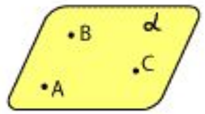
Часть С. Геометрия
Задания 14, 16

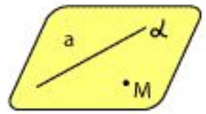
Теория

Задание 14. Стереометрия. Основные понятия

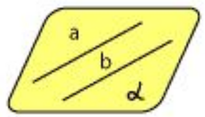
Плоскость в пространстве можно провести:



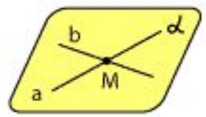
1) Через три точки, не лежащие на одной прямой



2) Через прямую и не лежащую на ней точку

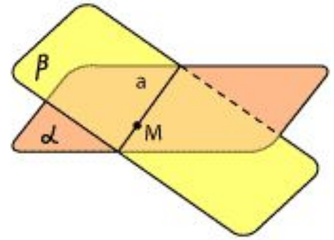


3) Через две параллельные прямые

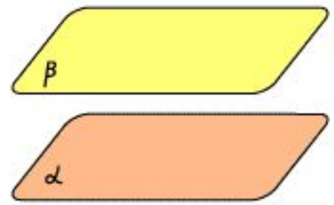


4) Через две пересекающиеся прямые

Плоскости в пространстве

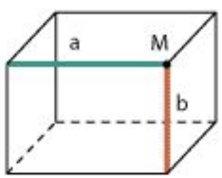


Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой



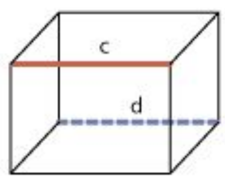
Если две плоскости не имеют общих точек, то они параллельны друг другу

Расположение прямых в пространстве (три случая)



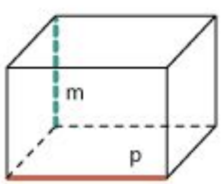
пересекаются

$a \cap b = M$



параллельны

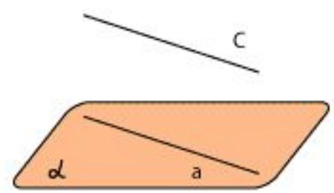
$c \parallel d$



скрещиваются

$m \dotminus p$

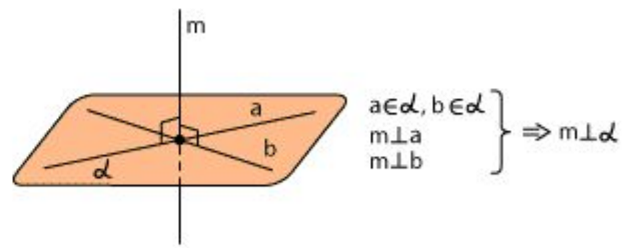
Признак параллельности прямой и плоскости



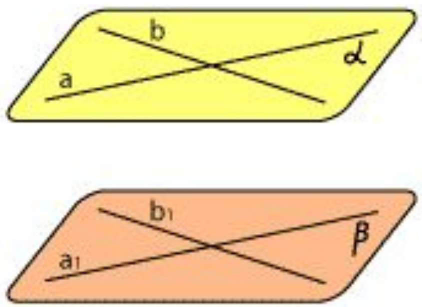
$$\left.\begin{matrix} c \parallel a \\ a \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$$

Угол между прямой и плоскостью

Перпендикулярность прямой и плоскости



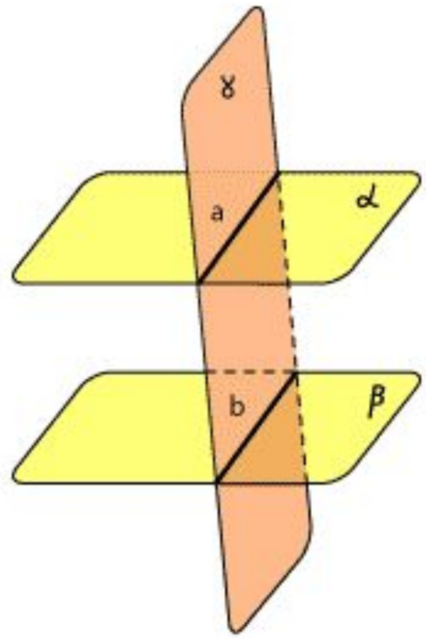
Признак параллельности плоскостей



$a \parallel a_1$
$b \parallel b_1$

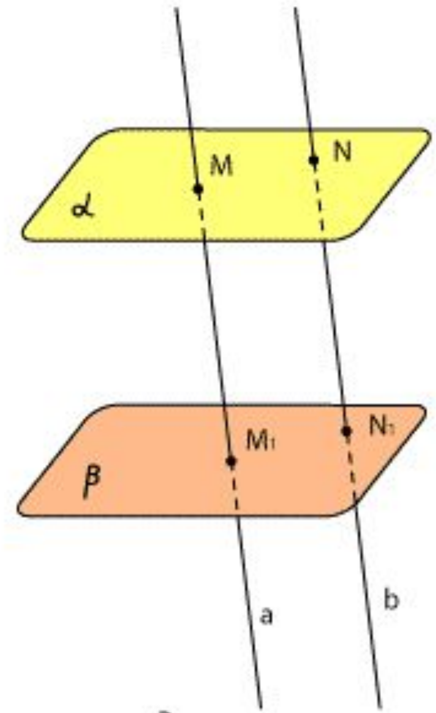
Плоскости α и β параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости

Свойства параллельных плоскостей



$$\left.\begin{array}{l} \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \\ \alpha \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

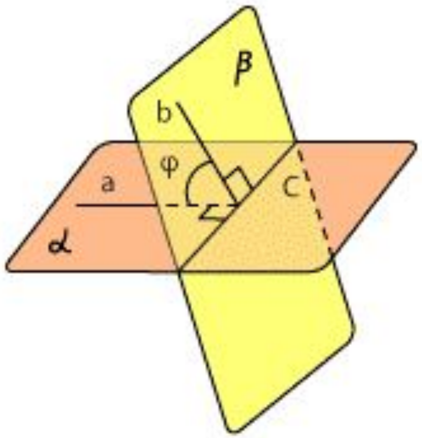
Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow MM_1 = NN_1$$

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны

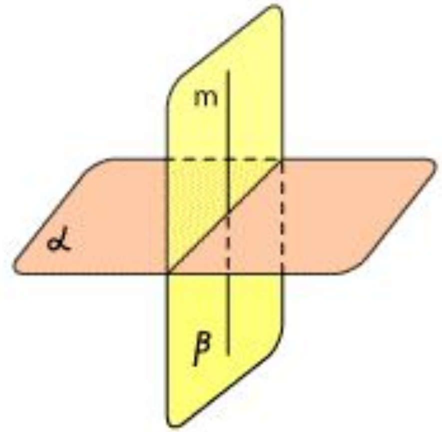
Угол между плоскостями



φ - угол между плоскостями α и β

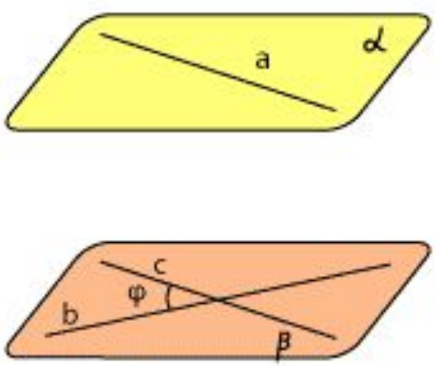
Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях

Признак перпендикулярности плоскостей



$$\left.\begin{array}{l} m \in \beta \\ m \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Угол между скрещивающимися прямыми



a и b - скрещиваются

$a \in \alpha$

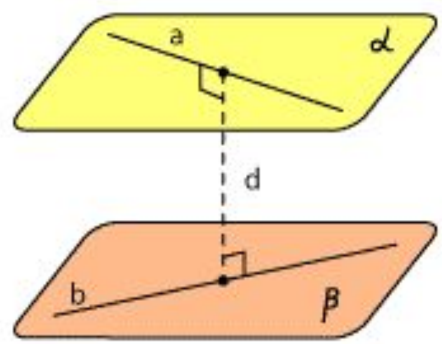
$b \in \beta$

$\alpha \parallel \beta$

проведем в плоскости β прямую $c \parallel a$

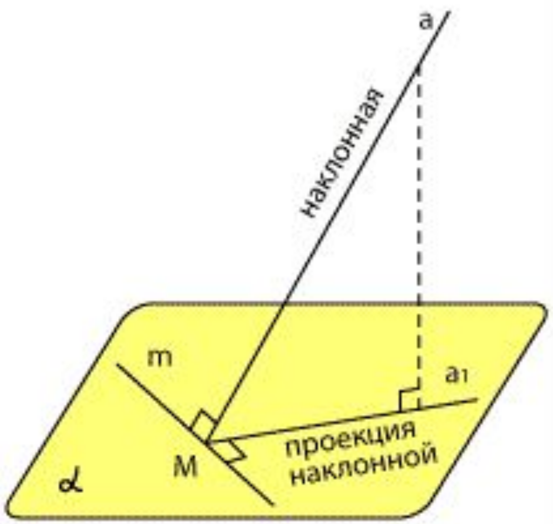
Угол φ между b и c равен углу между a и b

Расстояние между скрещивающимися прямыми



Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра

Теорема о трех перпендикулярах в задачах

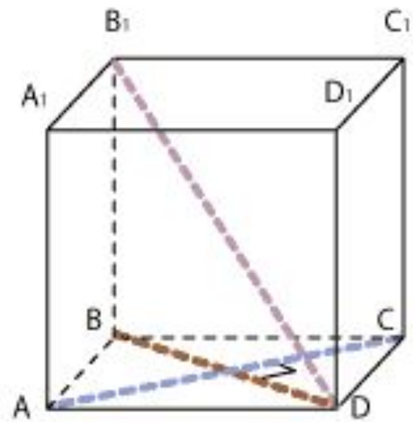


$m \in \alpha$

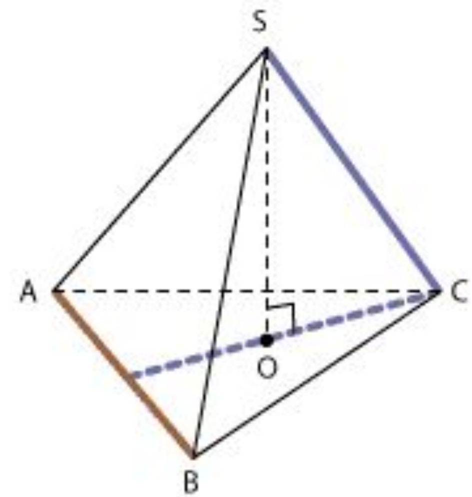
a - наклонннная

a_1 - проекция наклонной a на плоскость α

$m \perp a \iff m \perp a_1$



$BD \perp AC \Rightarrow B_1D \perp AC$



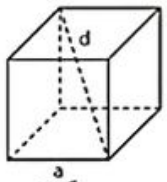
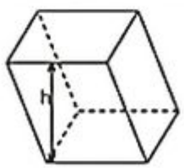
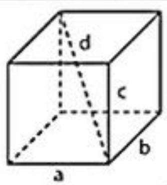
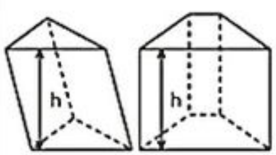
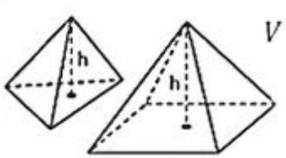
SABC - тетраэдр

OC - проекция SC на плоскости (ABC)

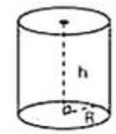
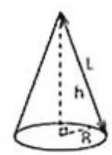
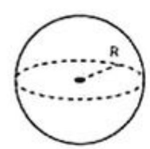
$OC \perp AB \Rightarrow SC \perp AB$

Задание 14: Стереометрия

МНОГОГРАННИКИ

ОБЪЁМЫ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 куб $V = a^3$ a – ребро куба	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 параллелепипед $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 прямоугольный параллелепипед $V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2ab + 2ac + 2bc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 призма $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 пирамида $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок}$

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ОБЪЁМ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 цилиндр $V = \pi R^2 h$ R – радиус основания h – высота	$S = 2S_{осн} + S_{бок} =$ $= 2\pi R^2 + 2\pi Rh$
 конус $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi RL$ L – образующая $L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 шар $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$S = 4\pi R^2$

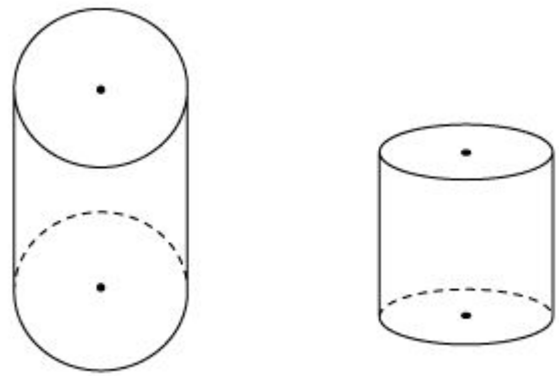
Чертежи в задании 14

Куб

Неудачно.
Главная диагональ
и боковые ребра
оказались на одной линии

ОК

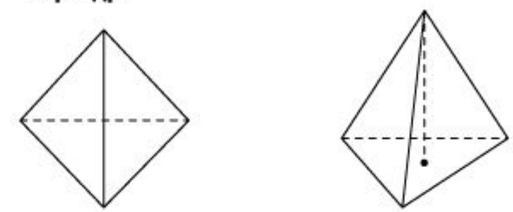
Цилиндр



Неудачно.
Нарушены правила
параллельного
проецирования

ОК

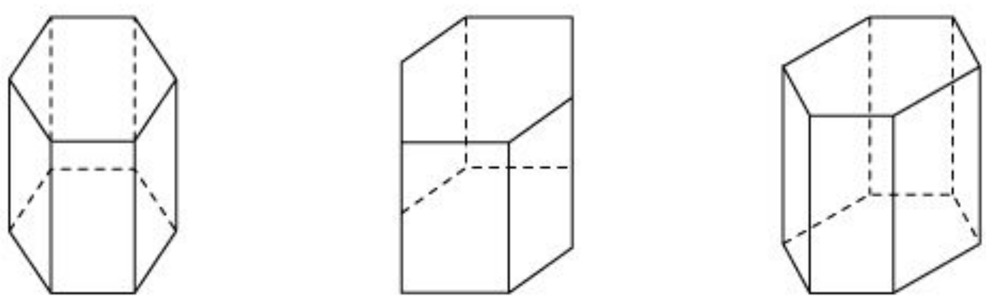
Тетраэдр



Неудачно.
Рисунок стал "плоским".
Не видна высота тетраэдра

ОК

Шестигранная призма

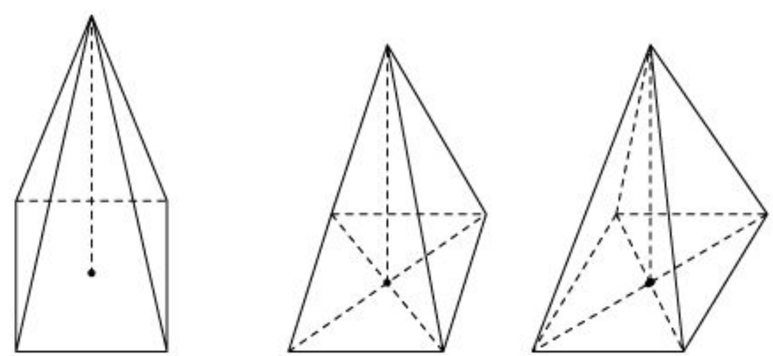


Неудачно.
Нарушены правила
параллельного проецирования.
Ребра передней и задней грани
оказались на одной линии

Неудачно.
Стороны основания
и боковые ребра
оказались на одной
линии

ОК

Правильная четырехугольная пирамида



Неудачно.
Левая боковая
грань не видна

Неудачно.
Нарушены правила
параллельного
проецирования

ОК

Задание 16: Планиметрия

Виды треугольников

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две сторны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

Треугольник, у которого все сторны равны, называется *равносторонним* или *правильным*.

Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол, то есть угол в 90°. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами*.

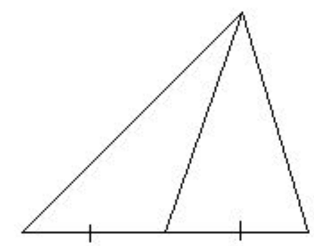
Треугольник называется *остроугольным*, если все три его угла — острые, то есть меньше 90°.

Треугольник называется *тупоугольным*, если один из его углов — тупой, то есть больше 90°.

Основные линии треугольника

Медиана

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника.

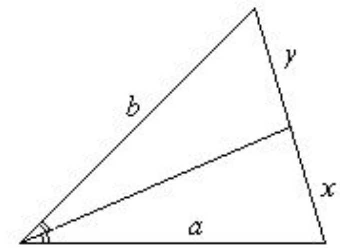


Свойства медиан треугольника

1. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется *центром тяжести* треугольника.
3. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Биссектриса

Биссектриса угла — это луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит данный угол пополам. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника.

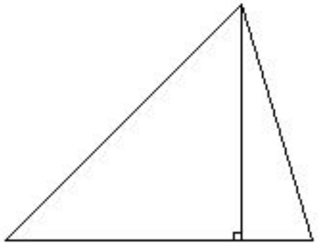


Свойства биссектрис треугольника

1. Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.
2. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилегажащим сторонам: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.
3. Точка пересечения биссектрис треугольника является [центром окружности, вписанной в этот треугольник.]

Высота

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



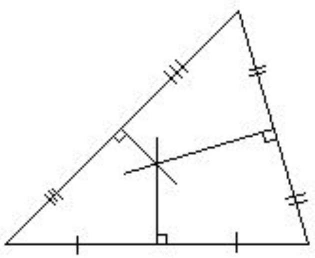
Свойства высот треугольника

1. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.
2. В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.

Срединный перпендикуляр

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром* к отрезку.

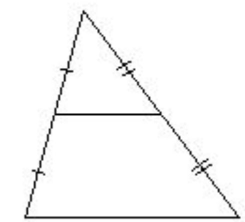
Свойства серединных перпендикуляров треугольника



1. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.
2. Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

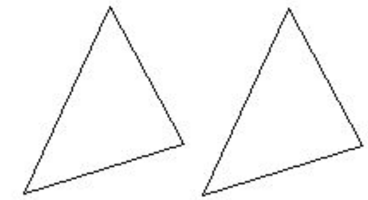


Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Формулы и соотношения

Признаки равенства треугольников

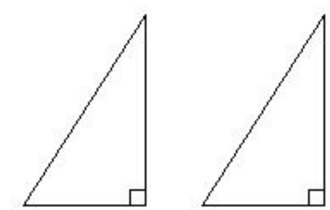


Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

- две стороны и угол между ними;
- два угла и прилежащая к ним сторона;
- три стороны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

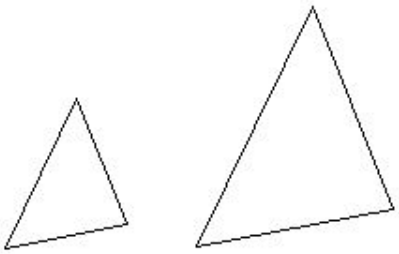
Два прямоугольных треугольника равны, если у них соответственно равны:



- гипотенуза и острый угол;
- катет и противолежащий угол;
- катет и прилежащий угол;
- два катета;
- гипотенуза и катет.

Подобие треугольников

Два треугольника *подобны,* если выполняется одно из следующих условий, называемых *признаками подобия:*



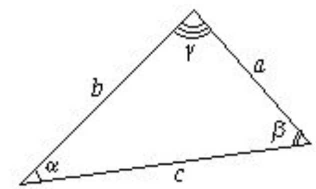
- два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;
- две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны;
- три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

В подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы и т. п.) пропорциональны.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной около треугольника окружности:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

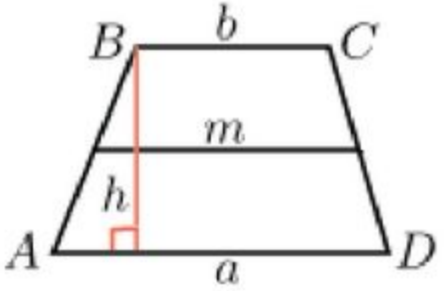


Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos_{\alpha}$$

Четырёхугольники



$m = \frac{1}{2}(a+b)$

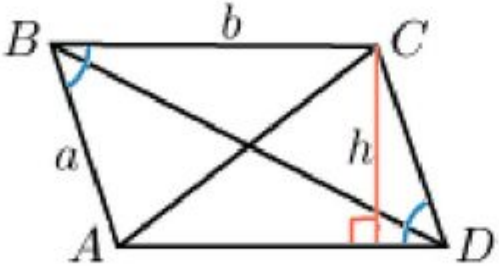
Трапеция - четырёхугольник, имеющий одну пару параллельных сторон.

Эти стороны называются основаниями трапеции, две другие - боковые стороны.

Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Средняя линия параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Площадь трапеции: $S = \dfrac{1}{2}(a+b)h$



$AB = CD, BC = DA$

$\angle A = \angle C$

$\angle A + \angle D = 180^\circ$

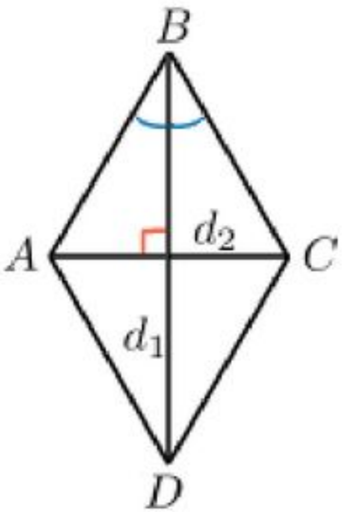
Параллелограмм - четырёхугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

Противоположные углы параллелограмма равны.

Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°.

Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

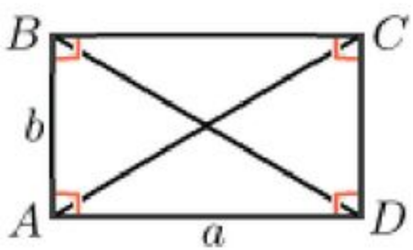
Площадь параллелограмма: $S = ab\sin\angle A = ah$



Ромб - это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба.

Площадь ромба: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

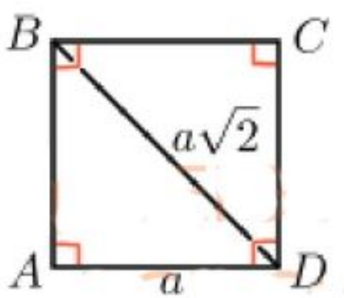


$AC = BD$

Прямоугольник - это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.

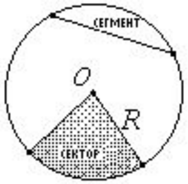
Площадь прямоугольника: $S = ab$



Квадрат - это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Другими словами, это ромб с прямыми углами.

Площадь квадрата: $S = a^2$



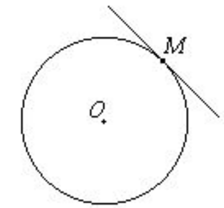
Окружностью называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся от данной точки на данном расстоянии. Данная точка называется *центром* окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, — *радиусом* окружности.

Часть плоскости, ограниченная окружностью называется *кругом*.

Круговым сектором или просто *сектором* называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

Сегментом называется часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой.

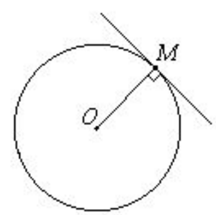
Касательная



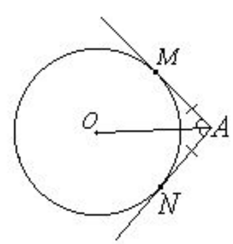
Прямая, имеющая с только одну общую точку, называется *касательной* к окружности, а их общая точка называется *точкой касания* прямой и окружности.

Свойства касательной

1. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

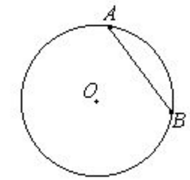


2. Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



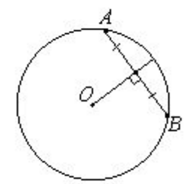
Хорда

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ее *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.

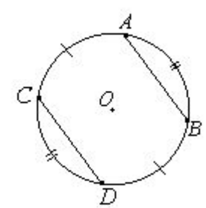


Свойства хорд

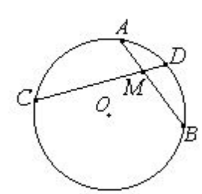
1. Диаметр (радиус), перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам. Верна и обратная теорема: если диаметр (радиус) делит пополам хорду, то он перпендикулярен этой хорде.



2. Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

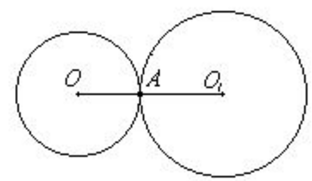


3. Если две хорды окружности, *AB* и *CD* пересекаются в точке *M*, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.



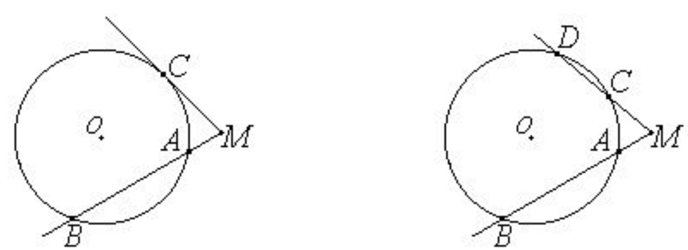
Свойства окружности

1. Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (*касательная*); иметь с ней две общие точки (*секущая*).
2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.
3. Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.



Теорема о касательной и секущей

Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $MC^2 = MA \cdot MB$.

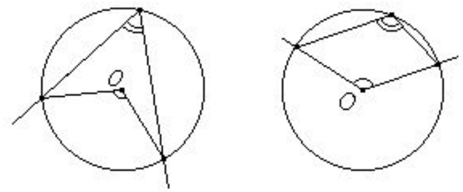


Теорема о секущих

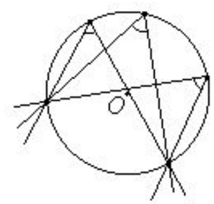
Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть. $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Свойства углов, связанных с окружностью

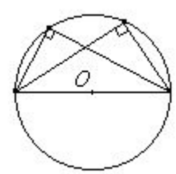
1. Вписанный угол либо равен половине соответствующего ему центрального угла, либо дополняет половину этого угла до 180°.



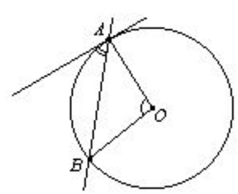
2. Углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



3. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.



4. Угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведенной через точку касания, равен половине дуги, заключенной между его сторонами.



Длины и площади

1. Длина окружности C радиуса R вычисляется по формуле:

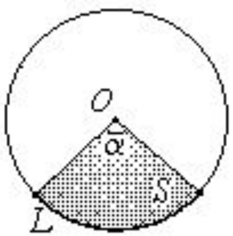
$$C = 2\pi R.$$

2. Площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле:

$$S = \pi R^2.$$

3. Длина дуги окружности L радиуса R с центральным углом α, измеренным в радианах, вычисляется по формуле:

$$L = R\alpha.$$



4. Площадь S сектора радиуса R с центральным углом в α радиан вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

Окружность и четырехугольники

- около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником;
- около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция — равнобедренная; центр окружности лежит на пересечении оси симметрии трапеции с серединным перпендикуляром к боковой стороне;
- в параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.