Хазанов В.Б.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

NUMERICAL ANALYSIS

NUMERISCHE MATHEMATIK

ANALYSE NUMÉRIQUE

MATHEMÁTICA NUMÉRICA

0. Введение

0.1. Характеристика дисциплины

0.1.1. Классификация методов решения задач

- аналитические - численные - стохастические	- большое количество приложений	- универсальные - специфические

0.1.2. Место дисциплины в Computer Science

- Теория вычислительных методов
- Вычислительная техника (Hardware)
- Программное обеспечение (Software)

Взаимосвязь и взаимодействие: дифф. ур. в част. произв. $\Rightarrow$ разреж. сист. порядка n				
до ЭВМ	50-е – 60-е	70-е – 80-е	...	сейчас
$10-10^2$	10^3-10^4	10^5-10^6		???

0.1.3. Типичные математические задачи

1. Задачи алгебры	- системы линейных алгебраических уравнений - нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений - проблема собственных значений для матриц
2. Задачи анализа	- аппроксимация функций - численное дифференцирование - численное интегрирование
3. Задачи матфизики	- обыкновенные дифференциальные уравнения - дифференциальные уравнения в частных производных - интегральные уравнения - интегро-дифференциальные уравнения
4. Задачи оптимизации	- линейное программирование - нелинейное (квадратичное) программирование - дискретное программирование - целочисленное программирование - условная оптимизация
5. Обратные задачи	- некорректные задачи

0.1.4. Содержание дисциплины, виды занятий и отчетности

Семестр	Раздел	Лекции	Практические	Лабораторные	Курсовая	Зачет	Экзамен

0.1.5. Литература

- Кублановская В.Н. *Численные методы алгебры.* – Л.: Изд. ЛКИ, 1978.
- Кублановская В.Н. *Численные методы анализа.* – Л.: Изд. ЛКИ, 1980.
- Кублановская В.Н. *Современные численные методы решения задач судостроения.* – Л.: Изд. ЛКИ, 1980.
- Хазанов В.Б. Численные методы анализа (Лабораторный практикум). – СПб.: Изд. СПбГМТУ, 2000.
- Руховец Л.А. Численные методы (Метод сеток и МКЭ для уравнений в частных производных). – СПб.: Изд. СПбГМТУ, 1997.
- Бахвалов И.С., Жидков Н.П., Кобельков Е.З. *Численные методы.* – М.: Изд. МГУ, 2007.
- Калиткин Н.Н. *Численные методы.* – СПб.: БХВ, 2011
- Рябенький В.С. *Введение в вычислительную математику* - ФИЗМАТЛИТ, 2008
- Рыжиков Ю. *Вычислительные методы.* – СПб.: БХВ, 2007
- Бахвалов И.С. Лапин А.В. Чижонков Г.М. *Численные методы в задачах и упражнениях.* – М.: Бином, 2010.
- Петров И.Б. Лебедев Ф.И. *Лекции по вычислительной математике.* – М.: Бином, 2006.
- Устинов С.М. Зимицкий В.Л. *Вычислительная математика.* – СПб.: БХВ, 2009.
- Пирумов У.Г. *Численные методы.* – СПб.: БХВ, 2011.
- Поршев С.В. *Вычислительная математика.* – СПб.: БХВ, 2004.
- Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач*, – 1990.
- Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения.* – Изд. МГУ, 1989.
- Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* – М.-Л. : Физматгиз, 1963.
- Уилкинсон Дж. *Алгебраическая проблема собственных значений.* – М.: Мир,1970.
- Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – М.: Мир, 1975.
- Мысовских И.П. *Лекции по методам вычислений.* – СПб.: Изд. СПбГУ, 1998.
- Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1977.
- Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике.* – М.: Наука, 1976.
- Оганесян Л.А., Руховец Л.А. *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений.* Ер.: АН Арм.ССР, 1979.
- Иванов А.П., Олемской И.В., Олемской Ю.В. *Численные методы. Часть 1.* – Изд. СПбГУ, 2010.
- Е. Алексеев, Чеснокова О.В. *Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9.* – НТ Пресс, 2006.
- Измаилов А.Ф., Солодов М.В. *Численные методы оптимизации.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- Загускин В.Л. *Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений.* – М.: ГИФМЛ 1960.
- Трауб Дж. *Итерационные методы решения уравнений.* – М.: Мир, 1985.

0.2. Анализ задач и вычислений

0.2.1. Анализ алгоритма

1) Временная сложность (# op)	***2) Пространственная сложность*** (объём памяти)	***3) Точность вычислений*** (δ, ε)
$O(n^{\alpha})$ – полиномиальная $O(e^{n})$ – экспоненциальная	«оперативная» «внешняя»	прямой обратный анализ ошибок

критерии входят в противоречие

Параллельные и распределённые данные и вычисления

0.2.2. Прямой и обратный анализ ошибок

$B = \varphi(A)$, A – входные данные, φ – точный алгоритм, B – выходные данные

Прямой анализ	Обратный анализ
$B_t = \varphi_t(A)$, φ_t – приближенный алгоритм, B_t – приближенные выходные данные $H = B_t - B$, $\lVert H \rVert \le \varepsilon$, $\dfrac{\lVert H \rVert}{\lVert B \rVert} \le \delta$	$B_t = \varphi(A_t)$, A_t – возмущённые входные данные $E = A_t - A$, $\lVert E \rVert \le \varepsilon$, $\dfrac{\lVert E \rVert}{\lVert A \rVert} \le \delta$

сложно (невозможно) выполнить

сопоставимость с входными ошибками

0.2.3. Обусловленность задачи и вычислений

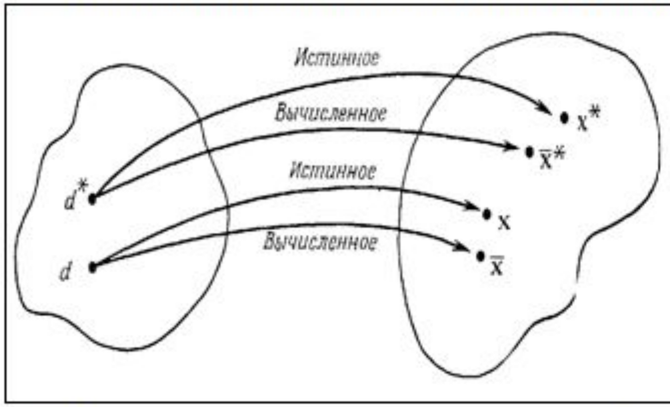
1) Виды ошибок:

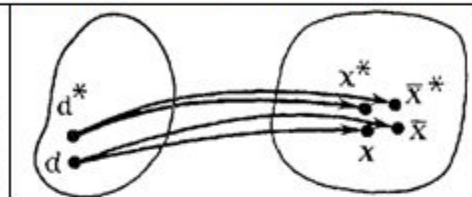
неустранимые (входные, погрешность математической модели, и т.п.)	ошибки метода	ошибки вычислений

2) Оценка близости величин

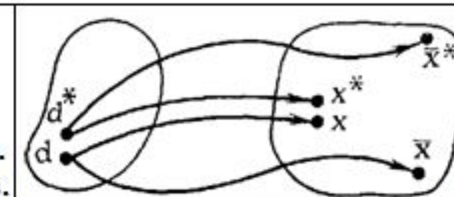
	абсолютная	относительная	«хордовая» метрика
скалярные величины / общий случай	$\Delta(x)=\lvert x-y\rvert$ / $\Delta(\mathbf{x})=\lVert\mathbf{x}-\mathbf{y}\rVert$	$\delta(x)=\dfrac{\lvert x-y\rvert}{\lvert x\rvert}$ / $\delta(\mathbf{x})=\dfrac{\lVert\mathbf{x}-\mathbf{y}\rVert}{\lVert\mathbf{x}\rVert}$	$\rho(x,y)=\dfrac{\lvert x-y\rvert}{\sqrt{1+\lvert x\rvert^2}\sqrt{1+\lvert y\rvert^2}}=\rho(x^{-1},y^{-1})$

3) Геометрическая иллюстрация обусловленности задачи и вычислений

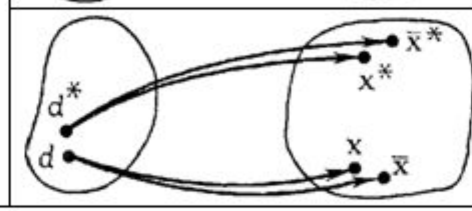




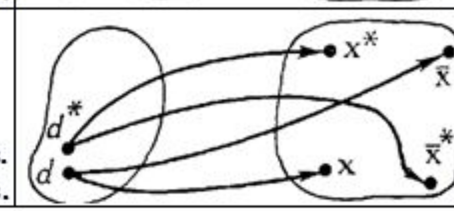
х/о.з.
х/о.в.



х/о.з.
п/о.в.

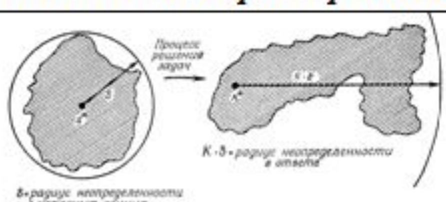


п/о.з.
х/о.в.



п/о.з.
п/о.в.

4) Количественная характеристика обусловленности задачи



δ_A – «радиус» возмущения входных данных
δ_B – «радиус» возмущения выходных данных

$$\lim_{\delta_A\to 0}\frac{\lVert\delta_B\rVert}{\lVert\delta_A\rVert}=cond$$

Пример. Вычисление значения функции $f(x)$ в точке x_0. δ –«радиус» возмущения аргумента

абсолютное: $[x_0-\delta,x_0+\delta] \Rightarrow [f(x_0-\delta),f(x_0+\delta)] \approx [f_0-\delta f_0', f_0+\delta f_0'] \Rightarrow cond_{абс}=\lvert f_0'\rvert$

относительное: $[x_0(1-\delta),x_0(1+\delta)] \Rightarrow [f(x_0-x_0\delta),f(x_0+x_0\delta)] \approx [f_0(1-x_0\delta\dfrac{f_0'}{f_0}), f_0(1+x_0\delta\dfrac{f_0'}{f_0})] \Rightarrow cond_{отн}=\lvert f_0'\rvert\dfrac{\lvert x_0\rvert}{\lvert f_0\rvert}$

0.3. Математические особенности машинной арифметики

0.3.1. Позиционная система счисления

$p > 1$ – основание системы счисления

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ – базисные числа ($\alpha_k = k$ – естественный выбор)

$$|x| = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_0 + b_{-1} p^{-1} + b_{-2} p^{-2} + \ldots \;\Rightarrow\; x = \pm b_n b_{n-1} \ldots b_0 , b_{-1} b_{-2} \ldots$$

0.3.2. Округление чисел

$$x = b_n b_{n-1} \ldots b_0 , b_{-1} b_{-2} \ldots$$

1) $x_s = b_n b_{n-1} \ldots b_s$	простейший способ	$\lvert x_s - x \rvert \le p^s$, if $\alpha_k = k$	$\operatorname{sign}(x_s - x) = -\operatorname{sign} x$
2) $x_s^* = \begin{cases} x_s & \text{if } \lvert x_s - x \rvert < \frac{1}{2} p^s \\ x_s + p^s & \text{if } \lvert x_s - x \rvert > \frac{1}{2} p^s \\ x_s \vee x_s + p^s & \text{if } \lvert x_s - x \rvert = \frac{1}{2} p^s \end{cases}$		$\lvert x_s - x \rvert \le \frac{1}{2} p^s$, if $\alpha_k = k$	
3) $x_s = b_n b_{n-1} \ldots b_s$	p – нечетное	$\lvert x_s - x \rvert \le \frac{1}{2} p^s$, if $\alpha_k = \frac{2k + 1 - p}{2}$	$p = 3,\ \alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1$

0.3.3. Фиксированная и плавающая запятая

1) fi Фиксированная запятая (точка)

$$\pm \underbrace{\overbrace{\text{целая часть}}^{r} \;,\; \overbrace{\text{дробная часть}}^{t}}_{\tau} \qquad x = a, b$$

$\boxed{-p^r < x < p^r}$ – область представления

$\boxed{\lvert x - x_{\tau,r} \rvert < p^{-t}}$ – абсолютная ошибка представления числа

2) fl Плавающая запятая (точка)

$$\pm \underbrace{\overbrace{\text{мантисса}}^{t} \;\pm\; \overbrace{\text{порядок}}^{r}}_{\tau} \qquad x = a \cdot p^b$$

$\boxed{-p^{p^r} \lesssim x \lesssim p^{p^r}}$ – область представления

$\boxed{\dfrac{\lvert x - x_{\tau,r} \rvert}{\lvert x \rvert} < p^{-t}}$ – относительная ошибка представления числа

0.3.4. Особенности машинного представления чисел

1) fi Фиксированная запятая (точка)

$\boxed{fi(x) = x + \nu}$ – округление числа $\boxed{|\nu| \le \frac{1}{2} p^{-t}}$ – лучшая оценка $\boxed{\omega \approx p^{-t}}$ – машинный нуль

2) fl Плавающая запятая (точка)

$\boxed{fl(x) = x(1+\varepsilon)}$ – округление числа $\boxed{|\varepsilon| \le \frac{1}{2} p^{-t}}$ if $fl(x) \ne 0,\ x \ne 0$ else $\varepsilon = -1$ (!!!!) $\boxed{\omega \approx p^{-(p^{r})}}$ – машинный нуль

0.3.5. Арифметические операции

1) fi Фиксированная запятая (точка)

$fi(x \pm y) = x \pm y$		if $\lvert x \pm y \rvert \le p^{r}$
$fi(x \,{}^{\times}\!/_{\div}\, y) = (x \,{}^{\times}\!/_{\div}\, y) + \nu$	$\lvert\nu\rvert \le \frac{1}{2} p^{-t}$	

2) fl Плавающая запятая (точка)

$fl(x \,{}^{+}_{\times}\,{}^{-}_{\div}\, y) = (x \,{}^{+}_{\times}\,{}^{-}_{\div}\, y)(1+\varepsilon)$	$\lvert\varepsilon\rvert \le \frac{1}{2} p^{-t}$ if $fl(x \,{}^{+}_{\times}\,{}^{-}_{\div}\, y) \ne 0,\ (x \,{}^{+}_{\times}\,{}^{-}_{\div}\, y) \ne 0$	else $fl(x \,{}^{+}_{\times}\,{}^{-}_{\div}\, y) = 0,\ (x \,{}^{+}_{\times}\,{}^{-}_{\div}\, y) \ne 0$ $\varepsilon = -1$ (!!!!)

3) Вычисления с удвоенной точностью

$fi_2\left(\dfrac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i}{\beta}\right) = \dfrac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i}{\beta} + \nu, \quad \lvert\nu\rvert \le \frac{1}{2} p^{-t}$	$fl_2\left(\dfrac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i}{\beta}\right) = \dfrac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i}{\beta}(1+\varepsilon), \quad \lvert\varepsilon\rvert \le \frac{1}{2} p^{-t}$ if … else $\varepsilon = -1$ …

0.3.6. Порядок выполнения операций

1) $\boxed{z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\ \alpha_i\ \text{– одного знака}}$

$$fl(z)=(\ldots((\alpha_1+\alpha_2)(1+\varepsilon_1)+\alpha_3)(1+\varepsilon_3)+\ldots+\alpha_n)(1+\varepsilon_{n-1})=(\alpha_1+\alpha_2)\prod_{i=1}^{n-1}(1+\varepsilon_i)+\alpha_3\prod_{i=2}^{n-1}(1+\varepsilon_i)+\ldots+\alpha_n(1+\varepsilon_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(1+\mathrm{E}_i)$$

$\boxed{fl(z)=z+\Delta,\ \Delta=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{E}_i,}$ $\boxed{|\mathrm{E}_1|\underset{\approx}{\le}\frac{n-1}{2}p^{-t+1},\ |\mathrm{E}_i|\underset{\approx}{\le}\frac{n+1-i}{2}p^{-t+1},\ i=2,\ldots,n}$

$\min\Delta\ \Rightarrow$ при суммировании в порядке возрастания $|\alpha_i|$

при суммировании по полному двоичному дереву: $|\mathrm{E}_i|\underset{\approx}{\le}\frac{1+\log_2 n}{2}p^{-t+1}$

2) $\boxed{z=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i,\ \ |\alpha_1|\le|\alpha_2|\le\ldots\le|\alpha_n|}$

$\alpha_1\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_m<1\ \Rightarrow\ (\alpha_1\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_m)\alpha_2\alpha_{m-1}\ldots\alpha_l<1\ \Rightarrow\ \ldots$

3) $\boxed{z=\sqrt{x^2+y^2}}$

$\alpha=\max\{|x|,|y|\}\ \Rightarrow\ z=\alpha\sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2}$

$u=fl(\left(\frac{y}{x}\right)^2)=\left(\left(\frac{y}{x}\right)(1+\varepsilon_1)\right)^2(1+\varepsilon_2)$ $v=fl(1+u)=(1+u)(1+\varepsilon_3)$ $w=fl(\sqrt{v})=\sqrt{v}(1+\varepsilon_4)$ $t=fl(\alpha w)=\alpha w(1+\varepsilon_5)$	$fl(z)=(1+\varepsilon_5)(1+\varepsilon_4)\sqrt{[x^2+y^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)](1+\varepsilon_3)}=$ $=\sqrt{x^2(1+\mathrm{E}_1)+y^2(1+\mathrm{E}_2)},$ $|\mathrm{E}_1|\underset{\approx}{\le}\frac{3}{2}p^{-t+1},|\mathrm{E}_2|\underset{\approx}{\le}\frac{5}{2}p^{-t+1}$

0.4. Литература к введению

Воеводин В.В. *Вычислительные основы линейной алгебры.* – М.: Наука, 1977.

Райс Дж. *Матричные вычисления и математическое обеспечение*. – М.: Мир, 1984.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. *Машинные методы математических вычислений.* – М.: Мир, 1980.

ЧАСТЬ 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Глава 1. Решение СЛАУ, обращение матриц и вычисление определителей

- **Решение системы линейных алгебраических уравнений** $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$, $\mathbf{A}$ – $m \times n$, $\mathbf{f}$ – m, $\mathbf{x}$ – n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = f_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix},$$

- **Решение матричного уравнения** $\mathbf{AX} = \mathbf{F}$, $\mathbf{A}$ – $n \times n$, $\mathbf{F}$ – $n \times l$, $\mathbf{X}$ – $n \times l$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1l} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nl} \end{bmatrix}$$

частный случай: $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ $\quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- **Вычисление определителя** $|\mathbf{A}| \equiv \det \mathbf{A}$

Обозначения: $\mathbf{A}_{i*} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$ – строка i; $\mathbf{A}_{*j} = [a_{1j} \quad a_{2j} \quad \cdots \quad a_{nj}]^T$ – стролбец j матрицы $\mathbf{A}$, $\quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \underbrace{1}_{i} & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ – столбец i матрицы $\mathbf{I}$

1.1. Прямые методы решения СЛАУ, обращения матриц и вычисления определителей

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}, \ |\mathbf{A}| \neq 0$$

1.1.1. Метод Гаусса

$$(\mathbf{A} \ \ |\mathbf{f}) \Rightarrow (\mathbf{R} \ \ |\mathbf{g}) \Rightarrow (\mathbf{I} \ \ |\mathbf{x})$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & f_n \end{array}\right) \overset{\text{прямой ход}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} & g_1 \\ 0 & 1 & \cdots & r_{2n} & g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & g_n \end{array}\right) \overset{\text{обратный ход}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{array}\right)$$

а) Схема единственного деления $\quad a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots, |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

Прямой ход	$\mathbf{R}_{k*} = a_{kk}^{(k-1)^{-1}} \mathbf{A}_{k*}^{(k-1)}$, $g_k = a_{kk}^{(k-1)^{-1}} f_k^{(k-1)}$, $k = 1,2,\ldots,n$ $\mathbf{A}_{i*}^{(k)} = \mathbf{A}_{i*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \mathbf{R}_{k*}$, $f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} g_k$, $i = k+1,\ldots,n$	
Обратный ход		$x_n = g_n$, $x_k = g_k - \sum_{k+1}^{n} r_{ki} x_j$, $k = n-1,\ldots,1$

б) Полный выбор ведущего элемента $\quad \left|a_{pq}^{(k-1)}\right| = \max_{i,j \geq k} \left|a_{ij}^{(k-1)}\right| \Rightarrow$ перестановка $\begin{cases} \text{строк} & p \Leftrightarrow k \\ \text{столбцов} & q \Leftrightarrow k \end{cases}$

в) Частичный выбор ведущего элемента $\quad \left|a_{pk}^{(k-1)}\right| = \max_{i \geq k} \left|a_{ik}^{(k-1)}\right| \Rightarrow$ перестановка строк $\ p \Leftrightarrow k$

г) Решение матричного уравнения $\quad (\mathbf{A} \ \ |\mathbf{F}) \Rightarrow (\mathbf{R} \ \ |\mathbf{G}) \Rightarrow (\mathbf{I} \ \ |\mathbf{X})$

Прямой ход	$\mathbf{R}_{k*} = a_{kk}^{(k-1)^{-1}} \mathbf{A}_{k*}^{(k-1)}$, $\mathbf{G}_{k*} = a_{kk}^{(k-1)^{-1}} \mathbf{F}_{k*}^{(k-1)}$, $k = 1,2,\ldots,n$ $\mathbf{A}_{i*}^{(k)} = \mathbf{A}_{i*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \mathbf{R}_{k*}, \mathbf{F}_{i*}^{(k)} = \mathbf{F}_{i*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \mathbf{G}_{k*}$, $i = k+1,\ldots,n$	
Обратный ход		$\mathbf{X}_{n*} = \mathbf{G}_{n*}$, $\mathbf{X}_{k*} = \mathbf{G}_{k*} - \sum_{k+1}^{n} r_{ki} \mathbf{X}_{j*}$, $k = n-1,\ldots,1$

д) Вычисление определителя $\quad |\mathbf{A}| = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k-1)} & \text{а) без перестановок} \\ (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k-1)} & \text{б), в)} \quad \sigma = \ \#\text{перестановок} \end{cases}$

1.1.2. Компактная схема (метод LU-, LR- разложения)

$$\mathbf{A} = \mathbf{LR} \Rightarrow (\mathbf{LR})\mathbf{x} = \mathbf{f} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{Lg} = \mathbf{f} \\ \mathbf{Rx} = \mathbf{g} \end{array}\right.$$

а) Схема единственного деления $a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots, |\mathbf{A}| \neq 0$

Прямой ход	$\mathbf{L}_{*1} = \mathbf{A}_{*1},\ \mathbf{R}_{1*} = l_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1*},$ $\mathbf{L}_{*k} = \mathbf{A}_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{L}_{*i} r_{ik},\ \mathbf{R}_{k*} = l_{kk}^{-1}(\mathbf{A}_{k*} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}\mathbf{R}_{i*}),\ i = k+1,\ldots,n$	$g_1 = l_{11}^{-1} f_1,$ $g_k = l_{kk}^{-1}(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} g_i),\ k = 2,\ldots,n$
Обратный ход		$x_n = g_n,\ x_k = g_k - \sum_{k+1}^{n} r_{ki} x_j,\ k = n-1,\ldots,1$

б) Полный выбор ведущего элемента не эффективен

в) Частичный выбор ведущего элемента $\left|a_{pk}^{(k-1)}\right| = \max_{i \geq k} \left|a_{ik}^{(k-1)}\right| \Rightarrow$ перестановка строк $p \Leftrightarrow k$

г) Решение матричного уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{F}$

Прямой ход	$\mathbf{L}_{*1} = \mathbf{A}_{*1},\ \mathbf{R}_{1*} = l_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1*},$ $\mathbf{L}_{*k} = \mathbf{A}_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{L}_{*i} r_{ik},\ \mathbf{R}_{k*} = l_{kk}^{-1}(\mathbf{A}_{k*} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} R_{i*}),\ i = k+1,\ldots,n$	$\mathbf{G}_{1*} = l_{11}^{-1}\mathbf{F}_{1*},$ $\mathbf{G}_{k*} = l_{kk}^{-1}(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}\mathbf{G}_{i*}),\ k = 2,\ldots,n$
Обратный ход		$\mathbf{X}_{n*} = \mathbf{G}_{n*},\ \mathbf{X}_{k*} = \mathbf{G}_{k*} - \sum_{j=k+1}^{n} r_{ki}\mathbf{X}_{j*},\ k = n-1,\ldots,1$

д) Вычисление определителя
$$|\mathbf{A}| = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} l_{kk} & \text{а) без перестановок} \\ (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} l_{kk} & \text{б), в)} \quad \sigma = \#\text{перестановок} \end{cases}$$

Преимущества:

1. Возможность выполнения «векторных» операций с удвоенной точностью (fl_2) $\Rightarrow$ повышение точности вычислений
2. Экономное решение систем с одной и той же (разложенной) матрицей и различными правыми частями

Единственность разложения а) (доказывается методом математической индукции)

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{n=1}\quad l_{11}=a_{11},\ r_{11}=1\ -\exists!\\ \underline{n-1}\quad \mathbf{A}_{n-1}=\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{R}_{n-1}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\underline{n}\quad \mathbf{A}_n=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{u}_n\\ \mathbf{v}_n^T & a_{nn}\end{bmatrix},\ \mathbf{L}_n=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{n-1} & \\ \mathbf{q}_n^T & l_{nn}\end{bmatrix},\ \mathbf{R}_n=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{n-1} & \mathbf{p}_n\\ & 1\end{bmatrix}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_n=\mathbf{L}_n\mathbf{R}_n=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{R}_{n-1} & \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{p}_n\\ \mathbf{q}_n^T\mathbf{R}_{n-1} & \mathbf{q}_n^T\mathbf{p}_n+l_{nn}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{p}_n=\mathbf{u}_n\\ \mathbf{q}_n^T\mathbf{R}_{n-1}=\mathbf{v}_n^T\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mathbf{p}_n-\exists!\\ \mathbf{q}_n-\exists!\end{array} \Rightarrow l_{nn}=a_{nn}-\mathbf{q}_n^T\mathbf{p}_n$$

Связь с методом Гаусса 1.1.1: $\prod(\mathbf{I}+\alpha_{ij}\mathbf{I}_{ij})\ |\mathbf{Ax}=\mathbf{f}\ \Rightarrow \mathbf{Rx}=\mathbf{g}\ \Rightarrow \mathbf{M}=\prod(\mathbf{I}+\alpha_{ij}\mathbf{I}_{ij}),\ \mathbf{MA}=\mathbf{R}$ 1.1.2: $\mathbf{A}=\mathbf{LR}$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& a_{nn}^{(n-1)^{-1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 &&& \\ & 1 && \\ && \ddots && \\ &&& 1 & \\ &&& -a_{n,n-1}^{(n-2)^{-1}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && \ddots && \\ &&& a_{n-1,n-1}^{(n-2)^{-1}} & \\ &&&& 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ & -a_{n2}^{(1)} &&& 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & 1 &&& \\ & -a_{32}^{(1)} & 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & a_{22}^{(1)^{-1}} &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ -a_{n1} &&&& 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & 1 &&& \\ -a_{31} && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 &&&& \\ -a_{21} & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}^{-1} &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{bmatrix}=\mathbf{L}^{-1}$$

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}a_{11} &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 &&&& \\ a_{21} & 1 &&& \\ a_{31} && 1 && \\ \vdots &&& \ddots & \\ a_{n1} &&&& 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & a_{22}^{(1)} &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & 1 &&& \\ & a_{32}^{(1)} & 1 && \\ & \vdots && \ddots & \\ & a_{n2}^{(1)} &&& 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& a_{nn}^{(n-1)}\end{bmatrix}$$

1.1.3. Метод квадратных корней (метод Холецкого)

$$\mathbf{A} > 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \Rightarrow (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)\mathbf{x} = \mathbf{f} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{g} = \mathbf{f} \\ \mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{g} \end{cases}$$

а) Схема единственного деления $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, |\mathbf{A}| > 0$

Прямой ход	$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$, $\mathbf{L}_{*1} = l_{11}^{-1}\mathbf{A}_{*1}$, $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^2}$, $\mathbf{L}_{*k} = l_{kk}^{-1}(\mathbf{A}_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{L}_{*i} l_{ki})$, $k = 2,\ldots,n$	$g_1 = l_{11}^{-1} f_1$, $g_k = l_{kk}^{-1}(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} g_i)$, $k = 2,\ldots,n$
Обратный ход		$x_n = l_{11}^{-1} g_n$, $x_k = l_{kk}^{-1}(g_k - \sum_{j=k+1}^{n} l_{ik} x_j)$, $k = n-1,\ldots,1$

б)в) Выбор ведущего элемента перестановка $\begin{cases} \text{строк} & p \Leftrightarrow k \\ \text{столбцов} & p \Leftrightarrow k \end{cases}$ не эффективен

г) Решение матричного уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{F}$

Прямой ход	$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$, $\mathbf{L}_{*1} = l_{11}^{-1}\mathbf{A}_{*1}$, $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^2}$, $\mathbf{L}_{*k} = l_{kk}^{-1}(\mathbf{A}_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{L}_{*i} l_{ki})$, $k = 2,\ldots,n$	$\mathbf{G}_{1*} = l_{11}^{-1}\mathbf{F}_{1*}$, $\mathbf{G}_{k*} = l_{kk}^{-1}(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}\mathbf{G}_{i*})$, $k = 2,\ldots,n$
Обратный ход		$\mathbf{X}_{n*} = l_{11}^{-1}\mathbf{G}_{n*}$, $\mathbf{X}_{k*} = l_{kk}^{-1}(\mathbf{G}_{k*} - \sum_{k+1}^{n} r_{ki}\mathbf{X}_{j*}$, $k = n-1,\ldots,1$

д) Вычисление определителя $|\mathbf{A}| = \prod_{k=1}^{n} l_{kk}^2$

е) Симметричная матрица $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \Rightarrow (\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T)\mathbf{x} = \mathbf{f} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{g} = \mathbf{f} \\ \mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{g} \end{cases}$

Прямой ход	$d_1 = a_{11}$, $\mathbf{L}_{*1} = d_1^{-1}\mathbf{A}_{*1}$, $d_{kk} = a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^2$, $\mathbf{L}_{*k} = d_k^{-1}(\mathbf{A}_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{L}_{*i} l_{ki})$, $k = 2,\ldots,n$	$g_1 = d_1^{-1} f_1$, $g_k = d_k^{-1}(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} g_i)$, $k = 2,\ldots,n$
Обратный ход		$x_n = d_1^{-1} g_n$, $x_k = d_k^{-1}(g_k - \sum_{j=k+1}^{n} l_{ik} x_j)$, $k = n-1,\ldots,1$

1.1.4. Методы решения систем с ленточными (трехдиагональными) матрицами

$$a_{ij} = 0 \text{ if } |i-j| > \beta \Rightarrow \text{ширина ленты} = \begin{cases} \beta \\ 2\beta+1 \end{cases}, \quad (\beta = 1,2,3,\ldots)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & l_{n-1,n-1} & \\ & & & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & & & \\ & r_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ & & & & r_{n,n} \end{bmatrix} \quad \beta = 1$$

а) Метод LU-, LR- разложения

$$r_{kk} = 1, \ k = 1,2,\ldots,n$$

б) Метод прогонки решения

$$\begin{cases} c_0 x_0 - b_0 x_1 = f_0 \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 1,\ldots,n-1 \\ -a_n x_{n-1} + c_n x = f_n \end{cases}$$

	Прямой ход	Обратный ход
правая	$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0},\ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0};\ \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i},\ \beta_{i+1} = \frac{f_i + \beta_i a_i}{c_i - \alpha_i a_i},\ i = 1,\ldots,n$	$x_n = \beta_{n+1},\ x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = n-1,\ldots,0$
левая	$\xi_n = \frac{a_n}{c_n},\ \eta_n = \frac{f_n}{c_n};\ \xi_i = \frac{a_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i},\ \eta_i = \frac{f_i + \eta_{i+1} b_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i},\ i = n-1,\ldots,0$	$x_0 = \eta_0,\ x_{i+1} = \xi_{i+1} x_i + \eta_{i+1},\ i = 0,\ldots,n-1$
встречная к компоненте с номером m	$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \beta_1 = \frac{f_0}{c_0};\ \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \beta_{i+1} = \frac{f_i + \beta_i a_i}{c_i - \alpha_i a_i},\ i = 1,\ldots,m-1$ $\xi_n = \frac{a_n}{c_n},\ \eta_n = \frac{f_n}{c_n};\ \xi_i = \frac{a_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i},\ \eta_i = \frac{f_i + \eta_{i+1} b_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i},\ i = n-1,\ldots,m$	$x_m = \frac{\eta_m + \xi_m \beta_m}{1 - \xi_m \alpha_m}$ $x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = m-1,\ldots,0;$ $x_{i+1} = \xi_{i+1} x_i + \eta_{i+1},\ i = m,\ldots,n-1.$
циклическая		
с окаймлением		

1.1.5. Метод Жордана

$$(\mathbf{A}\;|\mathbf{f})\Rightarrow(\mathbf{I}\;|\mathbf{x})$$

а) Схема единственного деления

$$a_{11}\neq 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,\ \ldots,\ |\mathbf{A}|\neq 0$$

$\mathbf{A}_{k*}^{(k)}=a_{kk}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{A}_{k*}^{(k-1)},\ f_k^{(k)}=a_{kk}^{(k-1)^{-1}}f_k^{(k-1)},\ k=1,2,\ldots,n$ $\mathbf{A}_{i*}^{(k)}=\mathbf{A}_{i*}^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)}\mathbf{A}_{k*}^{(k)},\ f_i^{(k)}=f_i^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)}g_k,\ i=1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n$	$x_k=f_k^{(n)},\ k=1,2,\ldots,n$

б) Полный выбор ведущего элемента не эффективен

в) Частичный выбор ведущего элемента $\left|a_{pk}^{(k-1)}\right|=\max\limits_{i\geq k}\left|a_{ik}^{(k-1)}\right|\Rightarrow$ перестановка строк $p\Leftrightarrow k$

г) Решение матричного уравнения $(\mathbf{A}\;|\mathbf{F})\Rightarrow(\mathbf{I}\;|\mathbf{X})$

$\mathbf{A}_{k*}^{(k)}=a_{kk}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{A}_{k*}^{(k-1)},\ \mathbf{F}_{k*}^{(k)}=a_{kk}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{F}_{k*}^{(k-1)},\ k=1,2,\ldots,n$ $\mathbf{A}_{i*}^{(k)}=\mathbf{A}_{i*}^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)}\mathbf{A}_{k*}^{(k)},\mathbf{F}_{i*}^{(k)}=\mathbf{F}_{i*}^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)}\mathbf{G}_{k*},\ i=1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n$	$\mathbf{X}_{k*}=\mathbf{F}_{k*}^{(n)},,\ k=1,2,\ldots,n$

д) Вычисление определителя

$$|\mathbf{A}|=\begin{cases}\prod\limits_{k=1}^{n}a_{kk}^{(k-1)} & \text{а) без перестановок}\\ (-1)^{\sigma}\prod\limits_{k=1}^{n}a_{kk}^{(k-1)} & \text{б), в)}\quad \sigma=\ \#\text{перестановок}\end{cases}$$

е) Схема оптимального исключения

$\alpha_k=a_{kk}-\sum\limits_{j=1}^{k-1}a_{kj}a_{jk}^{(k-1)},\ \mathbf{A}_{k*}^{(k)}=\alpha_k^{-1}\mathbf{A}_{k*}^{(k-1)},\ f_k^{(k)}=\alpha_k^{-1}f_k^{(k-1)},\ k=1,2,\ldots,n$ $\mathbf{A}_{i*}^{(k)}=\mathbf{A}_{i*}^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)}\mathbf{A}_{k*}^{(k)},\ f_i^{(k)}=f_i^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)}g_k,\ i=1,\ldots,k-1$	$x_k=f_k^{(n)},\ k=1,2,\ldots,n$

ж) Вычисление обратной матрицы

$$\mathbf{C}_0=\mathbf{A},\ \mathbf{C}_1,\ \ldots,\ \mathbf{C}_n=\mathbf{A}^{-1}$$

$$c_{ij}^{(k)}=\begin{cases} c_{kk}^{(k)^{-1}} & i=k,\quad j=k\\ c_{ik}^{(k-1)}c_{kk}^{(k)^{-1}} & i\neq k,\quad j=k\\ -c_{kk}^{(k)^{-1}}c_{kj}^{(k-1)} & i=k,\quad j\neq k\\ c_{ij}^{(k-1)}-c_{ik}^{(k-1)}c_{kk}^{(k)^{-1}}c_{kj}^{(k-1)} & i\neq k,\quad j\neq k\end{cases}\qquad \begin{matrix}k=1,2,\ldots,n\\ i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,n\end{matrix}$$

1.1.6. Решение систем с блочными матрицами

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{f}\;\Leftrightarrow\;\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1n}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \vdots\\ \mathbf{f}_n\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{ij}-n_i\times n_j,\ \mathbf{f}_i-n_i,\ \mathbf{x}_i-n_i$$

Обозначения:
$\mathbf{A}_{i*}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} & \cdots & \mathbf{A}_{in}\end{bmatrix}$ – блочная строка i матрицы **A**
$\mathbf{A}_{*j}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{1j} & \mathbf{A}_{2j} & \cdots & \mathbf{A}_{nj}\end{bmatrix}^T$ – блочный стролбец j матрицы **A**

а) Аналог метода Гаусса

$$(\mathbf{A}\ |\mathbf{f})\Rightarrow(\mathbf{R}\ |\mathbf{g})\Rightarrow(\mathbf{I}\ |\mathbf{x})$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} & \mathbf{f}_1\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} & \mathbf{f}_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} & \mathbf{f}_n\end{array}\right)\overset{\text{прямой ход}}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{I} & \mathbf{R}_{12} & \cdots & \mathbf{R}_{1n} & \mathbf{g}_1\\ 0 & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{R}_{2n} & \mathbf{g}_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{g}_n\end{array}\right)\overset{\text{обратный ход}}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{x}_1\\ 0 & \mathbf{I} & \cdots & 0 & \mathbf{x}_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{x}_n\end{array}\right)$$

Прямой ход	$\mathbf{R}_{k*}=\mathbf{A}_{kk}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{A}_{k*}^{(k-1)},\ \mathbf{g}_k=\mathbf{A}_{kk}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{f}_k^{(k-1)},\ k=1,2,\dots,n$ $\mathbf{A}_{i*}^{(k)}=\mathbf{A}_{i*}^{(k-1)}-\mathbf{A}_{ik}^{(k-1)}\mathbf{R}_{k*},\ \mathbf{f}_i^{(k)}=\mathbf{f}_i^{(k-1)}-\mathbf{A}_{ik}^{(k-1)}\mathbf{g}_k,\ i=k+1,\dots,n$	
Обратный ход		$\mathbf{x}_n=\mathbf{g}_n,\ \mathbf{x}_k=\mathbf{g}_k-\sum\limits_{k+1}^{n}\mathbf{R}_{kj}\mathbf{x}_j,\ k=n-1,\dots,1$

б) Аналог LU-(LR-) разложения

$$\mathbf{A}=\mathbf{LR}\;\Rightarrow\;(\mathbf{LR})\mathbf{x}=\mathbf{f}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\mathbf{Lg}=\mathbf{f}\\ \mathbf{Rx}=\mathbf{g}\end{cases}$$

Прямой ход	$\mathbf{L}_{*1}=\mathbf{A}_{*1},\ \mathbf{R}_{1*}=\mathbf{L}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1*},$ $\mathbf{L}_{*k}=\mathbf{A}_{*k}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\mathbf{L}_{*i}\mathbf{R}_{ik},\ \mathbf{R}_{k*}=\mathbf{L}_{kk}^{-1}(\mathbf{A}_{k*}-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\mathbf{L}_{ki}\mathbf{R}_{i*}),\ i=k+1,\dots,n$	$\mathbf{g}_1=\mathbf{L}_{11}^{-1}\mathbf{f}_1,$ $\mathbf{g}_k=\mathbf{L}_{kk}^{-1}(\mathbf{f}_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\mathbf{L}_{ki}\mathbf{g}_i),\ k=2,\dots,n$
Обратный ход		$\mathbf{x}_n=\mathbf{g}_n,\ \mathbf{x}_k=\mathbf{g}_k-\sum\limits_{k+1}^{n}\mathbf{R}_{kj}\mathbf{x}_j,\ k=n-1,\dots,1$

1.1.7. Метод вращения $\quad \mathbf{QA} = \mathbf{R},\ \mathbf{Qf} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{Q}|\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{Rx} = \mathbf{g},\ \mathbf{Q} = \prod_{1\le i<j\le n} \mathbf{T}_{ij}$

а) Свойства матрицы вращения

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \cdots & s & & \cdots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & -s & \cdots & c & & \cdots \\ & & & & & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad i \qquad\quad j \end{array}$$

1. $\mathbf{T}_{ij}^T = \mathbf{T}_{ij}^{-1}$
2. $\det \mathbf{T}_{ij} = 1$
3. $\mathbf{B} = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}$
4. $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{T}_{ij}^T$

$\mathbf{B}_{k*} = \mathbf{A}_{k*}$ $\quad \mathbf{C}_{*k} = \mathbf{A}_{*k}$ $\quad k \ne i, j$

$\mathbf{B}_{i*} = c\mathbf{A}_{i*} + s\mathbf{A}_{j*}$ $\quad \mathbf{C}_{*i} = c\mathbf{A}_{*i} + s\mathbf{A}_{*j}$

$\mathbf{B}_{j*} = -s\mathbf{A}_{i*} + c\mathbf{A}_{j*}$ $\quad \mathbf{C}_{*j} = -s\mathbf{A}_{*i} + c\mathbf{A}_{*j}$

б) Решение системы уравнений: аннулирование коэффициента в позиции (j, i)

Прямой ход $1 \le i < j \le n$	$c = \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ii}^2}},\ s = \dfrac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ii}^2}},\quad \mathbf{B} = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}$ $\mathbf{B}_{i*} = c\mathbf{A}_{i*} + s\mathbf{A}_{j*},\ \mathbf{B}_{j*} = -s\mathbf{A}_{i*} + c\mathbf{A}_{j*},\ \mathbf{B}_{k*} = \mathbf{A}_{k*}\ \ k \ne i, j$	$\mathbf{h} = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{f}$ $h_i = cf_i + sf_j,\ h_j = -sf_i + cf_j,\ h_k = f_k\ \ k \ne i, j$
Обратный ход	$\mathbf{Rx} = \mathbf{g}$	$x_n = r_{nn}^{-1} g_n,\ x_k = r_{kk}^{-1}(g_k - \sum_{k+1}^{n} r_{ki} x_j),\ k = n-1, \ldots, 1$

в) Решение матричного уравнения $\quad \mathbf{AX} = \mathbf{F}$

Прямой ход $1 \le i < j \le n$	$c = \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ii}^2}},\ s = \dfrac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ii}^2}},\quad \mathbf{B} = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}$ $\mathbf{B}_{i*} = c\mathbf{A}_{i*} + s\mathbf{A}_{j*},\ \mathbf{B}_{j*} = -s\mathbf{A}_{i*} + c\mathbf{A}_{j*},\ \mathbf{B}_{k*} = \mathbf{A}_{k*}\ \ k \ne i, j$	$\mathbf{H} = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{F}$ $\mathbf{H}_{i*} = c\mathbf{F}_{i*} + s\mathbf{F}_{j*},\ \mathbf{H}_{j*} = -s\mathbf{F}_{i*} + c\mathbf{F}_{j*},\ \mathbf{H}_{k*} = \mathbf{F}_{k*}\ \ k \ne i, j$
Обратный ход	$\mathbf{RX} = \mathbf{G}$	$\mathbf{X}_{n*} = r_{nn}^{-1}\mathbf{G}_{n*},\ \mathbf{X}_{k*} = r_{kk}^{-1}(\mathbf{G}_{k*} - \sum_{k+1}^{n} r_{ki}\mathbf{X}_{j*}),\ k = n-1, \ldots, 1$

г) Вычисление определителя $\quad |\mathbf{A}| = \prod_{k=1}^{n} r_{kk}$

Преимущества:

1. Нет необходимости выбора ведущего элемента.
2. Нет деления на «нуль» или «малое» число $\Rightarrow$ повышение точности вычислений.

1.1.8. Метод отражения $\mathbf{QA} = \mathbf{R}$, $\mathbf{Qf} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{Q}|\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{Rx} = \mathbf{g}$, $\mathbf{Q} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{U}_i$

а) Свойства матрицы вращения $\mathbf{U}_i = \mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$, $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$

1. $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$ 3. $\mathbf{Uw} = -\mathbf{w}$ 5. $\mathbf{Uy} = \mathbf{y} - 2(\mathbf{w},\mathbf{y})\mathbf{w}$ 7. $\mathbf{Us} = \alpha\mathbf{e}_1 \Leftrightarrow \mathbf{w} = \rho^{-1}(\mathbf{s} - \alpha\mathbf{e}_1)$

2. $\det\mathbf{U} = -1$ 4. $\mathbf{Uz} = -\mathbf{z}$, $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}$ 6. $\mathbf{UA} = \mathbf{A} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{A}$ $\rho = \|\mathbf{s} - \alpha\mathbf{e}_1\|_2$, $\alpha = -\mathrm{sign}(\mathbf{s},\mathbf{e}_1)\|\mathbf{s}\|_2$

б) Решение системы уравнений: один (первый) шаг прямого хода преобразования

Прямой ход $1 \le i \le n-1$	$\mathbf{s} = \mathbf{A}_{*1}$, $\alpha = -a_{11}\|\mathbf{A}_{*1}\|_2$, $\rho = \|\mathbf{s} - \alpha\mathbf{e}_1\|_2$ $\mathbf{w} = \rho^{-1}(\mathbf{A}_{*1} - \alpha\mathbf{e}_1)$ $\mathbf{B} = \mathbf{U}_1\mathbf{A}$: $\mathbf{B}_{*j} = \mathbf{A}_{*j} - 2(\mathbf{w},\mathbf{A}_{*j})\mathbf{w}$, $j = 1,2,\dots,n$	$\mathbf{h} = \mathbf{U}_1\mathbf{f}$ $\mathbf{h} = \mathbf{f} - 2(\mathbf{w},\mathbf{f})\mathbf{w}$
Обратный ход	$\mathbf{Rx} = \mathbf{g}$	$x_n = r_{nn}^{-1} g_n$, $x_k = r_{kk}^{-1}(g_k - \sum_{k+1}^{n} r_{ki} x_j)$, $k = n-1,\dots,1$

в) Решение матричного уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{F}$

Прямой ход	$\mathbf{s} = \mathbf{A}_{*1}$, $\alpha = -a_{11}\|\mathbf{A}_{*1}\|_2$, $\rho = \|\mathbf{s} - \alpha\mathbf{e}_1\|_2$ $\mathbf{w} = \rho^{-1}(\mathbf{A}_{*1} - \alpha\mathbf{e}_1)$ $\mathbf{B} = \mathbf{U}_1\mathbf{A}$: $\mathbf{B}_{*j} = \mathbf{A}_{*j} - 2(\mathbf{w},\mathbf{A}_{*j})\mathbf{w}$, $j = 1,2,\dots,n$	$\mathbf{H} = \mathbf{U}_1\mathbf{F}$, $\mathbf{H}_{*j} = \mathbf{F}_{*j} - 2(\mathbf{w},\mathbf{F}_{*j})\mathbf{w}$, $j = 1,2,\dots,l$
Обратный ход	$\mathbf{RX} = \mathbf{G}$	$\mathbf{X}_{n*} = r_{nn}^{-1}\mathbf{G}_{n*}$, $\mathbf{X}_{k*} = r_{kk}^{-1}(\mathbf{G}_{k*} - \sum_{k+1}^{n} r_{ki}\mathbf{X}_{j*})$, $k = n-1,\dots,1$

г) Вычисление определителя $|\mathbf{A}| = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n} r_{kk}$

Преимущества:

1. Нет необходимости выбора ведущего элемента.
2. Нет деления на «нуль» или «малое» число $\Rightarrow$ повышение точности вычислений.
3. Возможность выполнения «векторных» операций с удвоенной точностью (fl_2) $\Rightarrow$ повышение точности вычислений

1.1.9. Методы ортогонализации

***а) Ортогонализация столбцов матрицы* $\mathbf{A}$:** $\mathbf{A} = \mathbf{QR} \Rightarrow (\mathbf{QR})\mathbf{x} = \mathbf{f} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Qg} = \mathbf{f} \\ \mathbf{Rx} = \mathbf{g} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{g} = \mathbf{Q}^T\mathbf{f} \\ \mathbf{Rx} = \mathbf{g} \end{bmatrix}$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта	Обратный ход
$\beta_1 = (\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*1})^{1/2}$, $\mathbf{Q}_{*1} = \beta_1^{-1}\mathbf{A}_{*1}$ $\quad$ $\mathbf{B}_{*k} = \mathbf{A}_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{ik}\mathbf{Q}_{*i}$, $\gamma_{ik} = (\mathbf{A}_{*k}, \mathbf{Q}_{*i})$ $\beta_k = (\mathbf{B}_{*k}, \mathbf{B}_{*k})^{1/2}$, $\mathbf{Q}_{*k} = \beta_1^{-1}\mathbf{B}_{*k}$, $k = 2, \ldots, n$	$\mathbf{g} = \mathbf{Q}^T\mathbf{f}$ $x_n = r_{nn}^{-1} g_n$, $x_k = r_{kk}^{-1}(g_k - \sum_{k+1}^{n} r_{ki} x_j)$, $k = n-1, \ldots, 1$

Недостаток: Вычисленная матрица $\mathbf{Q}$ – не вполне ортогональная.

б) Ортогонализация строк расширенной матрицы $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{f} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{LQ}$

Процесс ортогонализации строк $\widetilde{\mathbf{A}}$	Обратный ход	
$\beta_1 = (\widetilde{\mathbf{A}}_{1*}, \widetilde{\mathbf{A}}_{1*})^{1/2}$, $\mathbf{Q}_{*1}{*} = \beta_1^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_{*1}$ $\quad$ $\mathbf{C}_{k*} = \widetilde{\mathbf{A}}_{k*} - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{ki}\mathbf{Q}_{i*}$, $\gamma_{ki} = (\widetilde{\mathbf{A}}_{k*}, \mathbf{Q}_{i*})$ $\beta_k = (\mathbf{C}_{k*}, \mathbf{C}_{k*})^{1/2}$, $\mathbf{Q}_{k*} = \beta_1^{-1}\mathbf{C}_{k*}$, $k = 2, \ldots, n+1$	$x_k = \dfrac{q_{n+1,k}}{q_{n+1,n+}}$ $k = 1, 2, \ldots, n$	последняя строка ортогональна к первым строкам матрицы $\widetilde{\mathbf{A}}$

1.1.10. Сравнительная характеристика разложений матрицы

Вид сомножителей способ получения	Режим вычислений	Число операций	Точность	Дополнительная память
Треугольные				
Гаусса	fl	$\frac{2}{3}n^3$	αn	0
LU - разложение	fl_2	$\frac{2}{3}n^3$	β	0
Холецкого	fl_2	$\frac{1}{3}n^3$	1.0	0
Треугольная ортогональная				
вращение	fl	$2n^3$	$2.9n$	$\frac{1}{2}n^2$
отражение	fl_2	$\frac{4}{3}n^3$	$2.9n$	$2n$
ортогонализация	fl_2	$2n^3$	1.0	$\frac{1}{2}n^2$ 0

1.1.11. Специальные методы обращения матриц

а) Метод окаймления

$$\mathbf{A}_1 = a_{11},\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \dots,\ \mathbf{A} = \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1} & \mathbf{u}_k \\ \mathbf{v}_k^T & a_{kk} \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k-1} & \mathbf{r}_k \\ \mathbf{q}_k^T & \alpha_k^{-1} \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{A}_k$$

$$\Downarrow$$

$\alpha_k = a_{kk} - \mathbf{v}_k^T\mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{u}_k$ $\mathbf{q}_k^T = -\alpha_k^{-1}\mathbf{v}_k^T\mathbf{A}_{k-1}^{-1}$	$\mathbf{r}_k = -\alpha_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{u}_k$ $\mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{A}_{k-1}^{-1} - \alpha_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T\mathbf{A}_{k-1}^{-1}$

б) Метод пополнения $\mathbf{B},\ \mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T \ \Leftrightarrow\ \begin{matrix} \gamma = 1 + \mathbf{v}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}\gamma^{-1}\mathbf{v}^T\mathbf{B}^{-1} \end{matrix}$$

Обращение матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{I},\ \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},\ \dots,\ \mathbf{A} = \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{e}_k(\mathbf{A}_{k*} - \mathbf{e}_k^T)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{A}_0^{-1} = \mathbf{I},\ \mathbf{C}_k = \mathbf{A}_k^{-1},\ k = 2, \dots, n,\ \mathbf{C}_n = \mathbf{A}^{-1}$$

$\alpha_{kj} = \mathbf{A}_{k*}\mathbf{C}_{*j}^{(k-1)} - c_{kj}^{(k-1)},\ \ \mathbf{C}_{*j}^{(k)} = \mathbf{C}_{*j}^{(k-1)} - \dfrac{\alpha_{kj}}{1+\alpha_{kk}}\mathbf{C}_{*k}^{(k-1)},$ $j = 1, 2, \dots, n,\ k = 1, 2, \dots, n$

1.1.12. Нормы и пределы векторов и матриц

а) Нормы

$\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n(\mathrm{C}^n)$

1) $\|\mathbf{x}\| \ge 0$, ($\|\mathbf{x}\| > 0$, if $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}\| = 0$, if $\mathbf{x} = \mathbf{0}$)
2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$
3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ неравенство треугольника

$\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{m\times n}(\mathrm{C}^{m\times n})$

1) $\|\mathbf{A}\| \ge 0$, ($\|\mathbf{A}\| > 0$, if $\mathbf{A} \ne \mathbf{0}$, $\|\mathbf{A}\| = 0$, if $\mathbf{A} = \mathbf{0}$)
2) $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$
3) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$
4) $\|\mathbf{AB}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$

<u>согласованная норма матрицы</u> $\|\mathbf{Ax}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$

<u>подчиненная норма матрицы</u> $\|\mathbf{A}\| \le \max \dfrac{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1}\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$

p – норма вектора $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$	$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert$	$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_i x_i$
подчиненные нормы матрицы	$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n}\lvert a_{ij}\rvert$	$\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1 = \max\limits_i \sigma_i$	$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n}\lvert a_{ij}\rvert$

свойство $|\lambda(\mathbf{A})| \le \|\mathbf{A}\|$ $\quad \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{Ax}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|,\ \|\mathbf{Ax}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow |\lambda|\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$

б) Пределы

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_i^{(k)} = \mathbf{x}_i,\ i = 1,\ldots,n \qquad \lim_{k\to\infty}\mathbf{A}_k = \mathbf{A} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)} = a_{ij},\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n$$

$$\mathbf{x}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{x} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

в) Свойства пределов

1. $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}, \mathbf{B}_k \to \mathbf{B}, \mathbf{x}_k \to \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{B}_k \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k \to \mathbf{Ax}$
2. $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}, |\mathbf{A}| \ne 0 \Rightarrow \exists N\ k > N\ \mathbf{A}_k^{-1} \to \mathbf{A}^{-1}$
3. $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}, |\mathbf{A}| \ne 0, \mathbf{f}_k \to \mathbf{f} \Rightarrow \exists N\ k > N\ \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{f}_k \to \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$
4. $\mathbf{A}^k \to \mathbf{O} \Leftrightarrow |\lambda(\mathbf{A})| < 1$ $\quad\Leftrightarrow$
5. $\mathbf{A}^k \to \mathbf{O} \Leftrightarrow \|\mathbf{A}\| < 1$
6. $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^k \to (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^k \to \mathbf{O}$
7. $\|\mathbf{A}\| < 1 \Rightarrow \left\|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \ldots + \mathbf{A}^k)\right\| \le \dfrac{\|\mathbf{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbf{A}\|}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{A}^k = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}^k\mathbf{P}$$

$$\mathbf{J} = \text{block diag}\,\{\mathbf{J}_i(\lambda_i)\} \Rightarrow \mathbf{J}^k = \text{block diag}\,\{\mathbf{J}_i^k(\lambda_i)\}$$

$$\mathbf{J}(\lambda) - l \times l$$

$$\mathbf{J}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}^k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^k & & & \\ \binom{n}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \binom{n}{l}\lambda^{k-\partial} & \ldots & \binom{n}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{bmatrix}$$

1.1.13. Обусловленность задач решения СЛАУ и обращения матриц

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}\,,\ \mathbf{A}^{-1} \Leftarrow |\mathbf{A}| \neq 0: \qquad \delta = |\mathbf{A}| \text{ – число обусловленности – ?}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 10^6 & \\ & 10^{-6} \end{vmatrix} = 1 \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{f} \qquad \alpha\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{f}$$

а) Характеристики в терминах элементов $\mathbf{A}^{-1} = \{\alpha_{kl}\}$

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mid \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\mathbf{AA}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}_{ij}\mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial a_{ij}} = -\alpha_{ki}\alpha_{jl}}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mid \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}_{ij}\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} = -\alpha_{ki}x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_i} \mid \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial f_i}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\frac{\partial}{\partial f_i}\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial f_i}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}e_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial x_k}{\partial f_i} = \alpha_{ki}}$$

б) Характеристики в терминах норм $\|\mathbf{A}\|,\ \|\mathbf{A}^{-1}\|$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \|\Delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{f}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{f}\| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{\text{абс}} = \|\mathbf{A}^{-1}\|}$$

$$\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{Ax}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = \le \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{f}\|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\Delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{\text{отн}} = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|}$$

$$(\underline{\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f} \Rightarrow (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\Delta\mathbf{x} = -\Delta\mathbf{Ax} \Rightarrow \Delta\mathbf{x} = -(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{Ax} \Rightarrow \|\Delta\mathbf{x}\| \le -\|(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A})^{-1}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le -\|(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A})^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \le \frac{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{A}\|}\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{\text{отн}} = \frac{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{A}\|}}$$

в) Числа обусловленности

$$\boxed{\delta_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_m},\quad \sigma_1 = \|\mathbf{A}\|_2} \qquad \boxed{\delta = \frac{1}{n}N(\mathbf{A})N(\mathbf{A}^{-1}),\ \ N(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2} \qquad \boxed{\delta = nM(\mathbf{A})M(\mathbf{A}^{-1}),\quad M(\mathbf{A}) = \max_{i,j}|a_{ij}|}$$

1.1.14. О решении плохообусловленных систем

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{V}^T\mathbf{AU} = \mathbf{\Sigma} \Rightarrow \mathbf{AU} = \mathbf{\Sigma V} \Rightarrow \mathbf{Au}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i, (\mathbf{u}_i = \mathbf{U}_{*i}, \ \mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{*i}), \ i = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \alpha_i = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i), \ i = 1, \dots, n; \qquad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{u}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{Au}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sigma_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sigma_i} = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_i)}{\sigma_i}, \ i = 1, \dots, n}$$

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_r >> \sigma_{r+1} \ge \ldots \ge \sigma_n$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \begin{array}{ll} \mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_i)}{\sigma_i} \mathbf{u}_i & - \text{ устойчивая} \\ \mathbf{x}_2 = \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=r+1}^{n} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_i)}{\sigma_i} \mathbf{u}_i & - \text{ неустойчивая} \end{array} \text{ часть решения}$$

$$\text{if } \alpha_i = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i) \approx 0, \ i = r+1, \dots, n \Rightarrow \text{well conditioned}$$

- Вычисление устойчивой части решения (проекции на span{$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$}): $\boxed{\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{f}}$
- Регуляризация системы $\boxed{(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \rho\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{f}}$

1.1.15. Уточнение решений

а) Уточнение приближения $\mathbf{x}_0$ к решению системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

$$\boxed{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0}$$

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0) = \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}_0}$$

$$\boxed{\mathbf{r}_k = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}_k,\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k \quad \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k}$$

б) Уточнение приближения $\mathbf{C}_0$ к обратной матрице $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{AC}_0 \quad \boxed{\|\mathbf{R}_0\| \le \rho < 1}$$

$$\boxed{\mathbf{R}_k = \mathbf{I} - \mathbf{AC}_k,\ \mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k(\mathbf{I} + \mathbf{R}_k)}$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{I} - \mathbf{AC}_k = \mathbf{I} - \mathbf{AC}_{k-1}(\mathbf{I} + \mathbf{R}_{k-1}) = \ldots = \mathbf{R}_9^{2k}$$

$$\|\mathbf{C}_k - \mathbf{A}^{-1}\| = \|-\mathbf{A}^{-1}R_0^{2k}\| = \|\mathbf{C}_0(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0)^{-1}\mathbf{R}_0^{2k}\| \le \|\mathbf{C}_0\|\|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0)^{-1}\|\|\mathbf{R}_0\|^{2k} \le \|\mathbf{C}_0\|\frac{\rho^{2k}}{1-\rho}$$

1.2. Итерационные методы решения СЛАУ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}\,,\ |\mathbf{A}| \neq 0\,,\ \mathbf{x}_* \text{ - точное решение}$$

Приближения

$\mathbf{x}_0$ – начальное приближение

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots$ – последовательность приближений

$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_* - \mathbf{x}_k$ – вектор ошибки

$\mathbf{r}_k = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}_k$ – вектор невязки

Сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_* \ \Leftrightarrow\ \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_k\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{r}_k = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{0} \ \Leftrightarrow\ \|\mathbf{r}_k\| \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

скорость сходимости – **?**

Итерационная формула

$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k)$ – одноточечная итерационная формула

$\mathbf{x}_* = \Phi(\mathbf{x}_*)$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{cases} \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{g}_k & \text{нестационарная} \\ \mathbf{B}\ \mathbf{x}_k + \mathbf{g} & \text{стационарная} \end{cases} \text{ линейная итерационная формула, например, } \mathbf{x}_{k+1} = \begin{cases} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_k(\mathbf{f} - A\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_k + \mathbf{H}(\mathbf{f} - A\mathbf{x}_k) \end{cases}$$

Критерии прекращения итерационного процесса

$k \le K_{\max}$	по числу итераций
$\|\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_k\| < \delta$	по близости к решению ($\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \delta$ - **?**)
$\|\mathbf{r}_k\| < \varepsilon$	по малости невязки

1.2.1. Метод простых итераций (последовательных приближений) $\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{f} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{f}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$

а) Итерационная формула $\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}, \ \mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}}$

б) Свойства

1. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_k + \mathbf{f} = \mathbf{B}(\mathbf{B}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{f}) + \mathbf{f} = \mathbf{B}^2\mathbf{x}_{0k-1} + \mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{f} = \ldots = \mathbf{B}^{k+1}\mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \ldots + \mathbf{B}^k)\mathbf{x}_0$
2. $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^2\mathbf{y}_{k-1} = \ldots = \mathbf{B}^{k+1}\mathbf{y}_0$
3. $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_+ \ \Rightarrow \ \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_*$ – если сходится, то сходится к решению
4. $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_* \ \Leftrightarrow \ |\lambda(\mathbf{I} - \mathbf{A})| < 1$ – необходимое и достаточное условие сходимости
5. $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_* \ \Leftarrow \ \|\mathbf{A}\| < 1$ – достаточное условие сходимости
6. $\|\mathbf{y}_{k+1}\| \le \|\mathbf{B}\|^{k+1}\|\mathbf{y}_0\|$ – оценка скорости сходимости
7. $\|\mathbf{y}_{k+1}\| = \|\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_k\| \le \|\mathbf{B}\|^{k+1}\|\mathbf{x}_0\| + \dfrac{\|\mathbf{B}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbf{B}\|}\|\mathbf{f}\|$ – оценка близости к решению

в) Достаточные условия сходимости и оценка скорости сходимости

$$p = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n}|b_{ij}| \le \nu < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^* - x_i^{(k+1)}\right| \le \nu\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^* - x_i^{(k)}\right|$$

$$p = \infty \qquad \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| \le \mu < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \max_i\left|x_i^* - x_i^{(k+1)}\right| \le \mu\max_i\left|x_i^* - x_i^{(k)}\right|$$

$$p = 2 \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2} \le \rho < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^* - x_i^{(k+1)}\right|^2} \le \rho\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^* - x_i^{(k)}\right|^2}$$

г) Способы подготовки системы $\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A})\mathbf{x}_k + \mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{B}\mathbf{x}_k + \mathbf{g}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A}$, $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$

1. $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \alpha\mathbf{A}$, $\mathbf{g} = \alpha\mathbf{f} \ \Leftarrow \ \min\limits_{\alpha}\max\limits_{i}|1 - \alpha\lambda_i|$, $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{A}) \in [m, M]$, $\alpha = \dfrac{2}{m + M}$ $\quad \left(\mathbf{A} > 0, \ \|\mathbf{A}\| < \rho, \ \alpha = \dfrac{2}{\rho}\right)$

2. $|a_{ii}| > \sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}| \ \Rightarrow \ \mathbf{H} = \mathrm{diag}\{a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}\} = \mathbf{D}^{-1}$ $\quad \boxed{x_i^{(k+1)} = \dfrac{f_i - \sum\limits_{j\ne i}a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}} = x_i^{(k)} + \dfrac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}, \ i = 1, \ldots, n}$ **метод Якоби**

3. $\mathbf{A} = \mathbf{U} - \mathbf{V}$, $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{f}$, $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{U}^{-1}\mathbf{f}$, $\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{V}$, $\mathbf{g} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{f}$, $|\lambda(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V})| < 1 \ \Rightarrow \ \mathbf{U}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{V}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}$

1.2.2. Метод Зейделя

В методе простых итераций $x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + g_i,\ i = 1,\dots,n$

а) Итерационная формула $\boxed{x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + g_i,\ i = 1,\dots,n}$

б) Связь с методом простых итераций

1. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{g},\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} & & & \\ b_{21} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n-1} & \end{bmatrix},\ \mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{21} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I}-\mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_k + (\mathbf{I}-\mathbf{M})^{-1}\mathbf{g} \\ \widetilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{I}-\mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} \quad \widetilde{\mathbf{g}} = (\mathbf{I}-\mathbf{M})^{-1}\mathbf{g} \\ \mathbf{x}_{k+1} = \widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}_k + \widetilde{\mathbf{g}} \quad \lambda(\widetilde{\mathbf{B}}) \neq \lambda(\mathbf{B}) \end{matrix}$

2. ускорение сходимости в методе Зейделя: $\sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| \le \mu < 1 \Rightarrow \max_i \left|x_i^* - x_i^{(k+1)}\right| \le \tilde{\mu} \max_i \left|x_i^* - x_i^{(k)}\right|,\ \tilde{\mu} < \mu$

в) Способ подготовки системы

$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \Rightarrow \mathbf{H} = \mathrm{diag}\{a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}\} = \mathbf{D}^{-1}$

$$\boxed{\begin{gathered} x_i^{(k+1)} = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k+\frac{1}{2})}}{a_{ii}}, \\ i = 1,\dots,n \end{gathered}}$$

метод Некрасова

1.2.3. Методы координатной релаксации

а) SOR- (ПВР-) метод (successive over relaxation / последовательных верхних релаксаций)

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N},\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}a_{11} & & & \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \gamma^{-1}a_{n-1,n-1} & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & \gamma^{-1}a_{nn} \end{bmatrix},\ \mathbf{N} = \begin{bmatrix} (\gamma^{-1}-1)a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & (\gamma^{-1}-1)a_{22} & \cdots & -a_{21} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\gamma^{-1}-1)a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \\ \widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \quad \widetilde{\mathbf{g}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \\ \mathbf{x}_{k+1} = \widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}_k + \widetilde{\mathbf{g}} \\ \left|\lambda(\widetilde{\mathbf{B}})\right| < 1 \end{array}$$

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \gamma \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}} = x_i^{(k)} + \gamma \frac{r_i^{(k+\frac{1}{2})}}{a_{ii}},\ i = 1,\dots,n}$$

$\gamma < 1$		**нижней релаксации**
$\gamma = 1$	**метод**	**Некрасова**
$\gamma > 1$		**верхней релаксации**

б) Метод координатной релаксации $\quad \mathbf{A} > 0$

$\mathbf{x}$ – текущее приближение $\qquad$ $\mathbf{y} = \mathbf{x}_* - \mathbf{x}$ – текущий вектор ошибки $\qquad$ $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}$ – вектор невязки

$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_i$ – следующее приближение $\qquad$ $\mathbf{y}' = \mathbf{x}_* - \mathbf{x}' = \mathbf{y} - \alpha\mathbf{e}_i$ – следующий вектор ошибки

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y}) \ge 0 \text{ – \textbf{функция ошибки:}} \quad F(\mathbf{x}_*) = 0$$

$$F(\mathbf{x}') = (\mathbf{A}\mathbf{y}', \mathbf{y}') = \ldots = F(\mathbf{x}) - 2\alpha(\mathrm{r}, \mathbf{e}_i) + \alpha^2(\mathbf{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = F(\mathbf{x}) - 2\alpha r_i + \alpha^2 a_{ii}$$

$$\min_\alpha F(\mathbf{x}') \Rightarrow \frac{d}{d\alpha}F(\mathbf{x}') = 0 \Rightarrow -2r_i + 2\alpha a_{ii} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{r_i}{a_{ii}} \Rightarrow$$

$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \dfrac{r_i}{a_{ii}}\mathbf{e}_i$	корректировка координаты i

Выбор номера корректируемой координаты

- циклический, $i = 1,\dots,n$
- $\max_i |r_i|$
- $\max_i \left|\dfrac{r_i}{a_{ii}}\right|$

1.2.4. Градиентные методы $\mathbf{A} > 0$

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ay}, \mathbf{y}) \ge 0 \text{ – } \textbf{функция ошибки}$$

$$H(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \ldots = F(\mathbf{x}) - (\mathbf{f}, \mathbf{x}_*) \Rightarrow \min_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}_*)$$

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{z}} = \lim_{t\to 0} \frac{H(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) - H(\mathbf{x})}{t} = \ldots = 2(\mathbf{Ax} - \mathbf{f}, \mathbf{z}) \Rightarrow \operatorname{grad} H(\mathbf{x}) = -2(\mathbf{Ax} - \mathbf{f}) = -2\mathbf{r}$$

$\min_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) \Rightarrow$ $\mathbf{x}$ – текущее приближение $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}$ – вектор невязки $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{r}}$ – следующее приближение

$$H(\mathbf{x}') = \ldots = H(\mathbf{x}) - 2\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}) + \alpha^2(\mathbf{Ar}, \mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}' = \mathbf{r} - \alpha\mathbf{Ar}, \quad \|\mathbf{r}'\|_2^2 = (\mathbf{r}', \mathbf{r}') = (\mathbf{r}, \mathbf{r}) - 2\alpha(\mathbf{Ar}, \mathbf{r}) + \alpha^2(\mathbf{Ar}, \mathbf{Ar})$$

а) Метод наискорейшего спуска	***б) Метод минимальных невязок***
$\min_{\alpha} H(\mathbf{x}') \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} H(\mathbf{x}') = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{(\mathbf{Ar}, \mathbf{r})}$	$\min_{\alpha} \|\mathbf{r}'\|_2^2 \Rightarrow \frac{d}{d\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(\mathbf{Ar}, \mathbf{r})}{(\mathbf{Ar}, \mathbf{Ar})}$
$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{r}_k,\ \mathbf{r}_k = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}_k,\ \alpha_k = \frac{(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{Ar}_k, \mathbf{r}_k)}$	$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{r}_k,\ \mathbf{r}_k = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}_k,\ \alpha_k = \frac{(\mathbf{Ar}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{Ar}_k, \mathbf{Ar}_k)}$

в) $\alpha = \text{const}$

$$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{r}_k} \Rightarrow \mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A})\mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{f} = B\mathbf{x}_k + \mathbf{g}$$

$$\min_{\alpha} \max_{i} |1 - \alpha\lambda_i|,\ \lambda_i = \lambda_i(\mathbf{A}) \in [m, M],\ \alpha = \frac{2}{m+M}\ (\mathbf{A} > 0,\ \|\mathbf{A}\| < \rho,\ \alpha = \frac{2}{\rho}) \text{ – } \textbf{метод простых итераций}$$

г) Использование полиномов Чебышёва $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ - набор коэффициентов

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I} - \alpha_k\mathbf{A})\mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{f},\ k = 0,1,\ldots,l-1 \Rightarrow \mathbf{y}_l = (\mathbf{I} - \alpha_{l-1}\mathbf{A})\mathbf{y}_{l-1} = \ldots = \prod_{k=0}^{l-1}(\mathbf{I} - \alpha_k\mathbf{A})\mathbf{y}_0,\ \mathbf{x}_l = \prod_{k=0}^{l-1}(\mathbf{I} - \alpha_k\mathbf{A})\mathbf{x}_0 + \mathbf{g}$$

$$\varphi_l(t) = \prod_{k=0}^{l-1}(1 - \alpha_k t) \Rightarrow \mathbf{y}_l = \varphi_l(\mathbf{A})\mathbf{y}_0,\ \mathbf{x}_l = \varphi_l(\mathbf{A})\mathbf{x}_0 + \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{x}_l = \mathbf{B}\mathbf{x}_0 + \mathbf{g},\ \mathbf{B} = \varphi_l(\mathbf{A}),\ |\lambda(\mathbf{B})| = |\lambda(\varphi_l(\mathbf{A}))| < 1$$

$P_l(t) = \prod_{k=0}^{l-1}(t - \alpha_k^{-1})$ – наименее отклоняется от нуля на $[-1,\ 1]$ ***полином Чебышёва II рода***: $T_l(t) = \cos l \arccos t$ с корнями

$$\boxed{\alpha_k^{-1} = t_k = \cos\frac{2k+1}{2l}\pi,\ k = 0,1,\ldots,l-1} \Rightarrow \boxed{\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{A}) \in [a, b] \Rightarrow \alpha_k^{-1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k,\ k = 0,1,\ldots,l-1}$$

1.2.5. Методы сопряженных направлений $\qquad \mathbf{D} = \mathbf{CAB} > 0$

$$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n - \mathbf{D}\text{-ортогональный базис}: (\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)_\mathbf{D} = (\mathbf{D}\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = 0$$

$$\mathbf{x}_0 - \text{«начальное» приближение} \quad \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{s}_i} \text{ (разложение } \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \text{ по базису)}$$

$$\mathbf{CAB}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{s}_i = \mathbf{C}(\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{s}_i = \mathbf{C}\mathbf{r}_0 \quad \Big| (\ldots, \mathbf{s}_j) \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_j = \frac{(\mathbf{C}\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_j)}{(\mathbf{D}\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_j)},\ j = 1, \ldots, n}$$

$$\mathbf{D} - ?,\ \mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \cdots \mathbf{z}_n] \overset{?}{\Rightarrow} \mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \cdots \mathbf{s}_n]$$

а) Метод ортогональных векторов $\qquad \mathbf{A} > 0,\ \mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{I},\ \mathbf{Z} = \mathbf{I}$

$$\boxed{\mathbf{s}_1 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{s}_i = \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \mathbf{s}_j,\ \gamma_{ij} = \frac{(\mathbf{A}_{*i}, \mathbf{s}_j)}{(\mathbf{A}_{*k}, \mathbf{s}_j)},\ j = 1, \ldots, n}$$

б) Метод А-минимальных итерации $\qquad \mathbf{A} > 0,\ \mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{I},\ \mathbf{z}_i = \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{q}_0,\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}$

$$\boxed{\mathbf{s}_1 = \mathbf{q}_0,\ \mathbf{s}_2 = \mathbf{A}\mathbf{s}_1 - \gamma_1 \mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{s}_i - \gamma_i \mathbf{s}_i - \delta_i \mathbf{s}_{i-1},\ \gamma_i = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{A}\mathbf{s}_i)}{(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i)},\ j = 1, \ldots, n,\ \delta_i = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i)}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i)},\ j = 2, \ldots, n}$$

б) Метод сопряженных градиентов $\qquad \mathbf{A} > 0,\ \mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{I},\ \mathbf{z}_i = \mathbf{r}_{i-1},\ \mathbf{r}_i = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i,\ \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\sum_{j=1}^{i} \alpha_j \mathbf{s}_j \quad i = 1, \ldots, n$

$$\boxed{\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_0,\ \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{s}_i\ \ \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{s}_i,\ \mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{s}_i + \beta_i \mathbf{A}\mathbf{s}_i,,\ \alpha_i = \frac{(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})}{(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i)},,\ \beta_i = \frac{(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i)}{(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})},\ i = 1, \ldots, n-1}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \text{ или } \mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

………

1.3. Методы решения систем с прямоугольными особенными и плохообусловленными матрицами

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}\,,\ \mathbf{A} - m \times n\,,\ \mathbf{f} - m\,,\ \mathbf{x} - n$$

$$m \neq n \text{ или } m = n\,,\ |\mathbf{A}| = 0,$$

$$r = \operatorname{rank}\mathbf{A}\,,\ \tilde{r} = \operatorname{rank}\widetilde{\mathbf{A}}\,,\ \widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \quad \mathbf{f})$$

1.3.1. Классификация задач

Ранг матрицы	Название системы свойства матрицы	Название решения	Свойство решения
0) $r = m = n$	– определённая система невырожденная матрица	единственное решение	
1) $r = n < m$	– переопределённая система матрица полного столбцового ранга	обобщенное решение	$\min\limits_{\mathbf{x}} \lVert \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x} \rVert_2$
2) $r = m < n$	– неопределённая система матрица полного строчного ранга	нормальное решение	$\min\limits_{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{f}} \lVert \mathbf{x} \rVert_2$
3) $r < \min\{m, n\}$	– вполне неопределённая система матрица общего вида	обобщенное нормальное решение	$\min\limits_{\min \lVert \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{f} \rVert_2} \lVert \mathbf{x} \rVert_2$

1.3.2. Трансформации Гаусса

1) $\underline{r = n < m}$ – матрица полного столбцового ранга

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{f} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{f}} \quad \text{обобщенное решение}$$

$$\min_{\mathbf{x}}\|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2 \;\Rightarrow\; \|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2^2 = (\mathbf{f} - \mathbf{Ax}, \mathbf{f} - \mathbf{Ax}) = \ldots = \sum_{i=1}^{m}[f_i^2 - 2f_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ik}x_k = \sum_{i=1}^{m}a_{ik}f_i \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{f}$$

2) $\underline{r = m < n}$ – матрица полного строчного ранга

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f},\ \mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{y} \in \mathrm{im}\mathbf{A}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{AA}^T\mathbf{y} = \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = (\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{f} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{f}} \quad \text{нормальное решение}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1 \in \mathrm{im}\mathbf{A}^T,\ \mathbf{x}_2 \in \ker\mathbf{A},\ \mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2,\ \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 \;\Rightarrow\; \min_{\mathbf{Ax}=\mathbf{f}}\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}_1\|_2$$

3) $\underline{r < \min\{m, n\}}$ – матрица общего вида

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC},\ \mathbf{B} - m \times r,\ \mathbf{C} - r \times n$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \mathbf{BCx} = \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \mathbf{By} = \mathbf{f} \ \text{– переопределённая} \\ \mathbf{Cx} = \mathbf{y} \ \text{– неопределённая} \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \mathbf{y} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{f} \\ \mathbf{x} = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}\mathbf{y} \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{f}}$$

обобщенное нормальное решение

1.3.3. Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза

$\mathbf{A}^+$ – обобщение обратной матрицы

$\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$	$\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+$
$(\mathbf{AA}^+)^T = \mathbf{AA}^+$	$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

3) $\underline{r < \min\{m, n\}}$ – матрица общего вида

$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{BC},\ \mathbf{B} - m\times r,\ \mathbf{C} - r\times n}$ – скелетное разложение

$$\boxed{\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T}$$

$$\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = (\mathbf{BC})\mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{BC}) = \mathbf{B}(\mathbf{CC}^T)(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{BC} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{BC})\mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} =$$
$$= \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{BB}^T)(\mathbf{CC}^T)(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^+$$

$\mathbf{AA}^+ = (\mathbf{BC})\mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}(\mathbf{CC}^T)(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T$ – симметричная

$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{BC}) = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}\mathbf{C}$ – симметричная

Свойство

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{BC} \Rightarrow \mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{f} = \mathbf{A}^+\mathbf{f}$	– обобщенное нормальное решение

1) $\underline{r = n < m}$ – матрица полного столбцового ранга

$$\mathbf{B} = \mathbf{A},\ \mathbf{C} = \mathbf{I}$$

$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \Rightarrow$	$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{f} = \mathbf{A}^+\mathbf{f}$	– обобщенное решение

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{A}^+\mathbf{f}$$

2) $\underline{r = m < n}$ – матрица полного строчного ранга

$$\mathbf{B} = \mathbf{I},\ \mathbf{C} = \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1} \Rightarrow$	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{A}^+\mathbf{f}$	– нормальное решение

1.3.4. Использование ортогональных преобразований для систем с матрицами полного ранга

1) $\underline{r = n < m}$ – матрица полного столбцового ранга

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \mathbf{QAx} = \mathbf{Qf} \;\Rightarrow\; \mathbf{Rx} = \mathbf{g},\; \mathbf{QA} = \mathbf{R} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}n \times n \\ \}(m-n) \times n \end{array} \end{array},\; \mathbf{Qf} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}n \\ \}m-n \end{array} \;\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{R}_0\mathbf{x} = \mathbf{g}_0 \;\Rightarrow}\; \text{обобщенное решение: } \|\mathbf{g}_1\|_2 = \min\|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2$$

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2^2 = (\mathbf{f} - \mathbf{Ax}, \mathbf{f} - \mathbf{Ax}) = (\mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{Ax}), \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{Ax})) = \|\mathbf{g} - \mathbf{Rx}\|_2^2 = \|\mathbf{g}_0 - \mathbf{R}_0\mathbf{x}\|_2^2 + \|\mathbf{g}_1\|_2^2 \;\Rightarrow\; \min\|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2^2 = \|\mathbf{g}_1\|_2^2$$

2) $\underline{r = m < n}$ – матрица полного строчного ранга

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f},\; \mathbf{AQ} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{L}_0}_{m} & \underbrace{\mathbf{O}}_{n-m} \end{bmatrix},\; \mathbf{x} = \mathbf{Qy},\; \Rightarrow \mathbf{Ly} = \mathbf{f},\; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{Q}_0}_{m} & \underbrace{\mathbf{Q}_1}_{n-m} \end{bmatrix}\; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}m \\ \}n-m \end{array} \;\Rightarrow$$

$$[\mathbf{L}_0 \quad \mathbf{O}] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{f} \Rightarrow \boxed{\mathbf{L}_0\mathbf{y}_0 = \mathbf{f} \;\Rightarrow}\; \mathbf{x} = \mathbf{Qy} = [\mathbf{Q}_0 \quad \mathbf{Q}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_0\mathbf{y}_0 + \mathbf{Q}_1\mathbf{y}_1 \;\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{Q}_0\mathbf{y}_0}\; \text{нормальное решение}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{Q}_0\mathbf{y}_0\|_2^2 + \|\mathbf{Q}_1\mathbf{y}_1\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0\|_2^2 + \|\mathbf{x}_1\|_2^2, \Rightarrow \min_{\mathbf{Ax}=\mathbf{f}} \|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0\|_2^2$$

1.3.5. Использование сингулярного разложения (SVD) матрицы

$$\mathbf{V}^T\mathbf{AU} = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 & \\ & \mathbf{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},\ \mathbf{\Sigma}_0 = diag\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\},\ r = \mathrm{rank}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{V}_0}_{r} & \underbrace{\mathbf{V}_1}_{m-r} \end{bmatrix},\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{U}_0}_{r} & \underbrace{\mathbf{U}_1}_{n-r} \end{bmatrix} - m\times m \text{ и } n\times n \text{ ортогональные (унитарные) матрицы}$$

а) Обобщенное нормальное решение системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{V}^T\mathbf{AUU}^T\mathbf{x} = \mathbf{V}^T\mathbf{f},\ \mathbf{U}^T\mathbf{x} = \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix},\ \mathbf{V}^T\mathbf{f} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}m-r \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{\Sigma y} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{\Sigma}^+\mathbf{g} = \mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{g},\ \mathbf{x} = \mathbf{Uy}$$

$$\boxed{\mathbf{g}_0 = \mathbf{V}_0^T\mathbf{f}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y_i^{(0)} = \dfrac{g_i^{(0)}}{\sigma_i}, \\ i = 1, \ldots, r \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{U}_0\mathbf{y}_0}$$

б) Псевдообратная матрица $\mathbf{A}^+$

$$\boxed{\mathbf{A}^+ = \mathbf{U}^T\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{V} = \mathbf{U}_0^T\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}_0}$$

а) Псевдоранг матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{V}^T\mathbf{AU} = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 & \\ & \mathbf{\Sigma}_1 \end{bmatrix},\ \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r >> \sigma_{r+1} \geq \ldots \geq \sigma_n \left(\underline{\frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_1} < \varepsilon},\ \underline{\frac{\sigma_r}{\sigma_1} \geq \varepsilon} \right) \Rightarrow r = \text{pseudo rank}\mathbf{A}$$

а) Решение плохообусловленной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{V}^T\mathbf{AU} = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 & \\ & \mathbf{\Sigma}_1 \end{bmatrix},\ \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r >> \sigma_{r+1} \geq \ldots \geq \sigma_n,\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{V}_0}_{r} & \underbrace{\mathbf{V}_1}_{n-r} \end{bmatrix},\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{U}_0}_{r} & \underbrace{\mathbf{U}_1}_{n-r} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{g}_0 = \mathbf{V}_0^T\mathbf{f}} \Rightarrow \boxed{y_i^0 = \frac{g_i^0}{\sigma_i},\ i = 1, \ldots, r} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{U}_0\mathbf{y}_0} \text{ – устойчивая часть решения}$$

1.3.6. Нормализованный процесс разложения матрицы

$$\mathbf{\Theta A Q} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix}\mathbf{L}_0 & \mathbf{O}\end{bmatrix},\ \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{r1} & \cdots & l_{rr} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mr} \end{bmatrix},\ \begin{matrix} l_{ii} \ge l_{jj} \\ l_{ii} \ge l_{ji} \end{matrix},\ i < j,$$

$\mathbf{A}$ – $m \times n$ матрица

$\mathbf{\Theta}$ – $m \times m$ матрица

$\mathbf{L}_0$ – $m \times r$ трапеци евидная матрица

r = $\mathrm{rank}\mathbf{A}$

Шаг 1 $\quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$

$\left\|\mathbf{A}^1_{l_1 *}\right\|_2 = \max\limits_{1 \le i \le m} \left\|\mathbf{A}^1_{i*}\right\|_2 \Rightarrow$ перестановка строк $l_1 \Leftrightarrow 1 \Rightarrow$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{\Theta}_{1,l_1}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_2 & \\ * & & & \end{bmatrix}$$

Шаг 2

$\left\|\mathbf{A}^2_{l_2 *}\right\|_2 = \max\limits_{2 \le i \le m} \left\|\mathbf{A}^2_{i*}\right\|_2 \Rightarrow$ перестановка строк $l_2 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{\Theta}_{2,l_2}\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{A}_3 & \\ * & * & & & \end{bmatrix}$$

……………………………………………………………………………………………………

Шаг r-1

$\left\|\mathbf{A}^{r-1}_{l_{r-1} *}\right\|_2 = \max\limits_{r-1 \le i \le m} \left\|\mathbf{A}^{r-1}_{i*}\right\|_2 \Rightarrow$ перестановка строк $l_{r-1} \Leftrightarrow r-1 \Rightarrow$

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{\Theta}_{r-1,l_{r-1}}\mathbf{A}_{r-1}\mathbf{Q}_{r-1} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ l_{r-1,1} & \cdots & l_{r-1,r-1} & & & \\ * & \cdots & * & a_{rr} & \cdots & a_{rr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & * & a_{mr} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix}$$

Шаг r

$\left\|\mathbf{A}^{r}_{l_r *}\right\|_2 = \max\limits_{r \le i \le m} \left\|\mathbf{A}^{r}_{i*}\right\|_2 \Rightarrow$ перестановка строк $l_r \Leftrightarrow r \Rightarrow$

$$\mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{\Theta}_{r,l_r}\mathbf{A}_r\mathbf{Q}_r = \mathbf{L} = \begin{bmatrix}\mathbf{L}_0 & \mathbf{O}\end{bmatrix}$$

$l_{ii}^2 \ge \sum\limits_{k=i}^{n} l_{jk}^2$	$j = i+1,\ldots,m$

1.3.7. Использование нормализованного процесса разложения матрицы

$$\mathbf{\Theta A Q} = \mathbf{L} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\Theta A}[\mathbf{Q}_0 \quad \mathbf{Q}_1] = [\mathbf{L}_0 \quad \mathbf{O}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Theta A} = \mathbf{L}_0\mathbf{Q}_0^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{\Theta L}_0\mathbf{Q}_0^T$$

а) Обобщенное нормальное решение системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{L}_0\mathbf{Q}_0^T\mathbf{x} = \mathbf{\Theta f} \;\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{L}_0\mathbf{y} = \mathbf{\Theta f} & \text{переопределённая} \\ \mathbf{Q}_0^T\mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{неопределённая} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{L}_0\mathbf{y} = \mathbf{\Theta f} & \text{см. п. 1.3.4 } \mathit{1)} \\ \mathbf{x} = \mathbf{Q}_0\mathbf{y} & \text{нормальное решение} \end{bmatrix}$$

б) Псевдообратная матрица $\mathbf{A}^+$

$$\boxed{\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}_0\mathbf{L}_0^+\mathbf{\Theta} = \mathbf{Q}_0(\mathbf{L}_0^T\mathbf{L}_0)^{-1}\mathbf{L}_0\mathbf{\Theta}}$$

а) Псевдоранг матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{\Theta A Q} = \mathbf{L} = [\mathbf{L}_0 \quad \mathbf{L}_1] = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{00} & \\ * & \mathbf{L}_{11} \end{bmatrix},\; l_{11} \geq \ldots \geq l_{rr} >> l_{r+1,r+1} \geq \ldots \;\left(\frac{l_{r+1,r+1}}{l_{11}} < \varepsilon,\; \frac{l_{r+1,r+1}}{l_{11}} \geq \varepsilon \right) \Rightarrow r = \text{pseudo rank}\mathbf{A}$$

или

$$\left(\frac{l_{r+1,r+1}}{l_{rr}} < \varepsilon,\; \frac{l_{r+1,r+1}}{l_{rr}} \geq \varepsilon \right) \Rightarrow r = \text{pseudo rank}\mathbf{A}$$

а) Решение плохообусловленной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{\Theta A Q} = \mathbf{\Theta A}[\mathbf{Q}_0 \quad \mathbf{Q}_1] = [\mathbf{L}_0 \quad \mathbf{L}_1] = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{00} & \\ * & \mathbf{L}_{11} \end{bmatrix},\; l_{11} \geq \ldots \geq l_{rr} >> l_{r+1,r+1} \geq \ldots \; \mathbf{V} = \Big[\underbrace{\mathbf{V}_0}_{r} \quad \underbrace{\mathbf{V}_1}_{n-r}\Big],\; \mathbf{U} = \Big[\underbrace{\mathbf{U}_0}_{r} \quad \underbrace{\mathbf{U}_1}_{n-r}\Big] \Rightarrow$$

$$\mathbf{L}_0\mathbf{Q}_0^T\mathbf{x} = \mathbf{\Theta f} \;\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{L}_0\mathbf{y} = \mathbf{\Theta f} & \text{переопределённая} \\ \mathbf{Q}_0^T\mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{неопределённая} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{L}_0\mathbf{y} = \mathbf{\Theta f} \\ \mathbf{x} = \mathbf{Q}_0\mathbf{y} \end{bmatrix} - \text{устойчивая часть решения}$$

1.3.8. Замечания

1. Не доказана однозначность $\mathbf{A}^+$ и не отмечена ее связь с регуляризацией Тихонова:

$$\mathbf{A}^+ = \lim_{\delta\to+0}(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \delta\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^T = \lim_{\delta\to+0}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \delta\mathbf{I})^{-1}$$

2. Существуют и другие методы вычисления $\mathbf{A}^+$.

Например, метод окаймления.

3. Существуют и другие подходы к решению систем общего вида.

Например, обобщенное решение системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$ с матрицей полного столбцового ранга можно найти из системы с невырожденной матрицей:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

4. Существуют другие виды псевдообратных матриц.

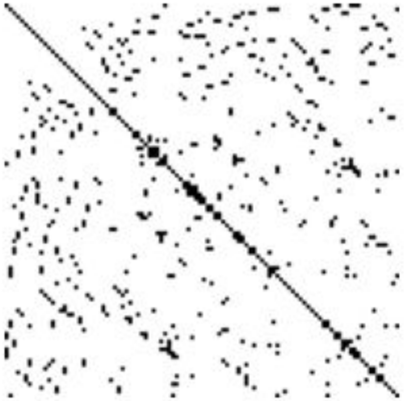
Например, матрица Дразина $\mathbf{A}^D$:

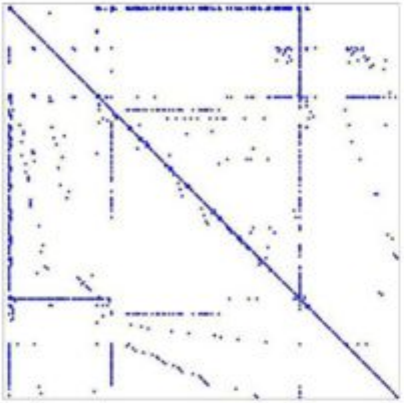
$\mathbf{A}\mathbf{A}^D = \mathbf{A}^D\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^D\mathbf{A}\mathbf{A}^D = \mathbf{A}^D$	$\mathbf{A}^D\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k$

Здесь k — индекс матрицы $\mathbf{A}$, т.е. наименьшее целое неотрицательное число, для которого $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k$.
При этом, $\mathbf{A}^D = \mathbf{A}^k\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^+\mathbf{A}^k$.

Еще пример: полуобратная матрица $\mathbf{A}^-$, удовлетворяющая условию $\mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A} = \mathbf{A}$ (определяется неоднозначно).

1.4. Решение задач с разреженными матрицами





1.4.1. Экономные схемы хранения ненулевых элементов (1, 4)

1.4.2. Операции с разреженными матрицами (1, 4)

1.4.3. Специальные структуры разреженных матриц (1, 3)

1.4.4. Прямые методы решения без изменения структуры матрицы (3)

1.4.5. Прямые методы решения с минимизацией заполнения матрицы (2)

1.4.6. Итерационные методы решения систем (5)

1.4.7. Литература к разделу 1.4

1. Тьюарсон Р. *Разреженные матрицы.* – М.: Мир, 1977
2. Златев З., Эстербю О. *Прямые методы для разреженных матриц.* – М. Мир, 1987.
3. Джордж А., Лю Дж. *Численное решение больших разреженных систем уравнений.* – М. Мир, 1984.
4. Писсанецки С. *Технология разреженных матриц.* – М. Мир, 1988.
5. Хейенман Л., Янг Д. *Прикладные итерационные методы.* – М. Мир, 1988.

Глава 2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

- нелинейное уравнение

$$\boxed{f(x)=0}$$

- система нелинейных уравнений

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_s)=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_s(x_1,\ldots,x_s)=0 \end{cases}}$$

2.1. Методы нахождения корня трансцендентного уравнения

$\boxed{f(x) \text{ – непрерывная}}$ $\quad \boxed{x_* \text{ – корень}}$

2.1.1. Метод последовательных приближений (простых итераций)

$\boxed{f(x)=0} \Rightarrow \boxed{x=\varphi(x)}$

x_0 – начальное приближение $\quad \boxed{x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=1,2,3,\ldots}$ $\quad$ if $x_k \underset{k\to\infty}{\to} x_+ \Rightarrow \boxed{x_+ = x_*}$

Теорема сходимости	**1.** $\forall x', x'' \in U_\delta(x_0)=\{x \,\|\, \|x-x_0\|<\delta\}$, $\|\varphi(x')-\varphi(x'')\|<q\|x-x_0\|$, $0<q<1$ **2.** $\dfrac{\|x_0-\varphi(x_0)\|}{1-q}\le\delta$	$\exists!\, x_*:\ x_k \underset{k\to\infty}{\to} x_*$ $\|x_k-x_*\|\le q^k\delta$

Скорость сходимости	Линейная сходимость	$\exists\alpha\in(0,1):\quad \exists N\in\boldsymbol{N}\quad \forall n\ge\boldsymbol{N}\quad \|x_k-x_*\|<\alpha\|x_{k-1}-x_*\|.$
	Сходимостью степени β	$\exists\alpha\in(0,1):\quad \exists N\in\boldsymbol{N}\quad \forall n\ge\boldsymbol{N}\quad \|x_k-x_*\|<\alpha\|x_{k-1}-x_*\|^\beta.$

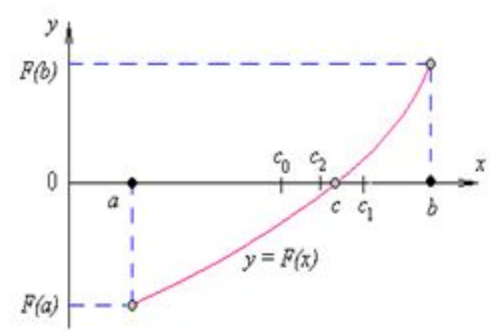
2.1.2. Метод бисекции (метод дихотомии, метод деления отрезка пополам)

$\boxed{f(a)f(b)<0} \Rightarrow \boxed{x_*\in[a,b]}$

$[a,b]=[a_0,b_0]$
$k=1,2,3,\ldots$

$[a_k,b_k] \Rightarrow c_k=\dfrac{a_k+b_k}{2} \Rightarrow$	if $f(a_k)f(c_k)<0 \Rightarrow a_{k+1}=a_k,\ b_{k+1}=c_k$ if $f(a_k)f(c_k)<0 \Rightarrow a_{k+1}=c_k,\ b_{k+1}=b_k$

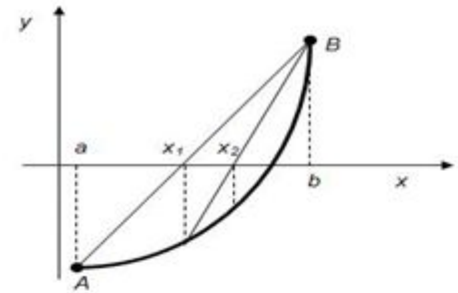
Критерии прекращения итерационного процесса	$k\le K_{\max}$ $\|b_k-a_k\|<\delta$ $\|f(c_k)\|<\varepsilon$	по числу итераций по близости к корню по малости невязки	$b_k-a_k=\dfrac{b-a}{2^k}$ Линейная сходимость



Методы линейной интерполяции

2.1.3. Метод хорд

$f(a)f(b)<0$	$\Rightarrow$	$x_* \in [a,b]$



$[a,b]=[a_0,b_0]$
$k=1,2,3,\dots$

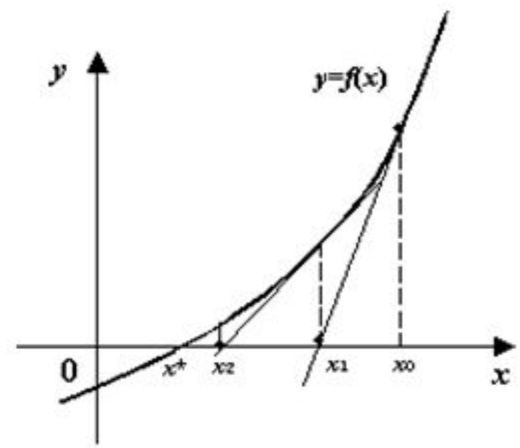
$[a_k,b_k] \Rightarrow$ $c_k = a_k - \dfrac{b_k-a_k}{f(b_k)-f(a_k)} f(a_k)$	if $f(a_k)f(c_k)<0 \Rightarrow a_{k+1}=a_k,\ b_{k+1}=c_k$ if $f(a_k)f(c_k)<0 \Rightarrow a_{k+1}=c_k,\ b_{k+1}=b_k$

Критерии прекращения итерационного процесса	$k \le K_{\max}$ $\lvert c_k - c_{k-1}\rvert < \delta$ $\lvert f(c_k)\rvert < \varepsilon$	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - \bar{x}}{f_k - \bar{f}} f_k$	метод ложного положения

2.1.4. Метод Ньютона (-Рафсона) (метод касательных) $f(x)$ – дифференцируемая функция

x_0 – начальное приближение
$f_k = f(x_k),\quad f'_k = f'(x_k)$
$k=1,2,3,\dots$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f_k}{f'_k}$	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f_k}{f'_0}$ модифицированный	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert<\delta$ $\lvert f(x_k)\rvert<\varepsilon$



Теорема сходимости

<u>квадратичная сходимость</u>

1. $f'(x_0)\neq 0,\ \dfrac{1}{\lvert f'(x_0)\rvert} < B$ **2.** $\left\lvert \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)_0} \right\rvert \le \eta$ **3.** $\exists \delta>0,\ \forall x:\ \lvert x-x_0\rvert<\delta \ \Rightarrow\ f''(x)\le K$ **4.** $h \equiv BK\eta \le \dfrac{1}{2}$	if $\delta \ge \dfrac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$ $\Downarrow$
$\exists!\, x_*:\ x_k \underset{k\to\infty}{\to} x_*,\ \lvert x_k - x_*\rvert \le t_k - t_*,\ t_*$ – корень $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}Kt^2 - \dfrac{1}{B}t + \dfrac{\eta}{B},\ t_{k+1} = t_k - \dfrac{\varphi_k}{\varphi'_k}$	

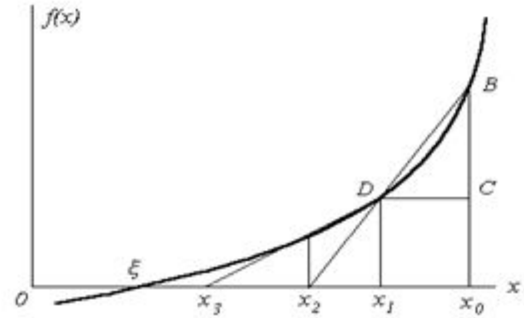
Теорема единственности

if $h<\dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ !x_* \in U_\delta(x_0)$, где $\delta \le t_{**} = \dfrac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\eta$	if $h=\dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ !x_* \in U_\delta(x_0)$, где $\delta = t_{**} = \dfrac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\eta = 2\eta$

Теоремы сходимости и единственности (модифицированного метода) ....

2.1.5. Метод секущих

(как дискретная модификация метода Ньютона)



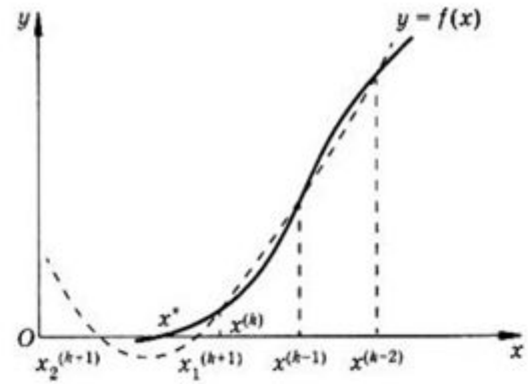
x_0, x_1 – начальные приближения

$f_k = f(x_k)$, $k = 2,3,4,\ldots$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{f_k - f_{k-1}} f_k$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert < \delta$ $\lvert f(x_k) \rvert < \varepsilon$
Скорость сходимости $\beta \approx 1.62$	

Методы квадратичной интерполяции

2.1.6. Метод Мюллера (метод парабол)



В основе метода лежит интерполирование параболой функции $y = f(x)$

x_0, x_1, x_2 – начальные приближения
$k = 3,4,5,\ldots$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})}}$$

Знак выбирается таким образом, чтобы знаменатель был больше по абсолютной величине

$$\omega = f(x_k, x_{k-1}) + f(x_k, x_{k-2}) - f(x_{k-1}, x_{k-2})$$

$$f(x_k, x_{k-1}) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \quad f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}) = \frac{f(x_k, x_{k-1}) - f(x_{k-1}, x_{k-2})}{x_k - x_{k-2}}$$

2.1.7. Метод обратной параболической интерполяции

В основе метода лежит интерполирование параболой обратной функции $x = g(y)$

x_0, x_1, x_2 – начальные приближения

$$x_{k+1} = \frac{f_{k-1} f_k x_{k-2}}{(f_{k-2} - f_{k-1})(f_{k-2} - f_k)} + \frac{f_{k-2} f_k x_{k-1}}{(f_{k-1} - f_{k-2})(f_{k-1} - f_k)} + \frac{f_{k-2} f_{k-1} x_k}{(f_k - f_{k-2})(f_k - f_{k-1})}$$

$k = 3,4,5,\ldots$ Скорость сходимости $\beta \approx 1.84$

2.1.8. Метод Чебышева

В основе метода лежит разложение в ряд Тейлора функции $x = g(y)$ обратной к функции $y = f(x)$.

x_0 – начальное приближение $f_k = f(x_k),\quad f'_k = f'(x_k),\ f''_k = f''(x_k)$	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f_k}{f'_k} - \dfrac{f_k^2 f''_k}{2 f_k'^3},\ k = 0,1,2,\ldots$

кубическая сходимость

2.1.9. Метод Лагерра

В основе метода лежит интерполирование параболой алгебраического многочлена $y = f(x)$

x_0 – начальное приближение $f_k = f(x_k),\quad f'_k = f'(x_k),\ f''_k = f''(x_k)$	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{nf_k}{\sqrt{(n-1)^2 f_k'^2 - n(n-1) f_k f''}},\ k = 0,1,2,\ldots$

Методы Паде-аппроксимации

В основе методов лежат два вида Паде-аппроксимации функции $x = g(y)$ обратной к функции $y = f(x)$.

2.1.10. $x = [0/1]_g(y)$

2.1.11. Метод Галлея (Хэлли) $x = [1/1]_g(y)$

x_0 – начальное приближение

$f_k = f(x_k),\ f'_k = f'(x_k),\ f''_k = f''(x_k)$

$t_k = -\dfrac{f_k}{f'_k}$

$r_k = \dfrac{f''_k}{f'_k} t_k^2$

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2}{x_k - t_k},\ k = 1,2,3,\ldots$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{t_k^2}{t_k + \frac{1}{2} r_k},\ k = 1,2,3,\ldots$$

2.2. Методы нахождения корней алгебраических многочленов

2.2.1. Схема Горнера вычисления значений полинома и его производных

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \ldots + a_{n-1})x + a_n$$

$$\boxed{s_0 = a_0,\ s_i = a_i + s_{i-1}x_0,\ i = 1,\ldots,n,\ s_n = P_n(x_0)} \Rightarrow \boxed{P_n(x) = (s_0x^{n-1} + s_1x^{n-2} + \ldots + s_{n-1})(x - x_0) + s_n}$$

$$\boxed{s_0^{(k)} = s_0^{(k-1)},\ s_i^{(k)} = s_i^{(k-1)} + s_{i-1}^{(k-1)}x_0,\ i = 1,\ldots,n-k,\ k!s_{n-k}^{(k)} = P_n^{(k)}(x_0)}$$

2.2.2. Методы определения границ корней

а) Границы всех корней $\boxed{\dfrac{|a_n|}{\alpha' + |a_n|} \le |z| \le \dfrac{\alpha}{|a_0|},\ \alpha = \max\limits_{i>0}|a_i|,\ \alpha' = \max\limits_{i<n}|a_i|}$ $\boxed{\dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}| + \sqrt{|a_na_{n-2}|}} \le |z| \le \dfrac{|a_1| + \sqrt{|a_0a_2|}}{|a_0|}}$

б) Верхняя граница положительных корней $\boxed{a_0 > 0,\ N_0 = 1 + \sqrt[k]{\dfrac{A}{a_0}},\ k = \min\{i \mid a_i < 0\},\ A = \max\limits_{i \ge k}\{-a_i\}}$

в) Нижняя граница отрицательных корней $\boxed{P_n(-x) \quad \Rightarrow N_0}$

г) Нижняя граница положительных корней $\boxed{x^nP_n(x^{-1}) \ \Rightarrow N_0}$

д) Верхняя граница отрицательных корней $\boxed{x^nP_n(-x^{-1}) \Rightarrow N_0}$

е) Верхняя граница положительных корней $\boxed{P_n^{(k)}(c) > 0,\ k = 0,\ldots,n \ \Rightarrow}$

2.2.3. Методы определения числа вещественных корней

а) Число вещественных корней = $\boxed{n - 2m}$ ***б) Число положительных корней*** = $\boxed{\#\ \text{перемен знака } a_i - 2m}$

в) Число вещественных корней $\in (a,b)$ = $\boxed{w(b) - w(a)}$

$w(c)$ - число перемен знаков в последовательности Штурма $f_0(c),\ f_1(c),\ \ldots,\ f_n(c)$

$$\boxed{f_0(x) = P_n(x)\ \ f_1(x) = P_n'(x)\ \ldots,\ f_{k-1}(x) = f_k(x)q_k(x) - f_{k+1}(x),\ k = 1,\ldots,n-1}$$

2.2.4. Метод Лобачевского-Греффе

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0$	$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)$	$x_i,\ i=1,\ldots,n$ – корни
$\widetilde{P}(x)\equiv(-1)^nP(-x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^na_n$	$\widetilde{P}(x)=a_0(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_{n-1})(x+x_n)$	$-x_i,\ i=1,\ldots,n$ – корни
$\hat{P}(z)\equiv P(x)\widetilde{P}(x)=a_0^{(1)}z^n-a_1^{(1)}z^{n-1}+\ldots+(-1)^na_n^{(1)}$	$P_1(x)=(-1)^n\hat{P}(-x)=a_0(x+x_1^2)(x+x_2^2)\ldots(x+x_n^2)$	$-x_i^2,\ i=1,\ldots,n$ – корни

$\downarrow$ после k шагов

$P_k(x)=a_0^{(k)}x^n+a_1^{(k)}x^{n-1}+a_1^{(k)}x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}^{(k)}x\ \ +a_n^{(k)}$ $:-x_i^m,\ m=2^k,\ i=1,\ldots,n$ – корни	$a_0^{(k+1)}=a_0^{(k)2},\ a_1^{(k+1)}=a_1^{(k)2}-2a_0^{(k)}a_2^{(k)},\ a_2^{(k+1)}=a_2^{(k)2}-2a_1^{(k)}a_3^{(k)}+2a_0^{(k)}a_4^{(k)},\ldots$ $\ldots a_{n-2}^{(k+1)}=a_{n-2}^{(k)2}-2a_{n-3}^{(k)}a_{n-1}^{(k)}+2a_{n-4}^{(k)}a_0^{(k)},\ a_{n-1}^{(k+1)}=a_{n-1}^{(k)2}-2a_{n-2}^{(k)}a_n^{(k)},\ a_n^{(k+1)}=a_n^{(k)2}$

$$
\begin{array}{l}
x_1^m+x_2^m+x_3^m+\ldots+x_{n-1}^m+x_n^m=a_1^{(k)}/a_0^{(k)}\\
x_1^mx_2^m+x_1^mx_3^m+\ldots+x_1^mx_n^m+x_2^mx_3^m+\ldots+x_{n-1}^mx_n^m=a_2^{(k)}/a_0^{(k)}\\
x_1^mx_2^mx_3^m+\ldots+x_1^mx_{n-1}^mx_n^m+x_2^mx_3^mx_4^m+\ldots+x_{n-2}^mx_{n-1}^mx_n^m=a_3^{(k)}/a_0^{(k)}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_1^mx_2^mx_3^m\ldots x_{n-1}^m+\ldots+x_2^mx_3^m\ldots x_{n-1}^mx_n^m=a_{n-1}^{(k)}/a_0^{(k)}\\
x_1^mx_2^mx_3^m\ldots x_{n-1}^mx_n^m=a_n^{(k)}/a_0^{(k)}
\end{array}
$$

Формулы Виетта

1) $\lvert x_1\rvert>\lvert x_2\rvert>\lvert x_3\rvert>\lvert x_4\rvert>\ldots>\lvert x_n\rvert$	*2)* $\lvert x_1\rvert>\underline{\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert}>\lvert x_4\rvert>\ldots>\lvert x_n\rvert$	*3)* $\lvert x_1\rvert>\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert>\ldots>\lvert x_n\rvert,\ \underline{x_{2,3}=re^{\pm i\varphi}}$
$x_1^m\approx a_1^{(k)}/a_0^{(k)}\qquad a_1^{(k)}\approx a_1^{(k)2}$	$x_1^m\approx a_1^{(k)}/a_0^{(k)}\qquad a_1^{(k)}\approx a_1^{(k)2}$	$x_1^m\approx a_1^{(k)}/a_0^{(k)}\qquad a_1^{(k)}\approx a_1^{(k)2}$
$x_2^m\approx a_2^{(k)}/a_1^{(k)}\qquad a_2^{(k)}\approx a_2^{(k)2}$	$x_2^m\approx \frac{1}{2}a_2^{(k)}/a_1^{(k)}\qquad a_2^{(k)}\approx \frac{1}{2}a_2^{(k)2}$	$---\qquad ---$
$x_3^m\approx a_3^{(k)}/a_2^{(k)}\qquad a_3^{(k)}\approx a_3^{(k)2}$	$x_2^{2m}\approx a_3^{(k)}/a_1^{(k)}\qquad a_3^{(k)}\approx a_3^{(k)2}$	$r^{2m}\approx a_3^{(k)}/a_1^{(k)}\qquad a_3^{(k)}\approx a_3^{(k)2}$
$x_4^m\approx a_4^{(k)}/a_3^{(k)}\ \Rightarrow\ a_4^{(k)}\approx a_4^{(k)2}$	$x_4^m\approx a_4^{(k)}/a_3^{(k)}\ \Rightarrow\ a_4^{(k)}=a_4^{(k)2}$	$x_4^m\approx a_4^{(k)}/a_3^{(k)}\ \Rightarrow\ a_4^{(k)}=a_4^{(k)2}$
$\vdots\qquad\vdots$	$\vdots\qquad\vdots$	$\vdots\qquad\vdots$
$x_{n-1}^m\approx a_{n-1}^{(k)}/a_{n-2}^{(k)}\qquad a_{n-1}^{(k)}\approx a_{n-1}^{(k)2}$	$x_{n-1}^m\approx a_{n-1}^{(k)}/a_{n-2}^{(k)}\qquad a_{n-1}^{(k)}\approx a_{n-1}^{(k)2}$	$x_{n-1}^m\approx a_{n-1}^{(k)}/a_{n-2}^{(k)}\qquad a_{n-1}^{(k)}\approx a_{n-1}^{(k)2}$
$x_n^m\approx a_n^{(k)}/a_{n-1}^{(k)}\qquad a_n^{(k)}=a_n^{(k)2}$	$x_n^m\approx a_n^{(k)}/a_{n-1}^{(k)}\qquad a_n^{(k)}=a_n^{(k)2}$	$x_n^m\approx a_n^{(k)}/a_{n-1}^{(k)}\qquad a_n^{(k)}=a_n^{(k)2}$
		$x_1+2r\cos\varphi+x_4+\ldots+x_n=-a_1/a_0$

2.2.5. Другой метод нахождения всех корней

В основе метода лежит метод Ньютона

$x_i^{(0)}$, $i=1,2,\ldots,n$ – начальные приближения ко всем корням $P(x)$	$k=1,2,\ldots$ $Q_k(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i^{(k)})$	$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-\dfrac{P(x_i^{(k)})}{Q_k'(x_i^{(k)})}$, $i=1,2,\ldots,n$	$\lvert x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\rvert<\delta$, $i=1,2,\ldots,n$ $\lvert f(x_i^{(k)})\rvert<\varepsilon$, $i=1,2,\ldots,n$

Метод сходится для многочленов, имеющих простые корни ($x_i \neq x_j, i \neq j$).

2.2.6. Методы выделения множителей $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

а) Метод Лина (метод предпоследнего остатка)

$g_0(x)$ – начальное приближение $\Rightarrow$	$\{g_k(x)\}$ $k=1,2,3,\ldots$	$P(x)=xg_k(x)r_k(x)+\alpha_{k+1}g_{k+1}(x)$

Линейный делитель $g_k(x)=x-x_k$	Квадратичный делитель $g_k(x)=x^2+p_kx+q_k$
$x_{k+1}=\dfrac{P(0)x_k}{P(0)-P(x_k)}=\dfrac{a_nx_k}{a_n-P(x_k)}=-\dfrac{a_n}{s_{n-1}}$	$P(x)=x(x^2+p_kx+q_k)(b_0x^{n-3}+b_1x^{n-4}+\ldots+b_{n-3})+$ $+b_{n-2}(x^2+p_{k+1}x+q_{k+1})$

б) Метод Берстоу выделение квадратичного делителя

$$P(x)=(x^2+px+q)R(x)+b_{n-1}(x+p)+b_n \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1}\equiv b_{n-1}(p,q)=0 \\ b_n\equiv b_n(p,q)=0 \end{cases}$$

$P(x)=(x^2+p_kx+q_k)R_{n-2}(x)+b_{n-1}(x+p_k)+b_n$ $R_{n-2}(x)=(x^2+p_kx+q_k)S_{n-4}(x)+c_{n-3}(x+p_k)+c_{n-2}$	$M=p_kc_{n-2}+q_kc_{n-3}$ $D=c_{n-2}^2-Mc_{n-3}$	$p_{k+1}=p_k+\dfrac{b_{n-1}c_{n-2}+b_nc_{n-3}}{D}$, $q_{k+1}=q_k+\dfrac{b_nc_{n-2}+b_{n-1}M}{D}$

$$P(x)=x(x^2+p_kx+q_k)(b_0x^{n-3}+b_1x^{n-4}+b_{n-3})+$$
$$+b_{n-1}(x^2+p_{k+1}x+q_{k+1})$$

2.2.7. Метод Бернулли $P(x) = x^n - p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \ldots - p_{n-1} x - p_n$

В основе метода лежат формулы Ньютона $x_i,\ i = 1,2,\ldots,n$ – корни многочлена

$$kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \ldots - p_{k-1} s_1,\ k = 1,2,\ldots,n \qquad s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

$\mu_0, \mu_{-1}, \mu_{-2}, \ldots, \mu_{-n+1}$ – произвольные величины (например, $\mu_0 = 1,\ \mu_{-i} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n-1$)

$$\mu_k = p_1 \mu_{k-1} + p_2 \mu_{k-2} + \ldots + p_n \mu_{k-n},\ k = 1,2,3,\ldots$$

1) $x_1 = \ldots = x_p,\ |x_1| > |x_{p+1}| > \ldots > |x_n|$ $\quad x_1 \approx \mu_{k+1}/\mu_k$

2) $x_1 = \ldots = x_p = -x_{p+1} = \ldots = -x_{p+q},\ |x_1| > |x_{p+q+1}| > \ldots > |x_n|$ $\quad x_1^2 \approx \mu_{k+2}/\mu_k$

3)

2.2.8. Метод наискорейшего спуска

2.2.9. Методы ускорения сходимости $x = \varphi(x)$

а) $y_0 = x_0,\quad y_1 = x_1 = \varphi(x_0)$ $\quad y_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$x_{k+1} = y_{k+1} - \frac{(y_{k+1} - y_k) - (y_{k+1} - x_k)}{(y_{k+1} - y_k) - (x_k - x_{k-1})}$$

процесс Эйткена увеличивает скорость сходимости с β до $2\beta - 1$

б) $x_{3k+1} = \varphi(x_{3k})$ $\quad x_{3k+2} = \varphi(x_{3k+1})$

$$x_{3k+3} = \frac{x_{3k+2} x_{3k+1} - x_{3k}^2}{x_{3k+2} - 2x_{3k+1} - x_{3k}}$$

2.2.10. Методы исчерпывания $P(x) = 0$ $\quad f(x) = 0$

а) α – корень $\quad x - \alpha$ – делитель $P(x)$ $\quad Q(x) = \dfrac{P(x)}{x - \alpha}$ $\quad Q'(x) = \dfrac{P'(x)(x-\alpha) - P(x)}{(x-\alpha)^2},\ Q''(x)$

б) α, β – корни $\quad (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + px + q$ – делитель $P(x)$ $\quad Q(x) = \dfrac{P(x)}{x^2 + px + q}$ $\quad Q'(x) = \ldots,\ Q''(x) = \ldots$

2.3. Методы решения систем нелинейных уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_s) = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_s(x_1, \ldots, x_s) = 0 \end{cases}$$

2.3.1. Метод последовательных приближений (простых итераций)

$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})}$

$\mathbf{x}_0$ – начальное приближение $\quad \boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_k),\ k = 1,2,3,\ldots} \quad \text{if } \mathbf{x}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{x}_+ \Rightarrow \boxed{\mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_*}$

Теорема сходимости

1. $\forall \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in U_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \mid \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta\}$, $\rho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}'), \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}'')) < q\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, $0 < q < 1$ 2. $\dfrac{\rho(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0))}{1-q} \le \delta$	$\exists!\, \mathbf{x}_* : \mathbf{x}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{x}_*$ $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_*) \le q^k \delta$

Критерии прекращения итерационного процесса $\quad \boxed{k \le K_{\max}} \quad \boxed{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \delta} \quad \boxed{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon}$

Интерполяционные методы

2.3.2. Метод Ньютона-Рафсона

В основе метода лежит разложение векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора $\quad \boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)} \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \left\{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{s}$ матрица Якоби

$\mathbf{x}_0$ – начальное приближение

$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$, $\quad \mathbf{f}'_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$

$k = 1,2,3,\ldots$

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}_k'^{-1}\mathbf{f}_k$	$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}_0'^{-1}\mathbf{f}_k$ модифицированный	$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) < \delta$ $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon$

Теорема сходимости

Скорость сходимости квадратичная

1. $\|\mathbf{f}'^{-1}(\mathbf{x}_0)\| < B$	2. $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\|_\infty \le \eta$
3. $\forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty < 2B\eta \Rightarrow \|\mathbf{f}''(x)\| \le L$	4. $h \equiv B^2 L \eta \le \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\exists!\, \mathbf{x}_* : \mathbf{x}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{x}_*,\quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|_\infty < \dfrac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} B\eta} \Rightarrow \boxed{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|_\infty < \dfrac{1}{2^{2n-1}}(2h)^{2n-1} B\eta}$

2.3.3. Метод секущих

как дискретная модификация метода Ньютона
$\mathbf{x}_0$ – начальное приближение, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\boxed{\mathbf{f}'_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{H}_k^{-1}\mathbf{\Gamma}_k} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{f}'^{-1}_k \approx \mathbf{\Gamma}_k^{-1}\mathbf{H}_k}$$

а) Простейшие аппроксимации частных производных
(h, h_j, h_{ij} – малые величины)

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\mathbf{x}_k + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)}{h} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H}_k = h\mathbf{I},\ \mathbf{\Gamma}_k = \left\{\gamma_{ij}^{(k)}\right\}_{i,j}^{s},\ \gamma_{ij}^{(k)} = f_i(\mathbf{x}_k + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)$$

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\mathbf{x}_k + h_j\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)}{h_j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H}_k = \mathrm{diag}\{h_j\}_{j=1}^{s},\ \mathbf{\Gamma}_k = \left\{\gamma_{ij}^{(k)}\right\}_{i,j}^{s},\ \gamma_{ij}^{(k)} = f_i(\mathbf{x}_k + h_j\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)$$

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\mathbf{x}_k + \sum_{l=1}^{j} h_{il}\mathbf{e}_l) - f_i(\mathbf{x}_k \sum_{l=1}^{j-1} h_{il}\mathbf{e}_l)}{h_{ij}} \Rightarrow$$

б) Использование вспомогательных точек

$$\mathbf{x}_{k,j},\ j = 1, 2, \ldots, s \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_k = \mathrm{col}\{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k,j}\}_{j=1}^{s},\quad \mathbf{\Gamma}_k = \mathrm{col}\{\mathbf{f}(\mathbf{x})_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k,j})\}_{j=1}^{s}$$

в) Использование предшествующих приближений $\quad k = s, s+1, \ldots$
$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{s-1}$ – начальные приближения

$$\mathbf{x}_{k-j},\ j = 1, 2, \ldots, s \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_k = \mathrm{col}\{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-j}\}_{j=1}^{s},\quad \mathbf{\Gamma}_k = \mathrm{col}\{\mathbf{f}(\mathbf{x})_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-j})\}_{j=1}^{s}$$

Интерполяционные методы второго порядка

В основе методов лежат два вида квадратичной интерполяции векторной функции $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ обратной к $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$:

ряд Тейлора $\quad \boxed{\mathbf{x} \approx \mathbf{g}(\mathbf{y}_k) + \mathbf{g}'(\mathbf{y}_k)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_k) + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}''(\mathbf{y}_k)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_k)^2} \quad$ Паде-аппроксимация

$\boxed{\mathbf{x}_0 \text{ – начальное приближение}}$ $\quad \boxed{\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k),\ \mathbf{f}'_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k),\ \mathbf{f}''_k = \mathbf{f}''(\mathbf{x}_k)}$ $\quad \boxed{\mathbf{t}_k = \mathbf{f}'^{-1}_k\mathbf{f}_k}$ $\quad \boxed{\mathbf{r}_k = \mathbf{f}'^{-1}_k\mathbf{f}''_k\mathbf{t}_k^2}$

2.3.4. Метод Чебышева $\quad \mathbf{x} = [2/0]_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$

$$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{t}_k - \frac{1}{2}\mathbf{r}_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots}$$

2.3.5. Метод Галлея (Хэлли) $\quad \mathbf{x} = [1/1]_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$

$$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{t}_k^2}{\mathbf{t}_k + \frac{1}{2}\mathbf{r}_k},\ k = 1, 2, 3, \ldots}$$

2.3.6. Метод Зейделя модификация метода простых итераций (сходимость ???)

$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_k)}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x_i^{(k+1)} = \varphi(x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}, \ldots, x_s^{(k)}),\ i = 1, 2, \ldots, s}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_i^{(k+1)} = \varphi(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \ldots, x_s^{(k)}),\ i = 1, 2, \ldots, s}$

2.3.7. Комбинированные методы и аналоги методов решения СЛАУ

комбинация итерационных методов решения системы нелинейных уравнений с приближенным решением СЛАУ

а) Метод Ньютона + SOR-метод

$\boxed{\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k),\ \mathbf{f}'_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)}$ система $\mathbf{f}'_k \mathbf{t}_k = \mathbf{f}_k$ решается SOR-методом (1 – 3 шага) $\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{t}_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots}$

система решается как последовательность скалярных уравнений

б) Аналог метода Якоби $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 0$ ***в) Аналог метода Зейделя***

$\boxed{f_i(x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}, x_i, x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_s^{(k)}) = 0}$ $i = 1, 2, \ldots, s$ $\boxed{f_i(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i, x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_s^{(k)}) = 0}$

2.3.8. Метод наискорейшего спуска $\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} f_i^2(\mathbf{x})}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\min_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_*) = 0}$

Задача сводится к минимизации функционала, осуществляемая градиентным методом

$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}_k)}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - \alpha_k \sum_{j=1}^{s} f_j(\mathbf{x}_k) \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\min_{\alpha_k} \Phi(\mathbf{x}_{k+1})}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_k \approx \frac{\Phi(\mathbf{x}_k)}{\|\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}_k)\|_2^2}}$

2.3.9. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений

Сведение частных видов систем к нахождению корней одного алгебраического уравнения

Литература к главе 2

1. Загускин В.Л. *Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений.* – М.: ГИФМЛ, 1960
2. Мысовских И.П. *Лекции по методам вычислений.* – СПб.: Изд. СПбГУ, 1998.
3. Трауб Дж. *Итерационные методы решения уравнений.* – М.: Мир, 1985.
4. Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – М.: Мир, 1975.

Глава 3. Решение проблемы собственных значений для матриц

3.1. Виды задач, классификация, обусловленность

3.1.1. Виды задач на собственные значения

1) Обычная проблема собственных значений

$\boxed{\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u},\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}}$ $\boxed{\mathbf{A} - n \times n}$

$\boxed{|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0}$ $\boxed{|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^n - \ldots - p_n) \equiv (-1)^n\varphi(\lambda)}$ $\boxed{\lambda_i \text{ – корни } \varphi(\lambda),\ i = 1, 2, \ldots, n}$ $\boxed{p_1 = \mathrm{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\ (-1)^{n-1}p_n = |A| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i}$

A – простой структуры

$\boxed{\mathbf{Au}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\mathbf{AU} = \mathbf{U\Lambda} \\ \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \forall\lambda_i \in \boldsymbol{R}\end{matrix}}$

общий случай

$\boxed{\begin{matrix}\mathbf{AX} = \mathbf{XJ} \\ \mathbf{J} = \text{block diag}\{\mathbf{J}^i(\lambda_i)\} \\ \mathbf{J}^i(\lambda_i) = \text{block diag}\{\mathbf{J}^i_j(\lambda_i)\}\end{matrix}}$ $\boxed{\mathbf{J}^i_j(\lambda_i) = \begin{bmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix} - j \times j}$

2) Обобщенная проблема собственных значений

$\boxed{\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{Bu}} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{0}}$ $\boxed{\mathbf{A},\ \mathbf{B} - m \times n}$

регулярная задача

сингулярная задача

$\boxed{\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}}$ $\boxed{|\mathbf{B}| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}}$ $\boxed{|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda^{-1}\mathbf{I}}$ $\boxed{\exists\alpha : |\mathbf{A} - \alpha\mathbf{B}| \neq 0 \Rightarrow \ldots}$ $\boxed{\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = \text{block diag}\{\mathbf{J}_{\mathcal{C}}, \mathbf{N}_\infty, \mathbf{R}_\varepsilon, \mathbf{L}_\eta\}}$

3) Полиномиальная проблема собственных значений

$\boxed{(\lambda^s\mathbf{A}_s + \lambda^{s-1}\mathbf{A}_{s-1} + \ldots + \lambda\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0)\mathbf{u} = \mathbf{0}}$ $\boxed{\forall\,\mathbf{A}_i - m \times n}$

$\boxed{\mathbf{D}(\lambda) = \lambda^s\mathbf{A}_s + \lambda^{s-1}\mathbf{A}_{s-1} + \ldots + \lambda\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0} \Rightarrow \boxed{\mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{B} - ms \times ns}$

4) Нелинейная проблема собственных значений

$\boxed{\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{u} = \mathbf{0}}$ $\boxed{\mathbf{D}(\lambda) = \{d_{ij}(\lambda)\} - m \times n}$

регулярная задача

$\boxed{|\mathbf{D}(\lambda)| = 0}$

3.1.2. Классификация методов решения

- методы
  - прямые
    - $\varphi(\lambda)$, $p_i,\ i=1,\dots,n$ $\Rightarrow$ см. 2.1, 2.2 $\Leftarrow$ $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$
  - итерационные

- задачи
  - частичная
    - $\lambda_i,\ i=1,\dots,p$ $(p<<n)$
    - $\lambda_i, \mathbf{u}_i, i=1,\dots,p$ $(p<<n)$
  - полная
    - $\forall\lambda_i$
    - $\forall\lambda_i,\ \forall\mathbf{u}_i$

3.1.3. Обусловленность проблемы собственных значений

A – простой структуры

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i=\lambda_i\mathbf{u}_i,\ \mathbf{v}_i^T\mathbf{A}=\lambda_i\mathbf{v}_i^T \quad i=1,2,\dots,n,\ (\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)=0,\ i\neq j$$

$$(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})(\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_i)=(\lambda_i+\Delta\lambda_i)(\mathbf{u}_i+\Delta\mathbf{u}_i)\ \Big|(\dots,\mathbf{v}_j)\ \Rightarrow (\Delta\mathbf{A}\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)+(\mathbf{A}\Delta\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)=\lambda_i(\Delta\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)+\Delta\lambda_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)\ \Rightarrow$$

if $i=j$

$$\boxed{(\mathbf{A}\Delta\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i)=(\Delta\mathbf{u}_i,\mathbf{A}^T\mathbf{v}_i)=\lambda_i(\Delta\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i)} \Rightarrow \boxed{(\Delta\mathbf{A}\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i)=\Delta\lambda_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i)} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda_i=\frac{(\Delta\mathbf{A}\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i)}}$$

$$\boxed{|\Delta\lambda_i|\le\frac{\|\mathbf{u}_i\|\|\mathbf{v}_i\|}{|(\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i)|}\|\Delta\mathbf{A}\|} \Rightarrow \boxed{\delta_i=\frac{\|\mathbf{u}_i\|\|\mathbf{v}_i\|}{|(\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i)|}=\frac{1}{|\cos\varphi_i|}\ \text{– коэффициент перекоса, } \varphi_i=(\mathbf{u}_i\hat{;}\,\mathbf{v}_i)}$$

if $i\neq j$

$$\boxed{(\Delta\mathbf{A}\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)=(\lambda_i-\lambda_j)(\Delta\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)\Rightarrow(\Delta\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)=\frac{(\Delta\mathbf{A}\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)},\ \Delta\mathbf{u}_i=\sum_{k\neq i}\alpha_{ik}\mathbf{u}_k} \Rightarrow \boxed{(\Delta\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)=\alpha_{ij}(\mathbf{u}_j,\mathbf{v}_j),\ \alpha_{ij}=\frac{(\Delta\mathbf{A}\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)(\mathbf{u}_j,\mathbf{v}_j)}}$$

if $\|\mathbf{u}_i\|=\|\mathbf{v}_i\|=1$, $i=1,2,\dots,n$

$$\boxed{\Delta\mathbf{u}_i=\sum_{j\neq i}\frac{(\Delta\mathbf{A}\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)(\mathbf{u}_j,\mathbf{v}_j)}\mathbf{u}_j} \Rightarrow \boxed{\|\Delta\mathbf{u}_i\|\le\sum_{j\neq i}\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{u}_i\|\|\mathbf{v}_j\|}{|\lambda_i-\lambda_j||(\mathbf{u}_j,\mathbf{v}_j)|}\|\mathbf{u}_j\|} \Rightarrow \boxed{\|\Delta\mathbf{u}_i\|\le\|\Delta\mathbf{A}\|\sum_{j\neq i}\frac{\delta_j}{|\lambda_i-\lambda_j|}}$$

<u>Обусловленность собственного значения</u> λ_i зависит от его коэффициента перекоса $\delta_i=\dfrac{1}{|\cos\varphi_i|}$

<u>Обусловленность собственного вектора</u> $\mathbf{u}_i$ зависит от всех коэффициентов перекоса $\delta_j=\dfrac{1}{|\cos\varphi_j|}$, $j\neq i$,

и от близости λ_i к другим собственным значениям λ_j, $j\neq i$.

3.2. Прямые методы решения обычной проблемы собственных значений

Вычисление характеристического полинома или его коэффициентов

$$\boxed{|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^n - \ldots - p_n) \equiv (-1)^n\varphi(\lambda)}$$

3.2.1. Метод Леверье

В основе метода лежат формулы Ньютона

$$\boxed{\mathbf{A}^k,\ k=1,2,\ldots,n} \Rightarrow \boxed{s_k = \mathrm{tr}\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k,\ k=1,2,\ldots,n} \Rightarrow \boxed{p_1 = s_1,\ kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \ldots - p_{k-}s_1,\ k=1,2,\ldots,n}$$

3.2.2. Метод Д.К.Фаддеева (-Леверье)

Модификация метода Леверье

$$\boxed{\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \Rightarrow q_k = \frac{1}{k}\mathrm{tr}\mathbf{A}_k,\quad \mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k - q_k\mathbf{I},\quad \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{B}_k,\quad k=1,2,\ldots,n}$$

Теорема

$$\boxed{1)\ q_k = p_k,\ k=1,2,\ldots,n} \quad \boxed{2)\ \mathbf{B}_n = \mathbf{O}} \quad \boxed{3)\ \mathbf{B}_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathbf{A}_{\Pi},\ \text{if } \|\mathbf{A}\| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{p_n}\mathbf{B}_{n-1}}$$

3.2.3. Метод Данилевского

Метод состоит в приведении матрицы к подобной ей форме Фробениуса

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A},\ \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{P}_k,\ \mathbf{P}_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & -a_{1k}^{(k)}a_{k+1,k}^{(k)-1} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & a_{k+1,k}^{(k)-1} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -a_{nk}^{(k)}a_{k+1,k}^{(k)-1} & & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & & a_{1k}^{(k)} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & a_{k+1,k}^{(k)} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a_{nk}^{(k)} & & 1 \end{bmatrix},\ k=2,\ldots,n,\ \mathbf{A}_n = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} & & & p_n \\ 1 & & & p_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & p_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{A}_k: \quad \boxed{\mathbf{B}_{k+1,*}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k)-1}\mathbf{A}_{k+1,*}^{(k)}} \quad \boxed{\mathbf{B}_{i*}^{(k)} = \mathbf{A}_{i*}^{(k)} - a_{ik}^{(k)}\mathbf{B}_{k+1,*}^{(k)},\ i \neq k+1} \quad \boxed{\left(\mathbf{B}_{*k}^{(k)} = \mathbf{e}_{k+1}\right)}$$

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{B}_k\mathbf{P}_k: \quad \boxed{\mathbf{A}_{*,k+1}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(k)}\mathbf{B}_{*i}^{(k)}} \quad \boxed{\mathbf{A}_{*j}^{(k+1)} = \mathbf{B}_{*j}^{(k)},\ i \neq k+1} \quad \boxed{\left(\mathbf{A}_{*k}^{(k)} = \mathbf{e}_{k+1}\right)}$$

3.2.4. Вычисление характеристического многочлена для матриц специального вида

а) $\mathbf{A}=\mathbf{S}$ – трехдиагональная матрица

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_2 & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & \gamma_n & \alpha_n\end{bmatrix},\ \mathbf{S}_k=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_2 & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_k \\ & & \gamma_k & \alpha_k\end{bmatrix}$$

$$p_k(t)=|\mathbf{S}_k-t\mathbf{I}_k|,\ k=1,2,\ldots,n,\quad \mathbf{S}_n=\mathbf{S}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_0(t)=1,\ p_1(t)=\alpha_1-t, \\ p_k(t)=(\alpha_k-t)p_{k-1}(t)-\beta_k\gamma_k p_{k-2}(t),\ k=2,\ldots,n\end{array}}$$

б) $\mathbf{A}=\mathbf{H}$ – матрица Хессенберга (верхняя)

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{bmatrix},\ \mathbf{H}_k=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & a_{k-1,k} \\ & & a_{k,k-1} & a_{kk}\end{bmatrix}$$

$$p_k(t)=|\mathbf{H}_k-t\mathbf{I}_k|,\ k=1,2,\ldots,n,\ \mathbf{H}_n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_0(t)=1,\ p_1(t)=a_{11}-t, \qquad k=2,\ldots,n \\ p_k(t)=(a_{kk}-t)p_{k-1}(t)-a_{k-1,k}a_{k,k-1}a_{k-1,k-2}p_{k-2}(t)-\ldots-a_{1,k}a_{k,k-1}\ldots a_{21}p_0(t)\end{array}}$$

Приведение матрицы к специальному виду ортогональными преобразованиями $\quad \mathbf{QAQ}^T=\mathbf{S}\quad$ или $\quad \mathbf{QAQ}^T=\mathbf{H}$

3.2.5. Метод Гивенса

$$\boxed{\mathbf{Q}=\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{24}\ldots\mathbf{T}_{2n}\mathbf{T}_{34}\ldots\mathbf{T}_{3n}\ldots\mathbf{T}_{n-1,n}}$$

$$\boxed{\mathbf{B}=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}}\Rightarrow\boxed{\mathbf{B}_{k*}=\mathbf{A}_{k*},\ k\neq i,j,\ \mathbf{B}_{i*}=c\mathbf{A}_{i*}+s\mathbf{A}_{j*},\ \mathbf{B}_{j*}=-s\mathbf{A}_{i*}+c\mathbf{A}_{j*}}$$

$$\boxed{\mathbf{C}=\mathbf{B}\mathbf{T}_{ij}^T}\Rightarrow\boxed{\mathbf{C}_{*k}=\mathbf{B}_{*k},\ k\neq i,j,\ \mathbf{C}_{*i}=c\mathbf{B}_{*i}+s\mathbf{B}_{*j},\ \mathbf{C}_{*j}=-s\mathbf{B}_{*i}+c\mathbf{B}_{*j}}$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}0=c_{j,i-1}=b_{j,i-1}= \\ =-sa_{i,i-1}+ca_{j,i-1}\end{array}}\Rightarrow\boxed{c=\frac{a_{i,i-1}}{\sqrt{a_{i,i-1}^2+a_{j,i-1}^2}},\ s=\frac{a_{j,i-1}}{\sqrt{a_{i,i-1}^2+a_{j,i-1}^2}}}$$

а) $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T \qquad \mathbf{C}=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}\mathbf{T}_{ij}^T \qquad c_{j,i-1}=c_{i-1,j}=0 \qquad \boxed{\mathbf{QAQ}^T=\mathbf{S}}$

б) $\mathbf{A}\neq\mathbf{A}^T \qquad \mathbf{C}=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}\mathbf{T}_{ij}^T \qquad c_{j,i-1}\neq c_{i-1,j}=0 \qquad \boxed{\mathbf{QAQ}^T=\mathbf{H}^T}$

3.2.6. Метод Хаусхольдера *а)* … *б)* …

$$\boxed{\mathbf{Q}=\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\ldots\mathbf{U}_{n-1}}$$

3.2.7. Метод Ланцоша

Приведение симметричной матрицы к трехдиагональному виду ортогонализацией последовательности Крылова

$\boxed{\mathbf{p}_1,\ \|\mathbf{p}_1\|_2=1\ (\mathbf{p}_0=\mathbf{0})}$ $\boxed{\mathbf{q}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{p}_k-\alpha_k\mathbf{p}_k-\beta_k\mathbf{p}_{k-1}}$ $\boxed{\alpha_k=(\mathbf{A}\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_k),\ \beta_{k+1}=\|\mathbf{q}_{k+1}\|_2}$ $\boxed{\mathbf{p}_{k+1}=\beta_{k+1}^{-1}\mathbf{q}_{k+1},\ k=1,\ldots,n\ (\beta_{n+1}=0)}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{A}\mathbf{p}_k=\beta_k\mathbf{p}_{k-1}+\alpha_k\mathbf{p}_k+\beta_{k+1}\mathbf{p}_{k+1} \\ k=1,\ldots,n\end{array}}\Rightarrow\quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_2 & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & \beta_n & \alpha_n\end{bmatrix}$$

3.3. Итерационные методы решения полной проблемы собственных значений

3.3.1. Использование методов нахождения корней алгебраического многочлена

а) Итерационные методы вычисление корней алгебраического многочлена $\varphi(\lambda)$ — <u>см. методы из 2.1 – 2.2</u>

б) Использование рекуррентных формул для матриц специального вида

$\mathbf{A} = \mathbf{S}$

$p_0(t)=1,\ p_1(t)=\alpha_1 - t,\ p_k(t)=(\alpha_k - t)p_{k-1}(t) - \beta_k\gamma_k p_{k-2}(t),\ k=2,\dots,n$	$p_n(t)=(-1)^n\varphi(t)$
$p_0'(t)=0,\ p_1'(t)=-1,\ p_k'(t)=(\alpha_k - t)p_{k-1}'(t) - \beta_k\gamma_k p_{k-2}'(t) - p_{k-1}(t),\ k=2,\dots,n$	$p_n'(t)=(-1)^n\varphi'(t)$
$p_0''(t)=0,\ p_1''(t)=0,\ p_k''(t)=(\alpha_k - t)p_{k-1}''(t) - \beta_k\gamma_k p_{k-2}''(t) - 2p_{k-1}'(t),\ k=2,\dots,n$	$p_n''(t)=(-1)^n\varphi''(t)$

$\mathbf{A} = \mathbf{H}$

$p_0(t)=1,\ p_1(t)=a_{11} - t,\ p_k(t)=(a_{kk} - t)p_{k-1}(t) - a_{k-1,k}a_{k,k-1}a_{k-1,k-2}p_{k-2}(t) + \ldots + (-1)^{k-1}a_{1,k}a_{k,k-1}\ldots a_{21}p_0(t),\ k=2,\dots,n$
$p_0'(t)=0,\ p_1'(t)=-1,\ p_k'(t)=(a_{kk} - t)p_{k-1}'(t) - a_{k-1,k}a_{k,k-1}a_{k-1,k-2}p_{k-2}'(t) + \ldots + (-1)^{k-1}a_{1,k}a_{k,k-1}\ldots a_{32}p_1'(t) - p_{k-1}(t),\ k=2,\dots,n$
$p_0''(t)=0,\ p_1''(t)=0,\ p_k''(t)=(a_{kk} - t)p_{k-1}''(t) - a_{k-1,k}a_{k,k-1}a_{k-1,k-2}p_{k-2}''(t) + \ldots + (-1)^{k-1}a_{1,k}a_{k,k-1}\ldots a_{32}p_1''(t) - 2p_{k-1}'(t),\ k=2,\dots,n$

в) Итерационные методы вычисление корней детерминантного уравнения $|\mathbf{D}(t)| = 0$ — <u>см. методы из 2.1</u>

г) Исчерпывание вычисленных корней $\boxed{\varphi_1(x) = \varphi(t)/(t-\alpha)}$ $\boxed{\varphi_1(x) = \varphi(t)/(t^2 + pt + q)}$

3.3.2. Методы деления спектра (для симметричных трехдиагональных матриц)

Используются свойства последовательности Штурма $p_0(t)=1,\ p_1(t)=\alpha_1 - t,\ p_k(t)=(\alpha_k - t)p_{k-1}(t) - \beta_k\gamma_k p_{k-2}(t),\ k=2,\dots,n$

а) обычная проблема собственных значений $\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ $(\mathbf{A} = \mathbf{A}^T)$

\# перемен знака $p_k(c),\ k=1,2,\dots,n$ = # с.з. $< c$ $\Rightarrow$ применение методов бисекции, …

б) обобщенная проблема собственных значений $\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}$ $(\mathbf{A} = \mathbf{A}^T,\ \mathbf{B} > 0)$

$$\mathbf{A} - c\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{LDL}^T,\ \mathbf{L}\ (l_{ii}=1),\ \mathbf{D} = \mathrm{diag}\{d_1,\dots,d_n\}$$

$\lvert\mathbf{D}(c)\rvert = \prod_{k=1}^{n} d_k,\ d_1 = \alpha_1,\ d_k = \alpha_k - \beta_k^2/d_{k-1},\ k=2,\dots,n$
отрицательных $d_k,\ k=1,2,\dots,n$ = # с.з. $< c$

$\Rightarrow$ применение методов бисекции, хорд, секущих, …

3.3.3. Метод Якоби $\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{A}^T} \Rightarrow \boxed{\mathbf{QAQ}^T=\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}}$

$\boxed{\mathbf{A}_0=\mathbf{A},\ \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \dots,\ \mathbf{A}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{\Lambda}}$ $\boxed{\mathbf{A}_{k+1}=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}_k\mathbf{T}_{ij}^T}$ $\underset{\text{один шаг}}{\leftrightarrow}$ $\boxed{\mathbf{C}=\mathbf{BT}_{ij}^T=(\mathbf{T}_{ij}\mathbf{A})\mathbf{T}_{ij}^T}$ $\widetilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{bmatrix},\ \widetilde{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj}\end{bmatrix}=\widetilde{\mathbf{T}}_{ij}\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{T}}_{ij}^T$

$\boxed{n^2(\mathbf{A})=\sum_{i,j}a_{ij}^2,\quad t^2(\mathbf{A})=\sum_{i\neq j}a_{ij}^2=n^2(\mathbf{A})-\sum_i a_{ii}^2}$ $\leftarrow \rightarrow$ $\boxed{n^2(\widetilde{\mathbf{A}})=a_{ii}^2+a_{ij}^2+a_{ji}^2+a_{jj}^2,}$

$\boxed{n^2(\mathbf{C})=\sum_{i,j}c_{ij}^2,\quad t^2(\mathbf{C})=\sum_{i\neq j}c_{ij}^2=n^2(\mathbf{C})-\sum_i c_{ii}^2}$ $\boxed{n^2(\widetilde{\mathbf{C}})=c_{ii}^2+c_{ij}^2+c_{ji}^2+c_{jj}^2,}$

$$\boxed{\begin{gathered} n^2(\mathbf{C})\equiv\|\mathbf{C}\|_E^2=\mathrm{tr}\mathbf{C}^2=\mathrm{tr}\mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}^2\mathbf{T}_{ij}^T=\mathrm{tr}\mathbf{A}^2=\|\mathbf{A}\|_E^2=n^2(\mathbf{A}) \\ t^2(\mathbf{C})-t^2(\mathbf{A})=\sum_k(a_{kk}^2-c_{kk}^2)=a_{ii}^2+a_{jj}^2-c_{ii}^2-c_{jj}^2 \end{gathered}} \Rightarrow \boxed{t^2(\mathbf{C})-t^2(\mathbf{A})=2c_{ij}^2-2a_{ij}^2} \Leftarrow \boxed{\begin{gathered} n^2(\widetilde{\mathbf{C}})=n^2(\widetilde{\mathbf{A}}) \\ a_{ii}^2+a_{ij}^2+a_{ji}^2+a_{jj}^2=c_{ii}^2+c_{ij}^2+c_{ji}^2+c_{jj}^2 \end{gathered}}$$

$\boxed{\mathbf{B}=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{A}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}_{k*}=\mathbf{A}_{k*},\ k\neq i,j,\ \mathbf{B}_{i*}=c\mathbf{A}_{i*}+s\mathbf{A}_{j*},\ \mathbf{B}_{j*}=-s\mathbf{A}_{i*}+c\mathbf{A}_{j*}}$

$\boxed{\mathbf{C}=\mathbf{BT}_{ij}^T} \Rightarrow \boxed{\mathbf{C}_{*k}=\mathbf{B}_{*k},\ k\neq i,j,\ \mathbf{C}_{*i}=c\mathbf{B}_{*i}+s\mathbf{B}_{*j},\ \mathbf{C}_{*j}=-s\mathbf{B}_{*i}+c\mathbf{B}_{*j}}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} c_{ji}=c_{ij}=cb_{ji}+sb_{jj}=c(-sa_{ii}+ca_{ji})+s(-sa_{ji}+ca_{jj})= \\ =(c^2-s^2)a_{ji}+cs(a_{jj}-a_{ii}) \end{gathered}}$$

$$c_{ji}=c_{ij}=0 \Rightarrow t^2(\mathbf{C})-t^2(\mathbf{A})=-2a_{ij}^2 \Rightarrow a_{ji}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(a_{jj}-a_{ii})\sin 2\varphi=0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}2\varphi=\frac{2a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}}}$$

а) классический

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right|=\max_{p\neq q}\left|a_{pq}^{(k)}\right|$$

сходимость

$$t^2(\mathbf{A}_k)\le t^2(\mathbf{A})\left(1-\frac{1}{n(n-1)}\right)^k$$

б) циклический

$$i=1,\dots,n-1$$
$$j=i+1,\dots,n$$

в) с преградами

$$\omega_1=\frac{t(\mathbf{A})}{n(n-1)}>\omega_2>\omega_3>\ldots\ge\varepsilon$$

3.3.4. Уточнение приближений к собственным значениям (после метода Якоби)

$$\boxed{a_{ij}=\varepsilon\alpha_{ij},\ \forall\ j\neq i} \overset{?}{\Rightarrow} \boxed{\lambda_i\cong a_{ii}+k_i\varepsilon^2,\ i=1,\dots,n}$$

$$\left|\mathbf{A}-(a_{11}+k_1\varepsilon^2)\mathbf{I}\right|\cong\begin{vmatrix} -k_1\varepsilon^2 & \varepsilon\alpha_{12} & \dots & \varepsilon\alpha_{1n} \\ \varepsilon\alpha_{21} & a_{22}-a_{11} & \dots & \varepsilon\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \varepsilon\alpha_{n1} & \varepsilon\alpha_{n2} & & a_{nn}-a_{11}\end{vmatrix}\approx\varepsilon^2\begin{vmatrix} -k_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & a_{22}-a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \alpha_{n1} & 0 & & a_{nn}-a_{11}\end{vmatrix}\cong 0 \Rightarrow \boxed{k_1=\sum_{j\neq 1}\frac{\alpha_{1j}\alpha_{j1}}{a_{11}-a_{jj}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_i\cong a_{ii}+\sum_{j\neq i}\frac{a_{ij}a_{ji}}{a_{ii}-a_{jj}}}$$

3.3.5. LR-алгоритм (Рутисхаузер)

а) алгоритм без сдвигов $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ $\boxed{\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{R}_k \ (l_{ii}^{(k)} = 1) \Rightarrow \mathbf{R}_k\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_{k+1},\ k = 1,2,3,\dots}$ $(\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{L}_k^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{L}_k = \mathbf{R}_k\mathbf{A}_k\mathbf{R}_k^{-1})$

if $\mathbf{A}$ – простой структуры, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| \Rightarrow r_{ii}^{(k)} \to \lambda_k$ линейная сходимость $O\left(\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right|^k + \left|\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right|^k\right)$ –

б) модификация со сдвигом (односторонним) (и с понижением порядка)

$\boxed{\mathbf{A} - t_1\mathbf{I} = \mathbf{L}_1\mathbf{R}_1}$ $\boxed{\mathbf{R}_k\mathbf{L}_k - (t_{k+1} - t_k)\mathbf{I} = \mathbf{L}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1},\ t_{k+1} = t_k + r_{nn}^{(k)},\ k = 1,2,3,\dots}$ $\boxed{t_{k+1} \to \lambda_n}$ квадратичная сходимость

3.3.6. QR-алгоритм (Френсис, Кублановская В.Н.)

а) алгоритм без сдвигов $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ $\boxed{\mathbf{A}_k\mathbf{Q}_k = \mathbf{L}_k \Rightarrow \mathbf{Q}_k^T\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_{k+1},\ k = 1,2,3,\dots}$ $(\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^T\mathbf{A}_k\mathbf{Q}_k)$

if $\mathbf{A}$ – простой структуры, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| \Rightarrow a_{ii}^{(k)2} \to \lambda_i^2$ линейная (квадратичная if $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) сходимость

б) модификация со сдвигами (двусторонними) (и с понижением порядка)

$\boxed{(\mathbf{A}_k - t_k\mathbf{I})\mathbf{Q}_k = \mathbf{L}_k,\ \mathbf{Q}_k^T\mathbf{L}_k + t_k\mathbf{I} = \mathbf{A}_{k+1}\ t_k = a_{nn}^{(k)}}$ $\boxed{t_{k+1} \to \lambda_n}$ квадратичная (кубическая if $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) сходимость

в) с предварительным приведением к форме Хессенберга

if $\mathbf{A} = \mathbf{H}^T$ – нижняя (левая), $\mathbf{AQ} = \mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{Q} = T_{12}^T T_{23}^T \dots T_{n-1,n}^T \Rightarrow T_{12}T_{23}\dots T_{n-1,n}\mathbf{L}$ – нижняя (левая) $\Rightarrow \forall \mathbf{A}_k$ – нижние (левые)

3.3.7. Решение обобщенной и полиномиальной регулярных задач

а) Сведение обобщенной задачи к обычной

для регулярных задач $\boxed{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}}$ $\boxed{\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2} - \lambda\mathbf{I}}$ $\boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mu\mathbf{I}}$ $\boxed{(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} - \mu\mathbf{I}}$

б) Решение полной обобщенной задачи

для регулярных и сингулярных задач **QZ-алгоритм** **AB-алгоритм**

в) Сведение полиномиальной задачи к обобщенной

$$\mathbf{D}(\lambda) = \lambda^s\mathbf{A}_s + \lambda^{s-1}\mathbf{A}_{s-1} + \dots + \lambda\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -\lambda\mathbf{I} & & & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{I} & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{A}_{s-2} \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{A}_s - \lambda\mathbf{A}_{s-1} \end{bmatrix}$$

3.4. Методы решения частичной проблемы собственных значений $\boxed{\lambda_i, \mathbf{u}_i, i=1,\dots,p \ (1\le p \ll n)}$

3.4.1. Степенной метод

if $\mathbf{A}$ – простой структуры $\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$, $i=1,2,\dots,n$, $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\dots\ge|\lambda_n|$

а) $|\lambda_1|>|\lambda_2|\ge\dots\ge|\lambda_n|$

$$\boxed{\mathbf{y}_0 \ne \mathbf{0} \ (\mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i)} \quad \boxed{\begin{array}{c}\underline{\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k} = \mathbf{A}^2\mathbf{y}_{k-1} = \dots = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{y}_0 \\ k=0,1,2,\dots\end{array}} \quad \boxed{\mathbf{y}_{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\lambda_i^{k+1}\mathbf{u}_i = \alpha_1\lambda_1\left(\mathbf{u}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1}\mathbf{u}_i\right)}$$

if $\alpha_1 \ne 0,\ u_j^1 \ne 0$

$$\frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \frac{\alpha_1\lambda_1^{k+1}u_j^1(1+O(|\lambda_2/\lambda_1|^{k+1}))}{\alpha_1\lambda_1^k u_j^1(1+O(|\lambda_2/\lambda_1|^k))} = \lambda_1\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right)$$

$\mathbf{y}_{k+1} \xrightarrow[\text{по направлению}]{} \mathbf{u}_1$

<u>линейная</u> сходимость

нормировка $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k$, $\mathbf{y}_{k+1} = \gamma_k^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ $\quad \boxed{\gamma_k = \tilde{y}_j^{(k+1)} \ (\gamma_k = \|y_{k+1}\|_\infty)}$ $\quad \boxed{\gamma_k = \pm\|\tilde{y}_{k+1}\|_2}$ $\quad \boxed{\gamma_k = \dfrac{(\tilde{y}_{k+1}, y_k)}{(y_k, y_k)}}$

б) $\lambda_1 = \dots = \lambda_p$, $|\lambda_1|>|\lambda_{p+1}|\ge\dots\ge|\lambda_n|$

if $\sum_{i=1}^p \alpha_i u_j^i \ne 0$

$$\frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i\lambda_1^{k+1}u_j^i(1+O(|\lambda_{p+1}/\lambda_1|^{k+1}))}{\sum_{i=1}^p \alpha_i\lambda_1^k u_j^i(1+O(|\lambda_{p+1}/\lambda_1|^k))} = \lambda_1\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right)$$

$\mathbf{y}_{k+1} \xrightarrow[\text{по направлению}]{} \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i$

<u>линейная</u> сходимость

в) $\lambda_1 = -\lambda_2$, $|\lambda_1|>|\lambda_3|\ge\dots\ge|\lambda_n|$

if $\alpha_1 u_j^1 + \alpha_2 u_j^2 \ne 0$

$$\frac{y_j^{(2k+2)}}{y_j^{(2k)}} = \frac{\lambda_1^{2k+2}(\alpha_1 u_j^1 + \alpha_2 u_j^2)(1+O(|\lambda_3/\lambda_1|^{2k+2}))}{\lambda_1^{2k}(\alpha_1 u_j^1 + \alpha_2 u_j^2)(1+O(|\lambda_3/\lambda_1|^{2k}))} = \lambda_1^2\left(1+O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)\right)$$

$\mathbf{y}_{k+1} + \lambda_1\mathbf{y}_k \xrightarrow[\text{по направлению}]{} \mathbf{u}_1$

$\mathbf{y}_{k+1} - \lambda_1\mathbf{y}_k \xrightarrow[\text{по направлению}]{} \mathbf{u}_2$

г) $\lambda_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$ $(|\lambda_1|\approx|\lambda_2|)$, $|\lambda_2|>|\lambda_3|\ge\dots\ge|\lambda_n|$ $\quad \lambda_1+\lambda_2 = -p,\ \lambda_1\lambda_2 = q \quad \alpha_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta} \quad y_j^{(k)} = 2r^k\rho\cos(k\varphi+\theta) + \sum_{i=3}^p \alpha_i\lambda_1^k u_j^i$

$$\begin{aligned} &y_j^{(k+1)} + py_j^{(k)} + qy_j^{(k-1)} \approx \\ &\approx \alpha_1 u_j^1\lambda_1^{k-1}(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) + \alpha_2 u_j^2\lambda_2^{k-1}(\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q) \approx 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_j^{(k+1)} + py_j^{(k)} + qy_j^{(k-1)} \approx 0 \\ y_l^{(k+1)} + py_l^{(k)} + qy_l^{(k-1)} \approx 0 \end{cases}}$$

$\mathbf{y}_{k+1} - \lambda_2\mathbf{y}_k \xrightarrow[\text{по направлению}]{} \mathbf{u}_1$

$\mathbf{y}_{k+1} + \lambda_1\mathbf{y}_k \xrightarrow[\text{по направлению}]{} \mathbf{u}_2$

д) ***Метод следов*** (идейно близок к степенному методу) $\quad s_k = \mathrm{tr}\mathbf{A}^k$, $s_{k+1}/s_k \to \lambda_1$

3.4.2. Метод обратных итераций

а) $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n|$ $\boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}_i = \lambda_i^{-1}\mathbf{u}_i}$ $\boxed{\mathbf{y}_0 \ne \mathbf{0},\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_k}$ $\boxed{k = 0,1,2,\ldots} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k}$ для пучка $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}$: $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_k}$

б) $|\lambda_1 - \alpha| \le |\lambda_2 - \alpha| \le \ldots \le |\lambda_n - \alpha|$ $\boxed{(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_i = (\lambda_i - \alpha)^{-1}\mathbf{u}_i} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k,\ k = 0,1,2,\ldots}$ для пучка $\boxed{(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{B})\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_k}$

3.4.3. Метод градиентной релаксации $\boxed{\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B},\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^T,\ \mathbf{B} > 0 \Rightarrow \forall\lambda_i \in \boldsymbol{R}}$ $\boxed{\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n}$

$\boxed{\mathbf{x} \ne \mathbf{0},\ \rho(\mathbf{x}) = \dfrac{(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x})}{(\mathbf{B}\mathbf{x},\mathbf{x})}}$ – отношение Релея $\boxed{\max_{\mathbf{x}\ne 0} \rho(\mathbf{x}) = \lambda_1,\ \max_{\mathbf{x}\perp\mathbf{u}_1} \rho(\mathbf{x}) = \lambda_2,\ \ldots,\ \min_{\mathbf{x}\ne 0} \rho(\mathbf{x}) = \lambda_n}$

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{z}} = \lim_{t\to 0}\frac{\rho(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) - \rho(\mathbf{x})}{t} = \ldots = \frac{2}{(B\mathbf{x},\mathbf{x})}((\mathbf{A} - \rho(\mathbf{x})B)\mathbf{x},\mathbf{z}) \Rightarrow \operatorname{grad}\rho(\mathbf{x}) = \frac{2}{(B\mathbf{x},\mathbf{x})}(\mathbf{A} - \rho(\mathbf{x})B)\mathbf{x} = \frac{2}{(B\mathbf{x},\mathbf{x})}\mathbf{r}$$

$\mathbf{x}$ – текущее приближение $\mathbf{r} = (\mathbf{A} - \rho(\mathbf{x})B)\mathbf{x}$ – вектор невязки $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{r}}$ – следующее приближение

$$\begin{matrix}\max_{\alpha}\rho(\mathbf{x}') \\ \min_{\alpha}\rho(\mathbf{x}')\end{matrix} \Rightarrow \frac{d}{d\alpha}\rho(\mathbf{x}') = 0 \Rightarrow \alpha - \begin{matrix}\text{наибольший } (>0) \\ \text{наименьший } (<0)\end{matrix} \text{ корень уравнения } \boxed{at^2 + bt + c = 0}$$

$$\boxed{a = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{x},\mathbf{r})(\mathbf{A}\mathbf{r},\mathbf{r}) - (\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{r})(\mathbf{B}\mathbf{r},\mathbf{r})}{(\mathbf{B}\mathbf{x},\mathbf{x})}} \quad \boxed{b = (\mathbf{A}\mathbf{r},\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{x})(\mathbf{B}\mathbf{r},\mathbf{r})} \quad \boxed{c = (\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{x})(\mathbf{B}\mathbf{x},\mathbf{r})}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{r}_k:\ \mathbf{f}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k,\ \mathbf{g}_k = \mathbf{B}\mathbf{x}_k,\ \beta_k = (\mathbf{g}_k,\mathbf{x}_k)\ \ \rho_k = \frac{(\mathbf{f}_k,\mathbf{x}_k)}{\beta_k},\ \mathbf{r}_k = \mathbf{f}_k - \rho_k\mathbf{g}_k,\ \mathbf{p}_k = \mathbf{A}\mathbf{r}_k,\ \mathbf{q}_k = \mathbf{B}\mathbf{r}_k,$$

$$\boxed{a_k = \frac{(\mathbf{g}_k,\mathbf{r}_k)(\mathbf{p}_k,\mathbf{r}_k) - (\mathbf{f}_k,\mathbf{r}_k)(\mathbf{q}_k,\mathbf{r}_k)}{\beta_k}} \quad \boxed{b_k = (\mathbf{p}_k,\mathbf{r}_k) - \rho_k(\mathbf{q}_k,\mathbf{r}_k)} \quad \boxed{c_k = (\mathbf{f}_k,\mathbf{r}_k) - \rho_k(\mathbf{g}_k,\mathbf{r}_k)}$$

3.4.4. Методы координатной релаксации $\boxed{\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B},\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^T,\ \mathbf{B} > 0}$ $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_i}$ – следующее приближение

а) $\boxed{\dfrac{d\rho(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_i)}{d\alpha} = 0} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{g_i a_{ii} - f_i b_{ii}}{\beta}}$ $\boxed{b = a_{ii} - \rho b_{ii}}$ $\boxed{c = f_i - \rho g_i} \Rightarrow \boxed{\alpha \text{ – корень уравнения } at^2 + bt + c = 0}$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} + \alpha\mathbf{A}_{*i},\ \mathbf{g}' = \mathbf{g} + \alpha\mathbf{B}_{*i},\ \beta' = \beta + \alpha(g_i + g_i'),\ \rho' = \rho + \frac{\alpha^2}{\beta'}\sqrt{b^2 4ac}$$

б) $\boxed{(\mathbf{A} - \rho(\mathbf{x})B)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ – система нелинейных уравнений}} \Rightarrow \boxed{b = a_{ii} - \rho b_{ii}}$ $\boxed{c = f_i - \rho g_i} \Rightarrow \boxed{\alpha = -b/c}$

3.4.5. Методы уточнения собственных значений и собственных векторов

а) Метод обратных итераций (μ_0 – приближение к собственному значению пучка $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{B}$, $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$)

– стационарные итерации (метод Виландта) $\boxed{(\mathbf{A}-\mu_0\mathbf{B})\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}=\mathbf{B}\mathbf{y}_k,\ \mathbf{y}_{k+1}=\gamma_k^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1},\ \mu_0+\gamma_k^{-1}\to\lambda_1,\ \mathbf{y}_k\to\mathbf{u}_1,\ k=0,1,\ldots}$

– нестационарные итерации (+ модификация P-W) $\boxed{(\mathbf{A}-\mu_k\mathbf{B})\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}=\mathbf{B}\mathbf{y}_k,\ \mathbf{y}_{k+1}=\gamma_k^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1},\ \mu_{k+1}=\mu_k+\gamma_k^{-1}\to\lambda_1\ \ k=0,1,2,\ldots}$

–итерации с отношением Релея $\boxed{(\mathbf{A}-\rho_k\mathbf{B})\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}=\mathbf{B}\mathbf{y}_k,\ \mathbf{y}_{k+1}=\gamma_k^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1},\ \rho_{k+1}=\rho(\mathbf{y}_{k+1})\to\lambda_1\ \ k=0,1,2,\ldots}$

б) Метод Берстоу (вычисление квадратичного делителя характеристического полинома матрицы $\mathbf{A}$: см. п/п. 2.2.6.б)

в) Решение нелинейного уравнения (μ_0 – приближение к собственному значению $\mathbf{D}(\lambda)$)

– решение детерминантного уравнения $|\mathbf{D}(\lambda)|=0$

– решение уравнения $\sigma_n(\lambda)=0$ ($\sigma_n(\mu_k)$ – наименьшее сингулярное значение матрицы $\mathbf{D}(\mu_k)$)

– решение уравнения $l_{nn}(\lambda)=0$ ($l_{nn}(\mu_k)$ – элемент матрицы $\mathbf{L}(\mu_k)$ из нормализованного разложения матрицы $\mathbf{D}(\mu_k)$)

метод Ньютона $\boxed{\mathbf{D}_k=\mathbf{D}(\mu_k)}$ $\boxed{\mathbf{\Theta}_k\mathbf{D}_k\mathbf{Q}_k=\mathbf{L}_k}$ $\boxed{\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k=\mathbf{\Theta}_k\mathbf{q}_n^{(k)}}$ $\boxed{\mu_{k+1}=\mu_k+x_n^{(k)-1}}$ $\boxed{k=0,1,2,\ldots}$

3.4.6. Метод одновременных итераций (для пучка $\mathbf{D}(\lambda)=\mathbf{A}-\lambda\mathbf{B}$)

$\mathbf{U}_1$ – <u>блочный</u> $n\times l$ <u>с.в.</u>, $\mathbf{\Lambda}_1$ – <u>блочное</u> $l\times l$ <u>с.з.</u> $\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{\Lambda}_1\tilde{\mathbf{u}}_j=\lambda_j\tilde{\mathbf{u}}_j \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{U}_1\tilde{\mathbf{u}}_j)=\lambda_j\mathbf{B}(\mathbf{U}_1\tilde{\mathbf{u}}_j)$, $j=1,\ldots,l$

– обобщение степенного метода $\boxed{\mathbf{B}\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{Y}_k,\ \mathbf{Y}_{k+1}=\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}\mathbf{\Gamma}_k^{-1}}$ $\boxed{\mathbf{Y}_{k+1}\to\mathbf{U}_1,\ \mathbf{\Gamma}_k\to\mathbf{\Lambda}_1,\ k=0,1,2,\ldots}$

– обобщение обратных итераций $\boxed{(\mathbf{A}-\alpha\mathbf{B})\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}=\mathbf{B}\mathbf{Y}_k,\ \mathbf{Y}_{k+1}=\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}\mathbf{\Gamma}_k^{-1}}$ $\boxed{\mathbf{Y}_{k+1}\to\mathbf{U}_1,\ (\alpha\mathbf{I}+\mathbf{\Gamma}_k^{-1})\to\mathbf{\Lambda}_1,\ k=0,1,2,\ldots}$

один из способов «нормировки»: $\mathbf{\Gamma}_k=(\mathbf{Y}_k^T\mathbf{Y}_k)^{-1}(\mathbf{Y}_k^T\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1})$

3.4.7. Метод итерации подпространств (методы Ланцоша, Арнольди)

$\boxed{\mathbf{p}_1,\ \|\mathbf{p}_1\|_2=1\ (\mathbf{p}_0=\mathbf{0})}$ $\boxed{\mathbf{q}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{p}_k-\alpha_k\mathbf{p}_k-\beta_k\mathbf{p}_{k-1}}$ $\boxed{\alpha_k=(\mathbf{A}\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_k),\ \beta_{k+1}=\|\mathbf{q}_{k+1}\|_2}$ $\boxed{\mathbf{p}_{k+1}=\beta_{k+1}^{-1}\mathbf{q}_{k+1},\ k=1,2,3,\ldots}$

$$P_k=span\{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_k\},\quad \mathbf{P}_k=[\mathbf{p}_1\ \cdots\ \mathbf{p}_k],\quad \mathbf{S}_k=\mathbf{P}_k^T\mathbf{A}\mathbf{P}_k=\begin{bmatrix}\alpha_1&\beta_2&&\\ \beta_2&\alpha_2&\ddots&\\ &\ddots&\ddots&\beta_k\\ &&\beta_k&\alpha_k\end{bmatrix},\quad \lambda_j(\mathbf{S}_k)\to\lambda_j(\mathbf{A}),\quad k=1,2,3,\ldots\ (<<n)$$

3.5. Методы исчерпывания и понижения размеров

3.5.1. Методы исчерпывания

а) Метод Хотеллинга исчерпывания собственного значения матрицы и пучка

$$\begin{matrix}\mathbf{Au}_i = \lambda_i \mathbf{Bu}_i \\ \mathbf{v}_i^T\mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^T\mathbf{B}\end{matrix} \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \mathbf{v}_1^T\mathbf{Bu}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{Bu}_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1^T\mathbf{B} \qquad \begin{matrix}\mathbf{A}_1\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{Bu}_i \\ \mathbf{v}_i^T\mathbf{A}_1 = \lambda_i \mathbf{v}_i^T\mathbf{B}\end{matrix} \quad i = 2, \ldots, n \qquad \begin{matrix}\mathbf{A}_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_1^T\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}^T\end{matrix} \begin{pmatrix}\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_1 \to \alpha\end{pmatrix}$$

б) Метод Виландта исчерпывания собственного значения матрицы и пучка

$$\begin{matrix}\mathbf{Au}_i = \lambda_i \mathbf{Bu}_i \\ \mathbf{v}_i^T\mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^T\mathbf{B}\end{matrix} \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \mathbf{z}_1^T\mathbf{Bu}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{Bu}_1 \lambda_1 \mathbf{z}_1^T\mathbf{B} \qquad \begin{matrix}\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}_i \\ \mathbf{v}_i^T\mathbf{A}_1 = \lambda_i \mathbf{v}_i^T\mathbf{B}\end{matrix} \quad i = 2, \ldots, n \qquad \begin{matrix}\mathbf{A}_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{v}}_1^T\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}^T\end{matrix} \begin{pmatrix}\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_1 \to \alpha\end{pmatrix}$$

в) Обобщения методов Хотеллинга и Виландта исчерпывания блочного собственного значения матрицы и пучка

г) Обобщения методов Хотеллинга и Виландта для полиномиальной задачи

3.5.2. Понижение размеров

а) Понижение размеров матрицы с исчерпыванием одного собственного значения

$$\begin{matrix}\mathbf{Au}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \\ i = 1, 2, \ldots, n\end{matrix} \qquad \mathbf{Hu}_1 = \gamma \mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{HAH}^{-1} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & \hat{\mathbf{A}}\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{u}}_i \\ i = 2, \ldots, n\end{matrix} \Rightarrow \mathbf{u}_i = \mathbf{H}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ \hat{\mathbf{u}}_i\end{bmatrix}$$

Матрица $\mathbf{H}$ может быть вычислена как матрица отражения или произведение матриц вращения

$$\mathbf{Qu}_1 = \alpha \mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{Q}$$

б) Понижение размеров матрицы с исчерпыванием блочного собственного значения

$$\mathbf{AU}_1 = \mathbf{U}_1\mathbf{\Lambda}_1 \qquad \mathbf{HU}_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{O}\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{HAH}^{-1} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{\Lambda}}_1 & \mathbf{P} \\ \mathbf{O} & \hat{\mathbf{A}}\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{u}}_i \\ i = 2, \ldots, n\end{matrix} \Rightarrow \mathbf{u}_i = \mathbf{H}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ \hat{\mathbf{u}}_i\end{bmatrix}$$

Матрица $\mathbf{H}$ может быть вычислена нормализованным процессом разложения

$$\mathbf{QU}_1\mathbf{\Theta} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}_0 \\ \mathbf{O}\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{QU}_1 = \mathbf{R\Theta} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}_0\mathbf{\Theta} \\ \mathbf{O}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{R}}_0 \\ \mathbf{O}\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{Q}$$

в) Понижение размеров пучка матриц