространство Пусть V будет множеством векторов и F поле

- (множество) элементов называемых скалярами. V формирует векторное пространство над полем F если выполняются:
 - 1. Закон коммутативности $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \in F$
 - $\forall a \in F, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow a \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \in \mathbf{V}$
 - 3. Закон дистрибутивности:

$$(a+b)\cdot \mathbf{v} = a\cdot \mathbf{v} + b\cdot \mathbf{v}$$
 и $a\cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\cdot \mathbf{u} + a\cdot \mathbf{v}$

4. Ассоциативность:

5.
$$\forall a, b \in F, \forall \mathbf{v} \in V \Rightarrow (a \cdot b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot (b \cdot \mathbf{v})$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \ 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

Пространство и подпространство

- Пример векторного пространства
 - Множество бинарных n-ок, образует пространство V_n

```
V_4 = \{(0000), (0001), (0010), (0011), (0100), (0101), (0110), (0111), (1000), (1001), (1010), (1011), (1100), (1111), (1110), (1111)\}
```

• Векторное подпространство:

- Подмножество S векторного пространства V_n называется подпространством, если :
 - Нулевой вектор находится в *S*.
 - Сумма двух векторов в S также располагается в S. Пример:

Комбинаторные соотношения

• **Перестановка** : (abc, acb, bac, bca, cba, cab)

$$n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 = n!$$

•
$$n(n-1)(n-2)...(n-k+2)(n-k+1) = (n)_k$$

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{(n)_k}{k!}$$

Вопросы

