

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

NUMERICAL ANALYSIS

NUMERISCHE MATHEMATIK

ANALYSE NUMÉRIQUE

MATEMÁTICA NUMÉRICA

0. Введение

0.1. Характеристика дисциплины

0.1.1. Классификация методов решения задач

- аналитические - численные - стохастические	- большое количество приложений	- универсальные - специфические
--	---------------------------------	------------------------------------

0.1.2. Место дисциплины в Computer Science

- Теория вычислительных методов
- Вычислительная техника (Hardware)
- Программное обеспечение (Software)

Взаимосвязь и взаимодействие: дифф. ур. в част. произв. \Rightarrow разреж. сист. порядка n				
до ЭВМ	50-е – 60-е	70-е – 80-е	...	сейчас
$10 - 10^2$	$10^3 - 10^4$	$10^5 - 10^6$???

0.1.3. Типичные математические задачи

1. Задачи алгебры	- системы линейных алгебраических уравнений - нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений - проблема собственных значений для матриц
2. Задачи анализа	- аппроксимация функций - численное дифференцирование - численное интегрирование
3. Задачи матфизики	- обыкновенные дифференциальные уравнения - дифференциальные уравнения в частных производных - интегральные уравнения - интегро-дифференциальные уравнения
4. Задачи оптимизации	- линейное программирование - нелинейное (квадратичное) программирование - дискретное программирование - целочисленное программирование - условная оптимизация
5. Обратные задачи	- некорректные задачи

0.1.4. Содержание дисциплины, виды занятий и отчетности

Семестр	Раздел	Лекции	Практические	Лабораторные	Курсовая	Зачет	Экзамен

0.1.5. Литература

- Кублановская В.Н. *Численные методы алгебры*. – Л.: Изд. ЛКИ, 1978.
- Кублановская В.Н. *Численные методы анализа*. – Л.: Изд. ЛКИ, 1980.
- Кублановская В.Н. *Современные численные методы решения задач судостроения*. – Л.: Изд. ЛКИ, 1980.
- Хазанов В.Б. *Численные методы анализа (Лабораторный практикум)*. – СПб.: Изд. СПбГМТУ, 2000.
- Руховец Л.А. *Численные методы (Метод сеток и МКЭ для уравнений в частных производных)*. – СПб.: Изд. СПбГМТУ, 1997.
- Бахвалов И.С., Жидков Н.П., Кобельков Е.З. *Численные методы*. – М.: Изд. МГУ, 2007.
- Калиткин Н.Н. *Численные методы*. – СПб.: БХВ, 2011
- Рябенский В.С. *Введение в вычислительную математику* - ФИЗМАТЛИТ, 2008
- Рыжиков Ю. *Вычислительные методы*. – СПб.: БХВ, 2007
- Бахвалов И.С. Лапин А.В. Чижонков Г.М. *Численные методы в задачах и упражнениях*. – М.: Бином, 2010.
- Петров И.Б. Лебедев Ф.И. *Лекции по вычислительной математике*. – М.: Бином, 2006.
- Устинов С.М. Зимицкий В.Л. *Вычислительная математика*. – СПб.: БХВ, 2009.
- Пирумов У.Г. *Численные методы*. – СПб.: БХВ, 2011.
- Поршев С.В. *Вычислительная математика*. – СПб.: БХВ, 2004.
- Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач*, – 1990.
- Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*. – Изд. МГУ, 1989.
- Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры*. – М.-Л.: Физматгиз, 1963.
- Уилкинсон Дж. *Алгебраическая проблема собственных значений*. – М.: Мир, 1970.
- Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – М.: Мир, 1975.
- Мысовских И.П. *Лекции по методам вычислений*. – СПб.: Изд. СПбГУ, 1998.
- Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. – М.: Наука, 1977.
- Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Слайды в вычислительной математике*. – М.: Наука, 1976.
- Оганесян Л.А., Руховец Л.А. *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений*. Ер.: АН Арм.ССР, 1979.
- Иванов А.П., Олемской И.В., Олемской Ю.В. *Численные методы. Часть 1*. – Изд. СПбГУ, 2010.
- Е. Алексеев, Чеснокова О.В. *Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9*. – ИТ Пресс, 2006.
- Измаилов А.Ф., Солодов М.В. *Численные методы оптимизации*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- Загускин В.Л. *Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений*. – М.: ГИФМЛ 1960.
- Трауб Дж. *Итерационные методы решения уравнений*. – М.: Мир, 1985.

0.2. Анализ задач и вычислений

0.2.1. Анализ алгоритма

1) <i>Временная сложность</i> (# оп)	2) <i>Пространственная сложность</i> (объём памяти)	3) <i>Точность вычислений</i> (δ, ε)
$O(n^\alpha)$ – полиномиальная $O(e^n)$ – экспоненциальная	«оперативная» «внешняя»	прямой обратный анализ ошибок

критерии входят в противоречие

Параллельные и распределённые данные и вычисления

0.2.2. Прямой и обратный анализ ошибок

$B = \varphi(A)$, A – входные данные, φ – точный алгоритм, B – выходные данные

Прямой анализ	Обратный анализ
$B_t = \varphi_t(A)$, φ_t – приближенный алгоритм, B_t – приближенные выходные данные $H = B_t - B$, $\ H\ \leq \varepsilon$, $\frac{\ H\ }{\ B\ } \leq \delta$	$B_t = \varphi(A_t)$, A_t – возмущённые входные данные $E = A_t - A$, $\ E\ \leq \varepsilon$, $\frac{\ E\ }{\ A\ } \leq \delta$

сложно (невозможно) выполнить

сопоставимость с входными ошибками

0.2.3. Обусловленность задачи и вычислений

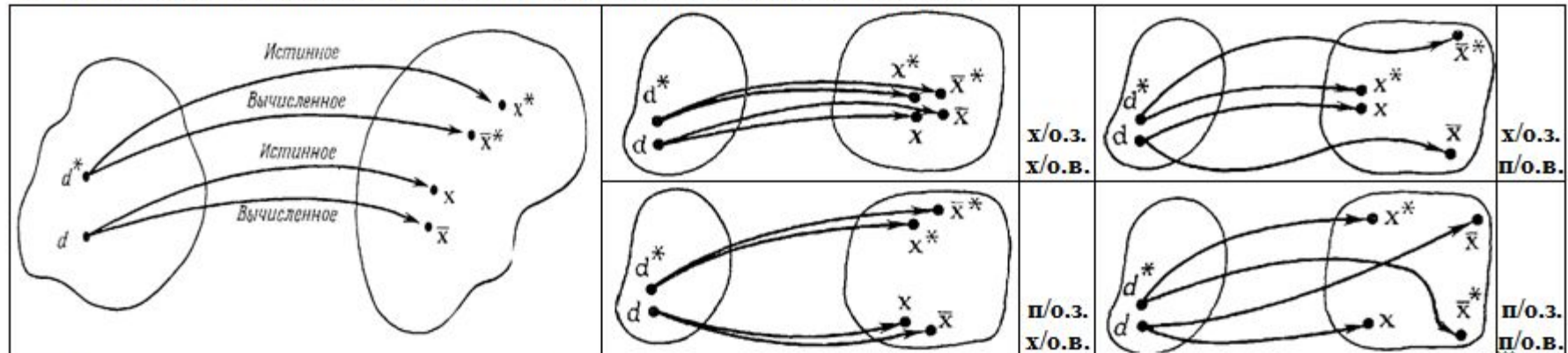
1) Виды ошибок:

неустраняемые (входные, погрешность математической модели, и т.п.)	ошибки метода	ошибки вычислений
--	---------------	-------------------

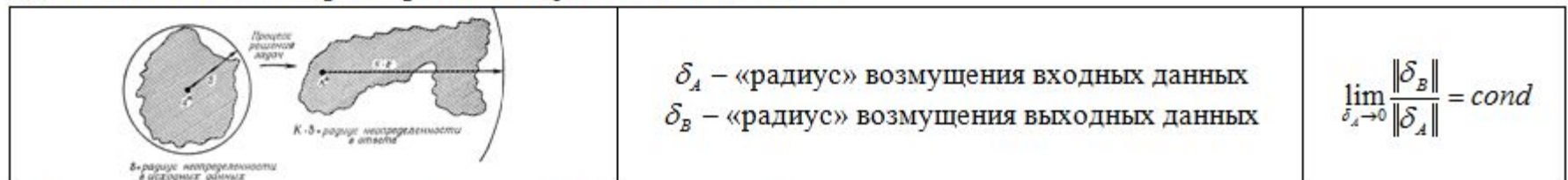
2) Оценка близости величин

	абсолютная	относительная	«хордовая» метрика
скалярные величины / общий случай	$\Delta(x) = x - y $ / $\Delta(\mathbf{x}) = \ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ $	$\delta(x) = \frac{ x - y }{ x }$ / $\delta(\mathbf{x}) = \frac{\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ }{\ \mathbf{x}\ }$	$\rho(x, y) = \frac{ x - y }{\sqrt{1 + x ^2} \sqrt{1 + y ^2}} = \rho(x^{-1}, y^{-1})$

3) Геометрическая иллюстрация обусловленности задачи и вычислений



4) Количественная характеристика обусловленности задачи



Пример. Вычисление значения функции $f(x)$ в точке x_0 . δ – «радиус» возмущения аргумента

абсолютное: $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow [f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)] \approx [f_0 - \delta f'_0, f_0 + \delta f'_0] \Rightarrow \text{cond}_{\text{абс}} = |f'_0|$

относительное: $[x_0(1 - \delta), x_0(1 + \delta)] \Rightarrow [f(x_0 - x_0\delta), f(x_0 + x_0\delta)] \approx [f_0(1 - x_0\delta \frac{f'_0}{f_0}), f_0(1 + x_0\delta \frac{f'_0}{f_0})] \Rightarrow \text{cond}_{\text{отн}} = |f'_0| \frac{|x_0|}{|f_0|}$

0.3. Математические особенности машинной арифметики

0.3.1. Позиционная система счисления

$p > 1$ – основание системы счисления

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ – базисные числа ($\alpha_k = k$ – естественный выбор)

$$|x| = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 + b_{-1} p^{-1} + b_{-2} p^{-2} + \dots \Rightarrow x = \pm b_n b_{n-1} \dots b_0, b_{-1} b_{-2} \dots$$

0.3.2. Округление чисел

$$x = b_n b_{n-1} \dots b_0, b_{-1} b_{-2} \dots$$

1) $x_s = b_n b_{n-1} \dots b_s$	простейший способ	$ x_s - x \leq p^s$, if $\alpha_k = k$	$\text{sign}(x_s - x) = -\text{sign}x$
----------------------------------	-------------------	--	--

2) $x_s^* = \begin{cases} x_s & \text{if } x_s - x < \frac{1}{2} p^s \\ x_s + p^s & \text{if } x_s - x > \frac{1}{2} p^s \\ x_s \vee x_s + p^s & \text{if } x_s - x = \frac{1}{2} p^s \end{cases}$	$ x_s - x \leq \frac{1}{2} p^s$, if $\alpha_k = k$
--	--

3) $x_s = b_n b_{n-1} \dots b_s$	p – нечетное	$ x_s - x \leq \frac{1}{2} p^s$, if $\alpha_k = \frac{2k+1-p}{2}$	$p=3, \alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$
----------------------------------	----------------	---	--

0.3.3. Фиксированная и плавающая запятая

1) *fi* Фиксированная запятая (точка)

$$\pm \overbrace{\text{целая часть}}^r, \overbrace{\text{дробная часть}}^t \quad x = a, b$$

$$-p^r < x < p^r \quad \text{– область представления}$$

$$|x - x_{z,r}| < p^{-t} \quad \text{– абсолютная ошибка представления числа}$$

2) *fl* Плавающая запятая (точка)

$$\pm \overbrace{\text{мантисса}}^t \pm \overbrace{\text{порядок}}^r \quad x = a \cdot p^b$$

$$-p^r \leq x \leq p^r \quad \text{– область представления}$$

$$\frac{|x - x_{z,r}|}{|x|} < p^{-t} \quad \text{– относительная ошибка представления числа}$$

0.3.4. Особенности машинного представления чисел

1) *fi* Фиксированная запятая (точка)

$fl(x) = x + v$	– округление числа	$ v \leq \frac{1}{2} p^{-t}$	– лучшая оценка	$\omega \approx p^{-t}$	– машинный нуль
-----------------	--------------------	-------------------------------	-----------------	-------------------------	-----------------

2) *fl* Плавающая запятая (точка)

$fl(x) = x(1 + \varepsilon)$	– округление числа	$ \varepsilon \leq \frac{1}{2} p^{-t}$	if $fl(x) \neq 0, x \neq 0$ else $\varepsilon = -1$ (!!!!)	$\omega \approx p^{-(p^t)}$	– машинный нуль
------------------------------	--------------------	---	--	-----------------------------	-----------------

0.3.5. Арифметические операции

1) *fi* Фиксированная запятая (точка)

$fi(x \pm y) = x \pm y$	if $ x \pm y \leq p^r$
$fi(x \times / y) = (x \times / y) + v$	

2) *fl* Плавающая запятая (точка)

$fl(x_x^+ \mp y) = (x_x^+ \mp y)(1 + \varepsilon)$	$ \varepsilon \leq \frac{1}{2} p^{-t}$ if $fl(x_x^+ \mp y) \neq 0, (x_x^+ \mp y) \neq 0$	else $fl(x_x^+ \mp y) = 0, (x_x^+ \mp y) \neq 0 \varepsilon = -1$ (!!!!)
--	---	--

3) Вычисления с удвоенной точностью

$fi_2 \left(\frac{\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i}{\beta} \right) = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i}{\beta} + v, v \leq \frac{1}{2} p^{-t}$	$fl_2 \left(\frac{\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i}{\beta} \right) = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i}{\beta} (1 + \varepsilon), \varepsilon \leq \frac{1}{2} p^{-t}$ if ... else $\varepsilon = -1$...
--	---

0.3.6. Порядок выполнения операций

$$1) \quad z = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \alpha_i - \text{одного знака}$$

$$f(z) = (\dots((\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \varepsilon_1) + \alpha_3)(1 + \varepsilon_2) + \dots + \alpha_n)(1 + \varepsilon_{n-1}) = (\alpha_1 + \alpha_2) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \varepsilon_i) + \alpha_3 \prod_{i=2}^{n-1} (1 + \varepsilon_i) + \dots + \alpha_n (1 + \varepsilon_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 + E_i)$$

$$f(z) = z + \Delta, \Delta = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i,$$

$$|E_1| \leq \frac{n-1}{2} p^{-t+1}, |E_i| \leq \frac{n+1-i}{2} p^{-t+1}, i = 2, \dots, n$$

$\min \Delta \Rightarrow$ при суммировании в порядке возрастания $|\alpha_i|$

при суммировании по полному двоичному дереву: $|E_i| \leq \frac{1 + \log_2 n}{2} p^{-t+1}$

$$2) \quad z = \prod_{i=1}^n \alpha_i, |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_n|$$

$$\alpha_1 \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_m < 1 \Rightarrow (\alpha_1 \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_m) \alpha_2 \alpha_{m-1} \dots \alpha_l < 1 \Rightarrow \dots$$

$$3) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \max\{|x|, |y|\} \Rightarrow z = \alpha \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2}$$

$u = f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\left(\frac{y}{x}\right)(1 + \varepsilon_1)\right)^2 (1 + \varepsilon_2)$ $v = f(1 + u) = (1 + u)(1 + \varepsilon_3)$ $w = f(\sqrt{v}) = \sqrt{v}(1 + \varepsilon_4)$ $t = f(\alpha w) = \alpha w(1 + \varepsilon_5)$	$f(z) = (1 + \varepsilon_5)(1 + \varepsilon_4) \sqrt{[x^2 + y^2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)](1 + \varepsilon_3)} =$ $= \sqrt{x^2(1 + E_1) + y^2(1 + E_2)},$ $ E_1 \leq \frac{3}{2} p^{-t+1}, E_2 \leq \frac{5}{2} p^{-t+1}$
--	--

0.4. Литература к введению

Воеводин В.В. *Вычислительные основы линейной алгебры*. – М.: Наука, 1977.

Райс Дж. *Матричные вычисления и математическое обеспечение*. – М.: Мир, 1984.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. *Машинные методы математических вычислений*. – М.: Мир, 1980.

ЧАСТЬ 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Глава 1. Решение СЛАУ, обращение матриц и вычисление определителей

- Решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax = f$, $A - m \times n$, $f - m$, $x - n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = f_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix},$$

- Решение матричного уравнения $AX = F$, $A - n \times n$, $F - n \times l$, $X - n \times l$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1l} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nl} \end{bmatrix}$$

частный случай:

$$AX = I \quad X = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Вычисление определителя $|A| \equiv \det A$

Обозначения: $A_{i*} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$ – строка i матрицы A , $e_i = [0 \ \dots \ \underset{i}{1} \ \dots \ 0]^T$ – столбец i матрицы I
 $A_{*j} = [a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{nj}]^T$ – столбец j

1.1. Прямые методы решения СЛАУ, обращения матриц и вычисления определителей

$$Ax = f, |A| \neq 0$$

1.1.1. Метод Гаусса

$$(A \ | \ f) \Rightarrow (R \ | \ g) \Rightarrow (I \ | \ x)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{прямой ход}} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{обратный ход}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

а) Схема единственного деления

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Прямой ход	$R_{k^*} = a_{kk}^{(k-1)^{-1}} A_{k^*}^{(k-1)}, g_k = a_{kk}^{(k-1)^{-1}} f_k^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n$ $A_{i^*}^{(k)} = A_{i^*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} R_{k^*}, f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} g_k, i = k+1, \dots, n$	
Обратный ход		$x_n = g_n, x_k = g_k - \sum_{j=k+1}^n r_{kj} x_j, k = n-1, \dots, 1$

б) Полный выбор ведущего элемента

$$|a_{pq}^{(k-1)}| = \max_{i,j \geq k} |a_{ij}^{(k-1)}| \Rightarrow \text{перестановка} \begin{cases} \text{строк} & p \leftrightarrow k \\ \text{столбцов} & q \leftrightarrow k \end{cases}$$

в) Частичный выбор ведущего элемента

$$|a_{pk}^{(k-1)}| = \max_{i \geq k} |a_{ik}^{(k-1)}| \Rightarrow \text{перестановка строк } p \leftrightarrow k$$

г) Решение матричного уравнения

$$(A \ | \ F) \Rightarrow (R \ | \ G) \Rightarrow (I \ | \ X)$$

Прямой ход	$R_{k^*} = a_{kk}^{(k-1)^{-1}} A_{k^*}^{(k-1)}, G_{k^*} = a_{kk}^{(k-1)^{-1}} F_{k^*}^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n$ $A_{i^*}^{(k)} = A_{i^*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} R_{k^*}, F_{i^*}^{(k)} = F_{i^*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} G_{k^*}, i = k+1, \dots, n$	
Обратный ход		$X_{j^*} = G_{j^*}, X_{k^*} = G_{k^*} - \sum_{j=k+1}^n r_{kj} X_{j^*}, k = n-1, \dots, 1$

д) Вычисление определителя

$$|A| = \begin{cases} \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k-1)} & \text{а) без перестановок} \\ (-1)^\sigma \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k-1)} & \text{б), в) } \sigma = \# \text{перестановок} \end{cases}$$

1.1.2. Компактная схема (метод LU-, LR- разложения)

$$A = LR \Rightarrow (LR)x = f \Rightarrow \begin{cases} Lg = f \\ Rx = g \end{cases}$$

а) *Схема единственного деления* $a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, |A| \neq 0$

Прямой ход	$L_{*1} = A_{*1}, R_{1*} = l_{11}^{-1}A_{1*},$ $L_{*k} = A_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{*i}r_{ik}, R_{k*} = l_{kk}^{-1}(A_{k*} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}R_{i*}), i = k+1, \dots, n$	$g_1 = l_{11}^{-1}f_1,$ $g_k = l_{kk}^{-1}(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}g_i), k = 2, \dots, n$
Обратный ход		$x_n = g_n, x_k = g_k - \sum_{j=k+1}^n r_{kj}x_j, k = n-1, \dots, 1$

б) *Полный выбор ведущего элемента* не эффективен

в) *Частичный выбор ведущего элемента* $|a_{pk}^{(k-1)}| = \max_{i \geq k} |a_{ik}^{(k-1)}| \Rightarrow$ перестановка строк $p \Leftrightarrow k$

г) *Решение матричного уравнения* $AX = F$

Прямой ход	$L_{*1} = A_{*1}, R_{1*} = l_{11}^{-1}A_{1*},$ $L_{*k} = A_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{*i}r_{ik}, R_{k*} = l_{kk}^{-1}(A_{k*} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}R_{i*}), i = k+1, \dots, n$	$G_{1*} = l_{11}^{-1}F_{1*},$ $G_{k*} = l_{kk}^{-1}(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}G_{i*}), k = 2, \dots, n$
Обратный ход		$X_{n*} = G_{n*}, X_{k*} = G_{k*} - \sum_{j=k+1}^n r_{kj}X_{j*}, k = n-1, \dots, 1$

д) *Вычисление определителя* $|A| = \begin{cases} \prod_{k=1}^n l_{kk} & \text{а) без перестановок} \\ (-1)^\sigma \prod_{k=1}^n l_{kk} & \text{б), в) } \sigma = \# \text{ перестановок} \end{cases}$

Преимущества:

1. Возможность выполнения «векторных» операций с удвоенной точностью (fl_2) \Rightarrow повышение точности вычислений
2. Экономное решение систем с одной и той же (разложенной) матрицей и различными правыми частями

1.1.3. Метод квадратных корней (метод Холецкого)

$$A > 0 \Rightarrow A = LL^T \Rightarrow (LL^T)x = f \Rightarrow \begin{cases} Lg = f \\ L^T x = g \end{cases}$$

а) Схема единственного деления $a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0$

Прямой ход	$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, L_{*1} = l_{11}^{-1} A_{*1},$ $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^2}, L_{*k} = l_{kk}^{-1} (A_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{*i} l_{ki}), k = 2, \dots, n$	$g_1 = l_{11}^{-1} f_1,$ $g_k = l_{kk}^{-1} (f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} g_i), k = 2, \dots, n$
Обратный ход		$x_n = l_{11}^{-1} g_n, x_k = l_{kk}^{-1} (g_k - \sum_{j=k+1}^n l_{kj} x_j), k = n-1, \dots, 1$

б) Выбор ведущего элемента перестановка $\begin{cases} \text{строк} & p \leftrightarrow k \\ \text{столбцов} & p \leftrightarrow k \end{cases}$ не эффективен

в) Решение матричного уравнения $AX = F$

Прямой ход	$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, L_{*1} = l_{11}^{-1} A_{*1},$ $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^2}, L_{*k} = l_{kk}^{-1} (A_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{*i} l_{ki}), k = 2, \dots, n$	$G_{*1} = l_{11}^{-1} F_{*1},$ $G_{*k} = l_{kk}^{-1} (f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} G_{*i}), k = 2, \dots, n$
Обратный ход		$X_{*n} = l_{11}^{-1} G_{*n}, X_{*k} = l_{kk}^{-1} (G_{*k} - \sum_{j=k+1}^n r_{kj} X_{*j}), k = n-1, \dots, 1$

г) Вычисление определителя $|A| = \prod_{k=1}^n l_{kk}^2$

е) Симметричная матрица $A = A^T \Rightarrow A = LDL^T \Rightarrow (LDL^T)x = f \Rightarrow \begin{cases} Lg = f \\ L^T x = D^{-1}g \end{cases}$

Прямой ход	$d_1 = a_{11}, L_{*1} = d_1^{-1} A_{*1},$ $d_{kk} = a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^2, L_{*k} = d_k^{-1} (A_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{*i} l_{ki}), k = 2, \dots, n$	$g_1 = d_1^{-1} f_1,$ $g_k = d_k^{-1} (f_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} g_i), k = 2, \dots, n$
Обратный ход		$x_n = d_1^{-1} g_n, x_k = d_k^{-1} (g_k - \sum_{j=k+1}^n l_{kj} x_j), k = n-1, \dots, 1$

1.1.4. Методы решения систем с ленточными (тредиагональными) матрицами

$$a_{ij} = 0 \text{ if } |i - j| > \beta \Rightarrow \text{ширина ленты} = \begin{cases} \beta \\ 2\beta + 1 \end{cases}, \quad (\beta = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & l_{n-1,n-1} & & \\ & & & l_{n,n-1} & l_{nn} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & & & & \\ & r_{22} & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} & \\ & & & & r_{n,n} & \end{bmatrix} \quad \beta = 1$$

а) Метод LU-, LR- разложения

$$r_{kk} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

б) Метод прогонки решения

$$\begin{cases} c_0 x_0 - b_0 x_1 = f_0 \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n \end{cases}$$

	Прямой ход	Обратный ход
правая	$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}; \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \beta_{i+1} = \frac{f_i + \beta_i a_i}{c_i - \alpha_i a_i}, i = 1, \dots, n$	$x_n = \beta_{n+1}, x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, \dots, 0$
левая	$\xi_n = \frac{a_n}{c_n}, \eta_n = \frac{f_n}{c_n}; \xi_i = \frac{a_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i}, \eta_i = \frac{f_i + \eta_{i+1} b_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i}, i = n-1, \dots, 0$	$x_0 = \eta_0, x_{i+1} = \xi_{i+1} x_i + \eta_{i+1}, i = 0, \dots, n-1$
встречная к компоненте с номером m	$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}; \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \beta_{i+1} = \frac{f_i + \beta_i a_i}{c_i - \alpha_i a_i}, i = 1, \dots, m-1$ $\xi_n = \frac{a_n}{c_n}, \eta_n = \frac{f_n}{c_n}; \xi_i = \frac{a_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i}, \eta_i = \frac{f_i + \eta_{i+1} b_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i}, i = n-1, \dots, m$	$x_m = \frac{\eta_m + \xi_m \beta_m}{1 - \xi_m \alpha_m}$ $x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = m-1, \dots, 0;$ $x_{i+1} = \xi_{i+1} x_i + \eta_{i+1}, i = m, \dots, n-1.$
циклическая		
с окаймлением		

1.1.5. Метод Жордана

$$(A \mid f) \Rightarrow (I \mid x)$$

а) Схема единственного деления

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, |A| \neq 0$$

$A_{k*}^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)-1} A_{k*}^{(k-1)}, f_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)-1} f_k^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n$ $A_{i*}^{(k)} = A_{i*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} A_{k*}^{(k)}, f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} g_k, i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$	$x_k = f_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots, n$
--	---------------------------------------

б) Полный выбор ведущего элемента

не эффективен

в) Частичный выбор ведущего элемента

$$|a_{pk}^{(k-1)}| = \max_{i \geq k} |a_{ik}^{(k-1)}| \Rightarrow \text{перестановка строк } p \Leftrightarrow k$$

г) Решение матричного уравнения

$$(A \mid F) \Rightarrow (I \mid X)$$

$A_{k*}^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)-1} A_{k*}^{(k-1)}, F_{k*}^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)-1} F_{k*}^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n$ $A_{i*}^{(k)} = A_{i*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} A_{k*}^{(k)}, F_{i*}^{(k)} = F_{i*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} G_{k*}, i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$	$X_{k*} = F_{k*}^{(n)}, k = 1, 2, \dots, n$
---	---

д) Вычисление определителя

$$|A| = \begin{cases} \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k-1)} & \text{а) без перестановок} \\ (-1)^\sigma \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k-1)} & \text{б), в) } \sigma = \# \text{перестановок} \end{cases}$$

е) Схема оптимального исключения

$\alpha_k = a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} a_{jk}^{(k-1)}, A_{k*}^{(k)} = \alpha_k^{-1} A_{k*}^{(k-1)}, f_k^{(k)} = \alpha_k^{-1} f_k^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n$ $A_{i*}^{(k)} = A_{i*}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} A_{k*}^{(k)}, f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} g_k, i = 1, \dots, k-1$	$x_k = f_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots, n$
---	---------------------------------------

ж) Вычисление обратной матрицы

$$C_0 = A, C_1, \dots, C_n = A^{-1}$$

$$c_{ij}^{(k)} = \begin{cases} c_{kk}^{(k)-1} & i = k, j = k \\ c_{ik}^{(k-1)} c_{kk}^{(k)-1} & i \neq k, j = k \\ -c_{kk}^{(k)-1} c_{ij}^{(k-1)} & i = k, j \neq k \\ c_{ij}^{(k-1)} - c_{ik}^{(k-1)} c_{kk}^{(k)-1} c_{kj}^{(k-1)} & i \neq k, j \neq k \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

1.1.6. Решение систем с блочными матрицами

$$Ax = f \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad A_{ij} - n_i \times n_j, \quad f_i - n_i, \quad x_i - n_i$$

Обозначения:

$$A_{i*} = [A_{i1} \quad A_{i2} \quad \dots \quad A_{in}] - \text{блочная строка } i \text{ матрицы } A$$

$$A_{*j} = [A_{1j} \quad A_{2j} \quad \dots \quad A_{nj}]^T - \text{блочный столбец } j$$

а) Аналог метода Гаусса

$$(A \mid f) \Rightarrow (R \mid g) \Rightarrow (I \mid x)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & f_1 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & f_n \end{array} \right) \xrightarrow{\text{прямой ход}} \left(\begin{array}{cccc|c} I & R_{12} & \dots & R_{1n} & g_1 \\ 0 & I & \dots & R_{2n} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & g_n \end{array} \right) \xrightarrow{\text{обратный ход}} \left(\begin{array}{cccc|c} I & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & I & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & x_n \end{array} \right)$$

Прямой ход	$R_{k*} = A_{kk}^{(k-1)-1} A_{k*}^{(k-1)}, \quad g_k = A_{kk}^{(k-1)-1} f_k^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$ $A_{i*}^{(k)} = A_{i*}^{(k-1)} - A_{ik}^{(k-1)} R_{k*}, \quad f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - A_{ik}^{(k-1)} g_k, \quad i = k+1, \dots, n$	
Обратный ход		$x_n = g_n, \quad x_k = g_k - \sum_{j=k+1}^n R_{kj} x_j, \quad k = n-1, \dots, 1$

б) Аналог LU-(LR-) разложения

$$A = LR \Rightarrow (LR)x = f \Rightarrow \begin{cases} Lg = f \\ Rx = g \end{cases}$$

Прямой ход	$L_{*1} = A_{*1}, \quad R_{1*} = L_{11}^{-1} A_{1*},$ $L_{*k} = A_{*k} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{*i} R_{ik}, \quad R_{k*} = L_{kk}^{-1} (A_{k*} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{ki} R_{i*}), \quad i = k+1, \dots, n$	$g_1 = L_{11}^{-1} f_1,$ $g_k = L_{kk}^{-1} (f_k - \sum_{i=1}^{k-1} L_{ki} g_i), \quad k = 2, \dots, n$
Обратный ход		$x_n = g_n, \quad x_k = g_k - \sum_{j=k+1}^n R_{kj} x_j, \quad k = n-1, \dots, 1$

1.1.7. Метод вращения

$$QA = R, Qf = g \Rightarrow Q|Ax = f \Rightarrow Rx = g, Q = \prod_{1 \leq i < j \leq n} T_{ij}$$

а) *Свойства матрицы вращения*

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c & \dots & s & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & -s & \dots & c & \dots \\ & & & & & \ddots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ i \\ j \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 1. T_{ij}^T &= T_{ij}^{-1} \\ 2. \det T_{ij} &= 1 \\ 3. B &= T_{ij} A & 4. C &= AT_{ij}^T \\ B_{k*} &= A_{k*} & C_{*k} &= A_{*k} & k \neq i, j \\ B_{i*} &= cA_{i*} + sA_{j*} & C_{*i} &= cA_{*i} + sA_{*j} \\ B_{j*} &= -sA_{i*} + cA_{j*} & C_{*j} &= -sA_{*i} + cA_{*j} \end{aligned}$$

б) *Решение системы уравнений:* аннулирование коэффициента в позиции (j, i)

Прямой ход $1 \leq i < j \leq n$	$c = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}, s = \frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}, B = T_{ij}A$ $B_{i*} = cA_{i*} + sA_{j*}, B_{j*} = -sA_{i*} + cA_{j*}, B_{k*} = A_{k*} \quad k \neq i, j$	$h = T_{ij}f$ $h_i = cf_i + sf_j, h_j = -sf_i + cf_j, h_k = f_k \quad k \neq i, j$
Обратный ход	$Rx = g$	$x_n = r_{nn}^{-1}g_n, x_k = r_{kk}^{-1}(g_k - \sum_{k+1}^n r_{ki}x_j), k = n-1, \dots, 1$

в) *Решение матричного уравнения* $AX = F$

Прямой ход $1 \leq i < j \leq n$	$c = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}, s = \frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}, B = T_{ij}A$ $B_{i*} = cA_{i*} + sA_{j*}, B_{j*} = -sA_{i*} + cA_{j*}, B_{k*} = A_{k*} \quad k \neq i, j$	$H = T_{ij}F$ $H_{i*} = cF_{i*} + sF_{j*}, H_{j*} = -sF_{i*} + cF_{j*}, H_{k*} = F_{k*} \quad k \neq i, j$
Обратный ход	$RX = G$	$X_{n*} = r_{nn}^{-1}G_{n*}, X_{k*} = r_{kk}^{-1}(G_{k*} - \sum_{k+1}^n r_{ki}X_{j*}), k = n-1, \dots, 1$

г) *Вычисление определителя* $|A| = \prod_{k=1}^n r_{kk}$

Преимущества:

1. Нет необходимости выбора ведущего элемента.
2. Нет деления на «нуль» или «малое» число \Rightarrow повышение точности вычислений.

1.1.8. Метод отражения $QA = R, Qf = g \Rightarrow Q|Ax = f \Rightarrow Rx = g, Q = \prod_{i=1}^{n-1} U_i$

а) Свойства матрицы вращения $U_i = I - 2ww^T, \|w\|_2 = 1$

1. $U = U^T = U^{-1}$ 3. $Uw = -w$ 5. $Uy = y - 2(w, y)w$ 7. $Us = \alpha e_1 \Leftrightarrow w = \rho^{-1}(s - \alpha e_1)$
 2. $\det U = -1$ 4. $Uz = -z, z \perp w$ 6. $UA = A - 2ww^T A$ $\rho = \|s - \alpha e_1\|_2, \alpha = -\text{sign}(s, e_1)\|s\|_2$

б) Решение системы уравнений: один (первый) шаг прямого хода преобразования

Прямой ход $1 \leq i \leq n-1$	$s = A_{*1}, \alpha = -a_{11}\ A_{*1}\ _2, \rho = \ s - \alpha e_1\ _2, w = \rho^{-1}(A_{*1} - \alpha e_1)$ $B = U_1 A: B_{*j} = A_{*j} - 2(w, A_{*j})w, j = 1, 2, \dots, n$	$h = U_1 f$ $h = f - 2(w, f)w$
Обратный ход	$Rx = g$	$x_n = r_{nn}^{-1} g_n, x_k = r_{kk}^{-1} (g_k - \sum_{j=k+1}^n r_{kj} x_j), k = n-1, \dots, 1$

в) Решение матричного уравнения $AX = F$

Прямой ход	$s = A_{*1}, \alpha = -a_{11}\ A_{*1}\ _2, \rho = \ s - \alpha e_1\ _2, w = \rho^{-1}(A_{*1} - \alpha e_1)$ $B = U_1 A: B_{*j} = A_{*j} - 2(w, A_{*j})w, j = 1, 2, \dots, n$	$H = U_1 F,$ $H_{*j} = F_{*j} - 2(w, F_{*j})w, j = 1, 2, \dots, l$
Обратный ход	$RX = G$	$X_{n^*} = r_{nn}^{-1} G_{n^*}, X_k = r_{kk}^{-1} (G_{k^*} - \sum_{j=k+1}^n r_{kj} X_{j^*}), k = n-1, \dots, 1$

г) Вычисление определителя $|A| = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n r_{kk}$

Преимущества:

1. Нет необходимости выбора ведущего элемента.
2. Нет деления на «нуль» или «малое» число \Rightarrow повышение точности вычислений.
3. Возможность выполнения «векторных» операций с удвоенной точностью (fl_2) \Rightarrow повышение точности вычислений

1.1.9. Методы ортогонализации

а) Ортогонализация столбцов матрицы A : $A = QR \Rightarrow (QR)x = f \Rightarrow \begin{cases} Qg = f \\ Rx = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = Q^T f \\ Rx = g \end{cases}$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта	Обратный ход
$\beta_1 = (A_{\cdot 1}, A_{\cdot 1})^{1/2}, Q_{\cdot 1} = \beta_1^{-1} A_{\cdot 1}$ $B_{\cdot k} = A_{\cdot k} - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{ik} Q_{\cdot i}, \gamma_{ik} = (A_{\cdot k}, Q_{\cdot i})$ $\beta_k = (B_{\cdot k}, B_{\cdot k})^{1/2}, Q_{\cdot k} = \beta_k^{-1} B_{\cdot k}, k = 2, \dots, n$	$g = Q^T f$ $x_n = r_{nn}^{-1} g_n, x_k = r_{kk}^{-1} (g_k - \sum_{j=k+1}^n r_{kj} x_j), k = n-1, \dots, 1$

Недостаток: Вычисленная матрица Q – не вполне ортогональная.

б) Ортогонализация строк расширенной матрицы $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & -f \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = LQ$

Процесс ортогонализации строк \tilde{A}	Обратный ход	
$\beta_1 = (\tilde{A}_{1\cdot}, \tilde{A}_{1\cdot})^{1/2}, Q_{\cdot 1}^* = \beta_1^{-1} \tilde{A}_{1\cdot}$ $C_{k\cdot} = \tilde{A}_{k\cdot} - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{ki} Q_{i\cdot}^*, \gamma_{ki} = (\tilde{A}_{k\cdot}, Q_{i\cdot}^*)$ $\beta_k = (C_{k\cdot}, C_{k\cdot})^{1/2}, Q_{k\cdot}^* = \beta_k^{-1} C_{k\cdot}, k = 2, \dots, n+1$	$x_k = \frac{q_{n+1,k}}{q_{n+1,n+1}}$ $k = 1, 2, \dots, n$	последняя строка ортогональна к первым строкам матрицы \tilde{A}

1.1.10. Сравнительная характеристика разложений матрицы



Вид сомножителей способ получения	Режим вычислений	Число операций	Точность	Дополнительная память
Треугольные				
Гаусса	fl	$\frac{2}{3}n^3$	αn	0
LU - разложение	fl_2	$\frac{2}{3}n^3$	β	0
Холецкого	fl_2	$\frac{1}{3}n^3$	1.0	0
Треугольная ортогональная				
вращение	fl	$2n^3$	2.9n	$\frac{1}{2}n^2$
отражение	fl_2	$\frac{4}{3}n^3$	2.9n	2n
ортогонализация	fl_2	$2n^3$	1.0	$\frac{1}{2}n^2 + 0$

1.1.11. Специальные методы обращения матриц

а) Метод окаймления

$$\mathbf{A}_1 = a_{11}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{A} = \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1} & \mathbf{u}_k \\ \mathbf{v}_k^T & a_{kk} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k-1} & \mathbf{r}_k \\ \mathbf{q}_k^T & \alpha_k^{-1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{A}_k$$

$\alpha_k = a_{kk} - \mathbf{v}_k^T \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{u}_k$ $\mathbf{q}_k^T = -\alpha_k^{-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{A}_{k-1}^{-1}$	$\mathbf{r}_k = -\alpha_k^{-1} \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{u}_k$ $\mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{A}_{k-1}^{-1} - \alpha_k^{-1} \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{A}_{k-1}^{-1}$
--	---

б) Метод пополнения

$\mathbf{B}, \mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T \Leftrightarrow \begin{matrix} \gamma = 1 + \mathbf{v}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u} \\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u} \gamma^{-1} \mathbf{v}^T \mathbf{B}^{-1} \end{matrix}$$

Обращение матрицы \mathbf{A}

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{A} = \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{e}_k (\mathbf{A}_{k*} - \mathbf{e}_k^T)$$

↓

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{A}_0^{-1} = \mathbf{I}, \mathbf{C}_k = \mathbf{A}_k^{-1}, k = 2, \dots, n, \mathbf{C}_n = \mathbf{A}^{-1}$$

⊕

$\alpha_{kj} = \mathbf{A}_{k*} \mathbf{C}_{*j}^{(k-1)} - c_{kj}^{(k-1)}, \mathbf{C}_{*j}^{(k)} = \mathbf{C}_{*j}^{(k-1)} - \frac{\alpha_{kj}}{1 + \alpha_{kk}} \mathbf{C}_{*k}^{(k-1)},$ $j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n$

1.1.12. Нормы и пределы векторов и матриц

- а) Нормы**
- 1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, ($\|\mathbf{x}\| > 0$, if $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}\| = 0$, if $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) 1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, ($\|\mathbf{A}\| > 0$, if $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{A}\| = 0$, if $\mathbf{A} = \mathbf{0}$)
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ 2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ 2) $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$
- 3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ неравенство треугольника 3) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} (\mathbb{C}^{m \times n})$ 4) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$

согласованная норма матрицы $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$ подчиненная норма матрицы $\|\mathbf{A}\| \leq \max \frac{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$

p -норма вектора	$\ \mathbf{x}\ _p = \left(\sum_{i=1}^n x_i ^p \right)^{\frac{1}{p}}$	$\ \mathbf{x}\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $	$\ \mathbf{x}\ _2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i ^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	$\ \mathbf{x}\ _\infty = \max_i x_i $
подчиненные нормы матрицы	$\ \mathbf{A}\ _1 = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} $	$\ \mathbf{A}\ _2 = \sigma_1 = \max_i \sigma_i$	$\ \mathbf{A}\ _\infty = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} $	

свойство $|\lambda(\mathbf{A})| \leq \|\mathbf{A}\|$ $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{Ax}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow |\lambda|\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$

- б) Пределы**
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i, i = 1, \dots, n$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$
- $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$

в) Свойства пределов

- $\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}_k \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{B}_k \rightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{Ax}$
- $\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}, |\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \exists N k > N \mathbf{A}_k^{-1} \rightarrow \mathbf{A}^{-1}$
- $\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}, |\mathbf{A}| \neq 0, \mathbf{f}_k \rightarrow \mathbf{f} \Rightarrow \exists N k > N \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{f}_k \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}$
- $\mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{O} \Leftrightarrow |\lambda(\mathbf{A})| < 1$ \Leftrightarrow
- $\mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{O} \Leftrightarrow \|\mathbf{A}\| < 1$
- $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^k \rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{O}$
- $\|\mathbf{A}\| < 1 \Rightarrow \|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \dots + \mathbf{A}^k)\| \leq \frac{\|\mathbf{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbf{A}\|}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{A}^k = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{J}^k \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J} = \text{block diag} \{ \mathbf{J}_i(\lambda_i) \} \Rightarrow \mathbf{J}^k = \text{block diag} \{ \mathbf{J}_i^k(\lambda_i) \}$$

$$\mathbf{J}(\lambda) - l \times l$$

$$\mathbf{J}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}^k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^k & & & & \\ \binom{n}{1} \lambda^{k-1} & \lambda^k & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \binom{n}{l} \lambda^{k-l} & \dots & \binom{n}{1} \lambda^{k-1} & \lambda^k \end{bmatrix}$$

1.1.13. Обусловленность задач решения СЛАУ и обращения матриц

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}, \mathbf{A}^{-1} \leftarrow |\mathbf{A}| \neq 0: \quad \delta = |\mathbf{A}| \text{ – число обусловленности – ?}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 10^6 & \\ & 10^{-6} \end{vmatrix} = 1 \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad \alpha \mathbf{Ax} = \alpha \mathbf{f}$$

а) Характеристики в терминах элементов $\mathbf{A}^{-1} = \{\alpha_{ki}\}$

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mid \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mathbf{AA}^{-1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{ij} \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial a_{ij}} = -\alpha_{ki} \alpha_{jl}}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mid \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{ij} \mathbf{x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} = -\alpha_{ki} x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_i} \mid \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial f_i} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial}{\partial f_i} \mathbf{f} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial f_i} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_i \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x_k}{\partial f_i} = \alpha_{ki}}$$

б) Характеристики в терминах норм $\|\mathbf{A}\|, \|\mathbf{A}^{-1}\|$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f} + \Delta \mathbf{f} \Rightarrow \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{f} \Rightarrow \|\Delta \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{f}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{f}\| \Rightarrow \boxed{\delta_{\text{абс}} = \|\mathbf{A}^{-1}\|}$$

$$\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{f}\|} \Rightarrow \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} \Rightarrow \boxed{\delta_{\text{отн}} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|}$$

$$(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f} \Rightarrow (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \Delta \mathbf{x} = -\Delta \mathbf{Ax} \Rightarrow \Delta \mathbf{x} = -(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Ax} \Rightarrow \|\Delta \mathbf{x}\| \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{A})^{-1}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{A})^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{A}\|} \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \Rightarrow \boxed{\delta_{\text{отн}} = \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{A}\|}}$$

в) Числа обусловленности

$$\boxed{\delta_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_m}, \quad \sigma_1 = \|\mathbf{A}\|_2}$$

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} N(\mathbf{A}) N(\mathbf{A}^{-1}), \quad N(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

$$\boxed{\delta = n M(\mathbf{A}) M(\mathbf{A}^{-1}), \quad M(\mathbf{A}) = \max_{i,j} |a_{ij}|}$$

1.1.14. О решении плохообусловленных систем

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{AU} = \mathbf{\Sigma} \Rightarrow \mathbf{AU} = \mathbf{\Sigma V} \Rightarrow \mathbf{Au}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i, (\mathbf{u}_i = \mathbf{U}_{*i}, \mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{*i}), i = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \alpha_i = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i), i = 1, \dots, n; \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{u}_i$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{Au}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \beta_i \sigma_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \boxed{\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sigma_i} = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_i)}{\sigma_i}, i = 1, \dots, n}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \gg \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n$$

⇓

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^r \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_i)}{\sigma_i} \mathbf{u}_i && \text{— устойчивая} \\ \mathbf{x}_2 &= \sum_{i=r+1}^n \beta_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=r+1}^n \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_i)}{\sigma_i} \mathbf{u}_i && \text{— неустойчивая} \end{aligned} \quad \text{часть решения}$$

$$\text{if } \alpha_i = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i) \approx 0, i = r + 1, \dots, n \Rightarrow \text{well conditioned}$$

- Вычисление устойчивой части решения (проекция на $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$):

$$\boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{f}}$$

- Регуляризация системы

$$\boxed{(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \rho \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{f}}$$

1.1.15. Уточнение решений

а) Уточнение приближения \mathbf{x}_0 к решению системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0) = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}_0$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k, \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k$$

б) Уточнение приближения \mathbf{C}_0 к обратной матрице \mathbf{A}^{-1}

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{AC}_0 \quad \|\mathbf{R}_0\| \leq \rho < 1$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{I} - \mathbf{AC}_k, \mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k(\mathbf{I} + \mathbf{R}_k)$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{I} - \mathbf{AC}_k = \mathbf{I} - \mathbf{AC}_{k-1}(\mathbf{I} + \mathbf{R}_{k-1}) = \dots = \mathbf{R}_0^{2^k}$$

$$\|\mathbf{C}_k - \mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}_0^{2^k}\| = \|\mathbf{C}_0(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0)^{-1}\mathbf{R}_0^{2^k}\| \leq \|\mathbf{C}_0\| \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0)^{-1}\| \|\mathbf{R}_0\|^{2^k} \leq \|\mathbf{C}_0\| \frac{\rho^{2^k}}{1 - \rho}$$

1.2. Итерационные методы решения СЛАУ

$$Ax = f, |A| \neq 0, x_* - \text{точное решение}$$

Приближения

x_0 – начальное приближение

$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$ – последовательность приближений

$y_k = x_* - x_k$ – вектор ошибки

$r_k = f - Ax_k$ – вектор невязки

Сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_* \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_* - x_k\| = 0 \Leftrightarrow r_k = f - Ax_k \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|r_k\| \rightarrow 0$$

скорость сходимости – ?

Итерационная формула

$x_{k+1} = \Phi(x_k)$ – одноточечная итерационная формула

$x_* = \Phi(x_*)$

$$x_{k+1} = \begin{cases} B_k x_k + g_k & \text{нестационарная} \\ B x_k + g & \text{стационарная} \end{cases} \text{линейная итерационная формула, например, } x_{k+1} = \begin{cases} x_k + H_k (f - Ax_k) \\ x_k + H(f - Ax_k) \end{cases}$$

Критерии прекращения итерационного процесса

$$k \leq K_{\max}$$

по числу итераций

$$\|x_* - x_k\| < \delta$$

по близости к решению ($\|x_{k+1} - x_k\| < \delta$ - ?)

$$\|r_k\| < \varepsilon$$

по малости невязки

1.2.1. Метод простых итераций (последовательных приближений) $x = x + (f - Ax) = (I - A)x + f = Bx + f$, $B = I - A$

а) Итерационная формула

$$x_{k+1} = Bx_k + f, B = I - A$$

б) Свойства

1. $x_{k+1} = Bx_k + f = B(Bx_{k-1} + f) + f = B^2x_{0k-1} + Bf + f = \dots = B^{k+1}x_0 + (I + B + B^2 + \dots + B^k)x_0$
2. $y_{k+1} = By_k = B^2y_{k-1} = \dots = B^{k+1}y_0$
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_* \Rightarrow x_* = x_*$ — если сходится, то сходится к решению
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_* \Leftrightarrow |\lambda(I - A)| < 1$ — необходимое и достаточное условие сходимости
5. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_* \Leftarrow \|A\| < 1$ — достаточное условие сходимости
6. $\|y_{k+1}\| \leq \|B\|^{k+1} \|y_0\|$ — оценка скорости сходимости
7. $\|y_{k+1}\| = \|x_* - x_k\| \leq \|B\|^{k+1} \|x_0\| + \frac{\|B\|^{k+1}}{1 - \|B\|} \|f\|$ — оценка близости к решению

в) Достаточные условия сходимости и оценка скорости сходимости

$$\begin{aligned}
 p=1 \quad \sum_{i=1}^n |b_{ij}| \leq \nu < 1 & \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^{(k+1)}| \leq \nu \sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^{(k)}| \\
 p=\infty \quad \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1 & \Rightarrow \max_i |x_i^* - x_i^{(k+1)}| \leq \mu \max_i |x_i^* - x_i^{(k)}| \\
 p=2 \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} \leq \rho < 1 & \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^{(k+1)}|^2} \leq \rho \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^{(k)}|^2}
 \end{aligned}$$

з) Способы подготовки системы

$$x_{k+1} = (I - HA)x_k + Hf = Bx_k + g, B = I - HA, g = Hf$$

$$1. H = \alpha I, B = I - \alpha A, g = \alpha f \Leftrightarrow \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_i|, \lambda_i = \lambda_i(A) \in [m, M], \alpha = \frac{2}{m+M} \quad (A > 0, \|A\| < \rho, \alpha = \frac{2}{\rho})$$

⊕

$$2. |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \Rightarrow H = \text{diag}\{a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}\} = D^{-1} \quad \boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{f_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}, i = 1, \dots, n} \quad \text{метод Якоби}$$

$$3. A = U - V, Ux = Vx + f, x = U^{-1}Vx + U^{-1}f, B = U^{-1}V, g = U^{-1}f, |\lambda(U^{-1}V)| < 1 \Rightarrow Ux_{k+1} = Vx_k + f$$

□

1.2.2. Метод Зейделя

В методе простых итераций

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, \dots, n$$

а) Итерационная формула

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n b_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, \dots, n$$

б) Связь с методом простых итераций

$$1. \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{g}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} & & & \\ b_{21} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n-1} & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{N}\mathbf{x}_k + (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{g} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{N} \quad \tilde{\mathbf{g}} = (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{g} \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{g}} \quad \lambda(\tilde{\mathbf{B}}) \neq \lambda(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$2. \text{ускорение сходимости в методе Зейделя: } \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1 \Rightarrow \max_i |x_i^* - x_i^{(k+1)}| \leq \tilde{\mu} \max_i |x_i^* - x_i^{(k)}|, \quad \tilde{\mu} < \mu$$

в) Способ подготовки системы

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \Rightarrow \mathbf{H} = \text{diag}\{a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}\} = \mathbf{D}^{-1}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k+\frac{1}{2})}}{a_{ii}},$$

$i = 1, \dots, n$

метод Некрасова

1.2.3. Методы координатной релаксации

а) *SOR-* (ПВР-) метод (successive over relaxation / последовательных верхних релаксаций)

$$A = M - N, M = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} a_{11} & & & \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \gamma^{-1} a_{n-1,n-1} & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & \gamma^{-1} a_{nn} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} (\gamma^{-1} - 1)a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ & (\gamma^{-1} - 1)a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\gamma^{-1} - 1)a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= M^{-1}N\mathbf{x}_k + M^{-1}\mathbf{f} \\ \tilde{B} &= M^{-1}N \quad \tilde{g} = M^{-1}\mathbf{f} \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \tilde{B}\mathbf{x}_k + \tilde{g} \\ |\lambda(\tilde{B})| &< 1 \end{aligned}$$

+

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \gamma \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} = x_i^{(k)} + \gamma \frac{r_i^{(k+\frac{1}{2})}}{a_{ii}}, i = 1, \dots, n$$

$\gamma < 1$ нижней релаксации
 $\gamma = 1$ метод Некрасова
 $\gamma > 1$ верхней релаксации

б) Метод координатной релаксации $A > 0$

\mathbf{x} – текущее приближение

$\mathbf{y} = \mathbf{x}_*$ – \mathbf{x} – текущий вектор ошибки

$\mathbf{r} = \mathbf{f} - A\mathbf{x}$ – вектор невязки

$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{e}_i$ – следующее приближение

$\mathbf{y}' = \mathbf{x}_*$ – $\mathbf{x}' = \mathbf{y} - \alpha \mathbf{e}_i$ – следующий вектор ошибки

$F(\mathbf{x}) = (A\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0$ – функция ошибки: $F(\mathbf{x}_*) = 0$

$$F(\mathbf{x}') = (A\mathbf{y}', \mathbf{y}') = \dots = F(\mathbf{x}) - 2\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i) + \alpha^2(A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = F(\mathbf{x}) - 2\alpha r_i + \alpha^2 a_{ii}$$

$$\min_{\alpha} F(\mathbf{x}') \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} F(\mathbf{x}') = 0 \Rightarrow -2r_i + 2\alpha a_{ii} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{r_i}{a_{ii}} \Rightarrow$$

$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{r_i}{a_{ii}} \mathbf{e}_i$	корректировка координаты i
--	------------------------------

Выбор номера корректируемой координаты

- циклический, $i = 1, \dots, n$
- $\max_i |r_i|$
- $\max_i \left| \frac{r_i}{a_{ii}} \right|$

1.2.4. Градиентные методы $A > 0$

$F(x) = (Ax, y) \geq 0$ – функция ошибки

$$H(x) = (Ax, x) - 2(f, x) = \dots = F(x) - (f, x_*) \Rightarrow \min_x H(x) = H(x_*)$$

$$\frac{\partial H(x)}{\partial z} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(x+tz) - H(x)}{t} = \dots = 2(Ax - f, z) \Rightarrow \text{grad}H(x) = -2(Ax - f) = -2r$$

$\min_x H(x) \Rightarrow x$ – текущее приближение $r = f - Ax$ – вектор невязки $x' = x + \alpha r$ – следующее приближение

$$H(x') = \dots = H(x) - 2\alpha(r, r) + \alpha^2(Ar, r), \quad r' = f - Ax' = r - \alpha Ar, \quad \|r'\|_2^2 = (r', r') = (r, r) - 2\alpha(Ar, r) + \alpha^2(Ar, Ar)$$

а) Метод наискорейшего спуска

б) Метод минимальных невязок

$\min_{\alpha} H(x') \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} H(x') = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(r, r)}{(Ar, r)}$	$\min_{\alpha} \ r'\ _2^2 \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} (r', r') = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(Ar, r)}{(Ar, Ar)}$
$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k, \quad r_k = f - Ax_k, \quad \alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}$	$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k, \quad r_k = f - Ax_k, \quad \alpha_k = \frac{(Ar_k, r_k)}{(Ar_k, Ar_k)}$

в) $\alpha = \text{const}$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha r_k \Rightarrow x_{k+1} = (I - \alpha A)x_k + \alpha f = Bx_k + g$$

$$\min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_i|, \quad \lambda_i = \lambda_i(A) \in [m, M], \quad \alpha = \frac{2}{m+M} \quad (A > 0, \|A\| < \rho, \alpha = \frac{2}{\rho}) \text{ – метод простых итераций}$$

г) Использование полиномов Чебышёва

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ – набор коэффициентов

$$x_{k+1} = (I - \alpha_k A)x_k + \alpha_k f, \quad k = 0, 1, \dots, l-1 \Rightarrow y_l = (I - \alpha_{l-1} A)y_{l-1} = \dots = \prod_{k=0}^{l-1} (I - \alpha_k A)y_0, \quad x_l = \prod_{k=0}^{l-1} (I - \alpha_k A)x_0 + g$$

$$\varphi_l(t) = \prod_{k=0}^{l-1} (1 - \alpha_k t) \Rightarrow y_l = \varphi_l(A)y_0, \quad x_l = \varphi_l(A)x_0 + g \Rightarrow x_l = Bx_0 + g, \quad B = \varphi_l(A), \quad |\lambda(B)| = |\lambda(\varphi_l(A))| < 1$$

$P_l(t) = \prod_{k=0}^{l-1} (t - \alpha_k^{-1})$ – наименее отклоняется от нуля на $[-1, 1]$ полином Чебышёва Прода: $T_l(t) = \cos l \arccos t$ с корнями

$$\alpha_k^{-1} = t_k = \cos \frac{2k+1}{2l} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, l-1 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i(A) \in [a, b] \Rightarrow \alpha_k^{-1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k, \quad k = 0, 1, \dots, l-1$$

1.2.5. Методы сопряженных направлений

$$D = CAB > 0$$

s_1, s_2, \dots, s_n – D -ортогональный базис: $(s_i, s_j)_D = (Ds_i, s_j) = 0$

x_0 – «начальное» приближение $\Rightarrow x = x_0 + B \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$ (разложение $B^{-1}(x - x_0)$ по базису)

$$CAB \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i = C(f - Ax_0) \Rightarrow D \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i = Cr_0 \quad | \quad (\dots, s_j) \Rightarrow \alpha_j = \frac{(Cr_0, s_j)}{(Ds_j, s_j)}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$D = ?, \quad Z = [z_1 z_2 \dots z_n] \stackrel{?}{\Rightarrow} S = [s_1 s_2 \dots s_n]$$

а) Метод ортогональных векторов

$$A > 0, \quad C = B = I, \quad Z = I$$

$$s_1 = e_1, \quad s_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} s_j, \quad \gamma_{ij} = \frac{(Ae_i, s_j)}{(As_j, s_j)}, \quad j = 1, \dots, i-1$$

б) Метод A -минимальных итераций

$$A > 0, \quad C = B = I, \quad z_i = A^{i-1} q_0, \quad i = 1, \dots, n, \quad q_0 \neq 0$$



$$s_1 = q_0, \quad s_2 = As_1 - \gamma_1 s_1, \quad s_{i+1} = As_i - \gamma_i s_i - \delta_i s_{i-1}, \quad \gamma_i = \frac{(As_i, As_i)}{(As_i, s_i)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \delta_i = \frac{(As_i, s_i)}{(s_i, s_i)}, \quad j = 2, \dots, n$$

б) Метод сопряженных градиентов

$$A > 0, \quad C = B = I, \quad z_i = r_{i-1}, \quad r_i = f - Ax_i, \quad x_i = x_0 + B \sum_{j=1}^i \alpha_j s_j, \quad i = 1, \dots, n$$

$$s_1 = r_0, \quad x_i = x_{i-1} + \alpha_i s_i, \quad r_i = r_{i-1} - \alpha_i As_i, \quad s_{i+1} = s_i + \beta_i As_i, \quad \alpha_i = \frac{(r_{i-1}, r_{i-1})}{(As_i, s_i)}, \quad \beta_i = \frac{(r_i, r_i)}{(r_{i-1}, r_{i-1})}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$D = A^T A \quad \text{или} \quad D = AA^T$$

.....

1.3. Методы решения систем с прямоугольными особенными и плохообусловленными матрицами

$$Ax = f, \quad A - m \times n, \quad f - m, \quad x - n$$

$$m \neq n \text{ или } m = n, |A| = 0,$$

$$r = \text{rank}A, \quad \tilde{r} = \text{rank}\tilde{A}, \quad \tilde{A} = (A \quad f)$$

1.3.1. Классификация задач



Ранг матрицы	Название системы свойства матрицы	Название решения	Свойство решения
0) $r = m = n$	– определённая система невырожденная матрица	единственное решение	
1) $r = n < m$	– переопределённая система матрица полного столбцового ранга	обобщенное решение	$\min_x \ f - Ax\ _2$
2) $r = m < n$	– неопределённая система матрица полного строчного ранга	нормальное решение	$\min_{Ax=f} \ x\ _2$
3) $r < \min\{m, n\}$	– вполне неопределённая система матрица общего вида	обобщенное нормальное решение	$\min_{\ Ax-f\ _2} \ x\ _2$

1.3.2. Трансформации Гаусса

1) $r = n < m$ – матрица полного столбцового ранга

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{f} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{f}} \quad \text{обобщенное решение}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2 \Rightarrow \|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2^2 = (\mathbf{f} - \mathbf{Ax}, \mathbf{f} - \mathbf{Ax}) = \dots = \sum_{i=1}^m [f_i^2 - 2f_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \|\mathbf{f} - \mathbf{Ax}\|_2^2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ik} x_j = \sum_{i=1}^m a_{ik} f_i \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{f}$$

2) $r = m < n$ – матрица полного строчного ранга

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}, \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \text{im} \mathbf{A}^T \Rightarrow \mathbf{AA}^T \mathbf{y} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{f} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{f}} \quad \text{нормальное решение}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \in \text{im} \mathbf{A}^T, \mathbf{x}_2 \in \text{ker} \mathbf{A}, \mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2, \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 \Rightarrow \min_{\mathbf{Ax}=\mathbf{f}} \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}_1\|_2$$

3) $r < \min\{m, n\}$ – матрица общего вида

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC}, \mathbf{B} - m \times r, \mathbf{C} - r \times n$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{BCx} = \mathbf{f} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{By} = \mathbf{f} & \text{— переопределённая} \\ \mathbf{Cx} = \mathbf{y} & \text{— неопределённая} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{y} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{f} \\ \mathbf{x} = \mathbf{C}^T (\mathbf{CC}^T)^{-1} \mathbf{y} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{C}^T (\mathbf{CC}^T)^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{f}}$$

обобщенное нормальное решение

1.3.3. Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза

A^+ – обобщение обратной матрицы

$AA^+A = A$	$A^+AA^+ = A^+$
$(AA^+)^T = AA^+$	$(A^+A)^T = A^+A$

3) $r < \min\{m, n\}$ – матрица общего вида

$A = BC$, $B - m \times r$, $C - r \times n$ – скелетное разложение

$$A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$$

$$AA^+A = (BC)C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T(BC) = B(CC^T)(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}(B^TB)C = BC = A$$

$$A^+AA^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T(BC)C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B =$$

$$= C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}(BB^T)(CC^T)(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = A^+$$

$$AA^+ = (BC)C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = B(CC^T)(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = B(B^TB)^{-1}B^T \quad \text{– симметричная}$$

$$A^+A = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T(BC) = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}(B^TB)C = C^T(CC^T)^{-1}C \quad \text{– симметричная}$$

Свойство

$$A = BC \Rightarrow A^+ = C^+B^+$$

$$x = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^Tf = A^+f \quad \text{– обобщенное нормальное решение}$$

1) $r = n < m$ – матрица полного столбцового ранга

$$B = A, C = I$$

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T \Rightarrow x = (A^TA)^{-1}A^Tf = A^+f \quad \text{– обобщенное решение}$$

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T \Rightarrow x = A^T(AA^T)^{-1}f = A^+f$$

2) $r = m < n$ – матрица полного строчного ранга

$$B = I, C = A$$

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} \Rightarrow x = A^T(AA^T)^{-1}f = A^+f \quad \text{– нормальное решение}$$

1.3.4. Использование ортогональных преобразований для систем с матрицами полного ранга

1) $r = n < m$ – матрица полного столбцового ранга

$$Ax = f \Rightarrow QAx = Qf \Rightarrow Rx = g, QA = R = \begin{bmatrix} R_0 \\ O \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \times n \\ \} (m-n) \times n \end{matrix}, Qf = g = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} m-n \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ O \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{R_0 x = g_0} \Rightarrow \text{обобщенное решение: } \|g_1\|_2 = \min \|f - Ax\|_2$$

$$\|f - Ax\|_2^2 = (f - Ax, f - Ax) = (Q(f - Ax), Q(f - Ax)) = \|g - Rx\|_2^2 = \|g_0 - R_0 x\|_2^2 + \|g_1\|_2^2 \Rightarrow \min \|f - Ax\|_2^2 = \|g_1\|_2^2$$

2) $r = m < n$ – матрица полного строчного ранга

$$Ax = f, AQ = L = \begin{bmatrix} L_0 & O \\ \underbrace{\quad}_m & \underbrace{\quad}_{n-m} \end{bmatrix}, x = Qy, \Rightarrow Ly = f, Q = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 \\ \underbrace{\quad}_m & \underbrace{\quad}_{n-m} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} m \\ \} n-m \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} L_0 & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = f \Rightarrow \boxed{L_0 y_0 = f} \Rightarrow x = Qy = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = Q_0 y_0 + Q_1 y_1 \quad \boxed{x = Q_0 y_0} \text{ нормальное решение}$$

$$\|x\|_2^2 = \|Q_0 y_0\|_2^2 + \|Q_1 y_1\|_2^2 = \|x_0\|_2^2 + \|x_1\|_2^2, \Rightarrow \min_{Ax=f} \|x\|_2^2 = \|x_0\|_2^2$$

1.3.5. Использование сингулярного разложения (SVD) матрицы

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 & \\ & \mathbf{O}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}, \mathbf{\Sigma}_0 = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}, r = \text{rank} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{V}_0}_r & \underbrace{\mathbf{V}_1}_{m-r} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{U}_0}_r & \underbrace{\mathbf{U}_1}_{n-r} \end{bmatrix} - m \times m \text{ и } n \times n \text{ ортогональные (унитарные) матрицы}$$

а) Обобщенное нормальное решение системы $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{x} = \mathbf{V}^T \mathbf{f}, \mathbf{U}^T \mathbf{x} = \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \underbrace{y_0}_r \\ \underbrace{y_1}_{n-r} \end{bmatrix}, \mathbf{V}^T \mathbf{f} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \underbrace{g_0}_r \\ \underbrace{g_1}_{m-r} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{\Sigma} \mathbf{y} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{g} = \mathbf{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{g}, \mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{y}$$

$$\boxed{\mathbf{g}_0 = \mathbf{V}_0^T \mathbf{f}} \Rightarrow \boxed{y_i^{(0)} = \frac{g_i^{(0)}}{\sigma_i}, i = 1, \dots, r} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{U}_0 \mathbf{y}_0}$$

б) Псевдообратная матрица \mathbf{A}^+

$$\boxed{\mathbf{A}^+ = \mathbf{U}^T \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{V} = \mathbf{U}_0^T \mathbf{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{V}_0}$$

а) Псевдоранг матрицы \mathbf{A}

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 & \\ & \mathbf{\Sigma}_1 \end{bmatrix}, \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \gg \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n \left(\frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_1} < \varepsilon, \frac{\sigma_r}{\sigma_1} \geq \varepsilon \right) \Rightarrow r = \text{pseudo rank} \mathbf{A}$$

а) Решение плохообусловленной системы $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 & \\ & \mathbf{\Sigma}_1 \end{bmatrix}, \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \gg \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{V}_0}_r & \underbrace{\mathbf{V}_1}_{n-r} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{U}_0}_r & \underbrace{\mathbf{U}_1}_{n-r} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{g}_0 = \mathbf{V}_0^T \mathbf{f}} \Rightarrow \boxed{y_i^0 = \frac{g_i^0}{\sigma_i}, i = 1, \dots, r} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{U}_0 \mathbf{y}_0} - \text{устойчивая часть решения}$$

1.3.6. Нормализованный процесс разложения матрицы

$$\Theta \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{L} = [\mathbf{L}_0 \quad \mathbf{O}], \quad \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{r1} & \dots & l_{rr} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & \dots & l_{mr} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} l_{ii} \geq l_{ij}, \\ l_{ii} \geq l_{ji}, \end{matrix} \quad i < j,$$

\mathbf{A} – $m \times n$ матрица
 Θ – $m \times m$ матрица
 \mathbf{L}_0 – $m \times r$ трапециевидная матрица
 $r = \text{rank} \mathbf{A}$

Шаг 1 $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$
 $\|\mathbf{A}_{i^*}^1\|_2 = \max_{1 \leq i \leq m} \|\mathbf{A}_{i^*}^1\|_2 \Rightarrow$ перестановка строк $l_1 \Leftrightarrow 1 \Rightarrow$

$$\mathbf{A}_2 = \Theta_{1,l_1} \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_2 & \\ * & & & \end{bmatrix}$$

Шаг 2
 $\|\mathbf{A}_{i^*}^2\|_2 = \max_{2 \leq i \leq m} \|\mathbf{A}_{i^*}^2\|_2 \Rightarrow$ перестановка строк $l_2 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow$

$$\mathbf{A}_3 = \Theta_{2,l_2} \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{21} & 0 & \dots & 0 \\ * & * & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{A}_3 & \\ * & * & & & \end{bmatrix}$$

Шаг r-1
 $\|\mathbf{A}_{i^*}^{r-1}\|_2 = \max_{r-1 \leq i \leq m} \|\mathbf{A}_{i^*}^{r-1}\|_2 \Rightarrow$ перестановка строк $l_{r-1} \Leftrightarrow r-1 \Rightarrow$

$$\mathbf{A}_r = \Theta_{r-1,l_{r-1}} \mathbf{A}_{r-1} \mathbf{Q}_{r-1} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ l_{r-1,1} & \dots & l_{r-1,r-1} & & & \\ * & \dots & * & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Шаг r
 $\|\mathbf{A}_{i^*}^r\|_2 = \max_{r \leq i \leq m} \|\mathbf{A}_{i^*}^r\|_2 \Rightarrow$ перестановка строк $l_r \Leftrightarrow r \Rightarrow$

$$\mathbf{A}_{r+1} = \Theta_{r,l_r} \mathbf{A}_r \mathbf{Q}_r = \mathbf{L} = [\mathbf{L}_0 \quad \mathbf{O}]$$

$l_{ii}^2 \geq \sum_{k=i}^n l_{jk}^2$	$j = i + 1, \dots, m$
---------------------------------------	-----------------------

1.3.7. Использование нормализованного процесса разложения матрицы

$$\Theta A Q = L \Leftrightarrow \Theta A [Q_0 \quad Q_1] = [L_0 \quad O] \Rightarrow \Theta A = L_0 Q_0^T \Rightarrow A = \Theta L_0 Q_0^T$$

а) Обобщенное нормальное решение системы $Ax = f$

$$L_0 Q_0^T x = \Theta f \Rightarrow \begin{cases} L_0 y = \Theta f & \text{переопределённая} \\ Q_0^T x = y & \text{неопределённая} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_0 y = \Theta f & \text{см. п. 1.3.4 1)} \\ x = Q_0 y & \text{нормальное решение} \end{cases}$$

б) Псевдообратная матрица A^+

$$A^+ = Q_0 L_0^+ \Theta = Q_0 (L_0^T L_0)^{-1} L_0 \Theta$$

а) Псевдоранг матрицы A

$$\Theta A Q = L = [L_0 \quad L_1] = \begin{bmatrix} L_{00} & \\ * & L_{11} \end{bmatrix}, l_{11} \geq \dots \geq l_{rr} \gg l_{r+1,r+1} \geq \dots \left(\frac{l_{r+1,r+1}}{l_{11}} < \varepsilon, \frac{l_{r+1,r+1}}{l_{11}} \geq \varepsilon \right) \Rightarrow r = \text{pseudo rank } A$$

или

$$\left(\frac{l_{r+1,r+1}}{l_{rr}} < \varepsilon, \frac{l_{r+1,r+1}}{l_{rr}} \geq \varepsilon \right) \Rightarrow r = \text{pseudo rank } A$$

а) Решение плохообусловленной системы $Ax = f$

$$\Theta A Q = \Theta A [Q_0 \quad Q_1] = [L_0 \quad L_1] = \begin{bmatrix} L_{00} & \\ * & L_{11} \end{bmatrix}, l_{11} \geq \dots \geq l_{rr} \gg l_{r+1,r+1} \geq \dots \quad V = \begin{bmatrix} \underbrace{V_0}_r & \underbrace{V_1}_{n-r} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \underbrace{U_0}_r & \underbrace{U_1}_{n-r} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$L_0 Q_0^T x = \Theta f \Rightarrow \begin{cases} L_0 y = \Theta f & \text{переопределённая} \\ Q_0^T x = y & \text{неопределённая} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_0 y = \Theta f \\ x = Q_0 y \end{cases} \text{ — устойчивая часть решения}$$

1.3.8. Замечания

1. Не доказана однозначность A^+ и не отмечена ее связь с регуляризацией Тихонова:

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow +0} (A^T A + \delta I)^{-1} A^T = \lim_{\delta \rightarrow +0} A^T (A A^T + \delta I)^{-1}$$

2. Существуют и другие методы вычисления A^+ .

Например, метод окаймления.

3. Существуют и другие подходы к решению систем общего вида.

Например, обобщенное решение системы $Ax = f$ с матрицей полного столбцового ранга можно найти из системы с невырожденной матрицей:

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Существуют другие виды псевдообратных матриц.

Например, матрица Дразина A^D :

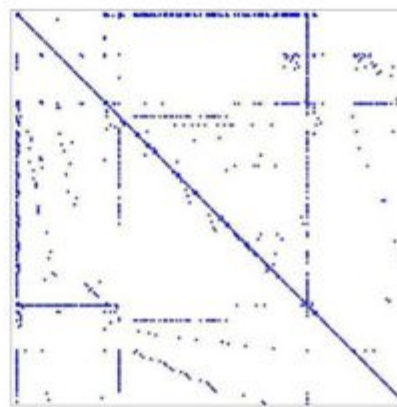
$AA^D = A^D A$	$A^D A A^D = A^D$	$A^D A^{k+1} = A^k$
----------------	-------------------	---------------------

Здесь k — индекс матрицы A , т.е. наименьшее целое неотрицательное число, для которого $\text{rank} A^{k+1} = \text{rank} A^k$.

При этом, $A^D = A^k (A^{2k+1})^+ A^k$.

Еще пример: полуобратная матрица A^- , удовлетворяющая условию $AA^-A = A$ (определяется неоднозначно).

1.4. Решение задач с разреженными матрицами



1.4.1. Экономные схемы хранения ненулевых элементов (1, 4)

1.4.2. Операции с разреженными матрицами (1, 4)

1.4.3. Специальные структуры разреженных матриц (1, 3)

1.4.4. Прямые методы решения без изменения структуры матрицы (3)

1.4.5. Прямые методы решения с минимизацией заполнения матрицы (2)

1.4.6. Итерационные методы решения систем (5)

1.4.7. Литература к разделу 1.4

1. Тьюарсон Р. *Разреженные матрицы*. – М.: Мир, 1977
2. Златев З., Эстербю О. *Прямые методы для разреженных матриц*. – М. Мир, 1987.
3. Джордж А., Лю Дж. *Численное решение больших разреженных систем уравнений*. – М. Мир, 1984.
4. Писсанецки С. *Технология разреженных матриц*. – М. Мир, 1988.
5. Хейенман Л., Янг Д. *Прикладные итерационные методы*. – М. Мир, 1988.

Глава 2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

- нелинейное уравнение

$$f(x) = 0$$

- система нелинейных уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_r) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_r(x_1, \dots, x_r) = 0 \end{cases}$$

2.1. Методы нахождения корня трансцендентного уравнения

$f(x)$ – непрерывная

x_* – корень

2.1.1. Метод последовательных приближений (простых итераций)

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \varphi(x)$$

x_0 – начальное приближение

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 1, 2, 3, \dots$$

if $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_*$

$$\Rightarrow x_* = x_*$$

Теорема сходимости

<ol style="list-style-type: none"> $\forall x', x'' \in U_\delta(x_0) = \{x \mid x - x_0 < \delta\}, \varphi(x') - \varphi(x'') < q x' - x'' , 0 < q < 1$ $\frac{ x_0 - \varphi(x_0) }{1 - q} \leq \delta$ 	$\exists! x_*: x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_*$ $ x_k - x_* \leq q^k \delta$
--	---

Скорость сходимости

Линейная сходимость	$\exists \alpha \in (0, 1): \exists N \in \mathbf{N} \forall n \geq N x_n - x_* < \alpha x_{n-1} - x_* $
Сходимостью степени β	$\exists \alpha \in (0, 1): \exists N \in \mathbf{N} \forall n \geq N x_n - x_* < \alpha x_{n-1} - x_* ^\beta$

2.1.2. Метод бисекции (метод дихотомии, метод деления отрезка пополам)



$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow x_* \in [a, b]$$

$$[a, b] = [a_0, b_0]$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

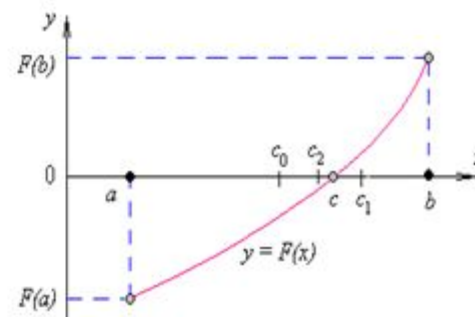
$[a_k, b_k] \Rightarrow c_k = \frac{a_k + b_k}{2} \Rightarrow$	if $f(a_k)f(c_k) < 0 \Rightarrow a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$
	if $f(a_k)f(c_k) > 0 \Rightarrow a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$

Критерии прекращения итерационного процесса

- $k \leq K_{\max}$ по числу итераций
- $|b_k - a_k| < \delta$ по близости к корню
- $|f(c_k)| < \varepsilon$ по малости невязки

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

Линейная сходимость

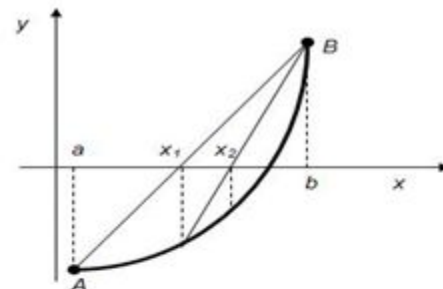


Методы линейной интерполяции

2.1.3. Метод хорд

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow x_* \in [a, b]$$

$[a, b] = [a_0, b_0]$ $k = 1, 2, 3, \dots$	$[a_k, b_k] \Rightarrow$ $c_k = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(a_k)$	if $f(a_k)f(c_k) < 0 \Rightarrow a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$ if $f(a_k)f(c_k) > 0 \Rightarrow a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$
---	--	--



Критерии прекращения итерационного процесса	$k \leq K_{\max}$ $ c_k - c_{k-1} < \delta$ $ f(c_k) < \varepsilon$	$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \bar{x}}{f_k - \bar{f}} f_k$	МЕТОД ЛОЖНОГО ПОЛОЖЕНИЯ
---	---	---	-------------------------------

2.1.4. Метод Ньютона (-Рафсона) (метод касательных) $f(x)$ – дифференцируемая функция

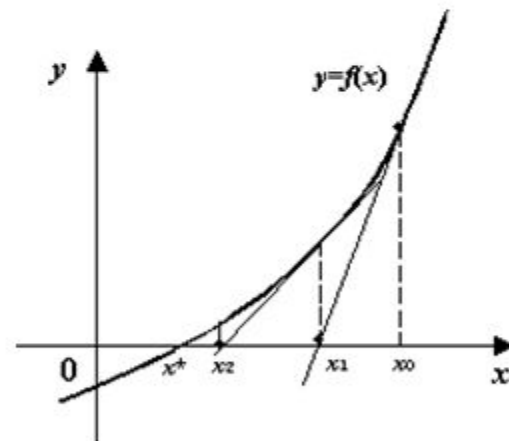
x_0 – начальное приближение
 $f_k = f(x_k), f'_k = f'(x_k)$
 $k = 1, 2, 3, \dots$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f_k}{f'_k}$	$x_{k+1} = x_k - \frac{f_k}{f'_0}$ модифицированный	$ x_{k+1} - x_k < \delta$ $ f(x_k) < \varepsilon$
------------------------------------	--	--

Теорема сходимости

квадратичная сходимость

1. $f'(x_0) \neq 0, \frac{1}{ f'(x_0) } < B$	2. $\left \frac{f(x_0)}{f'(x_0)^2} \right \leq \eta$	if $\delta \geq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta$
3. $\exists \delta > 0, \forall x: x - x_0 < \delta \Rightarrow f''(x) \leq K$	4. $h \equiv BK\eta \leq \frac{1}{2}$	\Downarrow
$\exists ! x_*: x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_*, x_k - x_* \leq t_k - t_*, t_*$ – корень $\varphi(t) = \frac{1}{2}Kt^2 - \frac{1}{B}t + \frac{\eta}{B}, t_{k+1} = t_k - \frac{\varphi_k}{\varphi'_k}$		



Теорема единственности

if $h < \frac{1}{2} \Rightarrow !x_* \in U_\delta(x_0)$, где $\delta \leq t_* = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta$	if $h = \frac{1}{2} \Rightarrow !x_* \in U_\delta(x_0)$, где $\delta = t_* = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta = 2\eta$
--	---

Теоремы сходимости и единственности (модифицированного метода)

2.1.5. Метод секущих

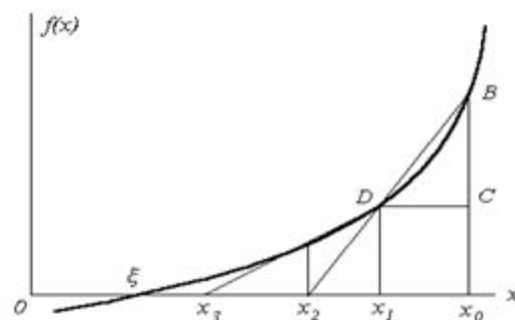
(как дискретная модификация метода Ньютона)

x_0, x_1 – начальные приближения

$f_k = f(x_k), k=2,3,4,\dots$

$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f_k - f_{k-1}} f_k$	$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k < \delta \\ f(x_k) < \varepsilon \end{aligned}$
---	--

Скорость сходимости $\beta \approx 1.62$



Методы квадратичной интерполяции

2.1.6. Метод Мюллера (метод парабол)

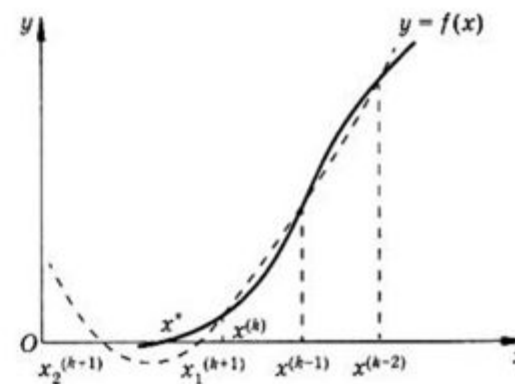
В основе метода лежит интерполирование параболой функции $y = f(x)$

x_0, x_1, x_2 – начальные приближения

$k=3,4,5,\dots$

$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})}}$
--

Знак выбирается таким образом, чтобы знаменатель был больше по абсолютной величине



$$\omega = f(x_k, x_{k-1}) + f(x_k, x_{k-2}) - f(x_{k-1}, x_{k-2})$$

$$f(x_k, x_{k-1}) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}) = \frac{f(x_k, x_{k-1}) - f(x_{k-1}, x_{k-2})}{x_k - x_{k-2}}$$

2.1.7. Метод обратной параболической интерполяции

В основе метода лежит интерполирование параболой обратной функции $x = g(y)$

x_0, x_1, x_2 – начальные приближения

$x_{k+1} = \frac{f_{k-1}f_k x_{k-2}}{(f_{k-2} - f_{k-1})(f_{k-2} - f_k)} + \frac{f_{k-2}f_k x_{k-1}}{(f_{k-1} - f_{k-2})(f_{k-1} - f_k)} + \frac{f_{k-2}f_{k-1} x_k}{(f_k - f_{k-2})(f_k - f_{k-1})}$

$k=3,4,5,\dots$

Скорость сходимости $\beta \approx 1.84$

2.1.8. Метод Чебышева

В основе метода лежит разложение в ряд Тейлора функции $x = g(y)$ обратной к функции $y = f(x)$.

$$x_0 - \text{начальное приближение}$$
$$f_k = f(x_k), \quad f'_k = f'(x_k), \quad f''_k = f''(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f_k}{f'_k} - \frac{f_k^2 f''_k}{2 f_k'^3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

кубическая сходимость

2.1.9. Метод Лагерра

В основе метода лежит интерполирование параболой алгебраического многочлена $y = f(x)$

$$x_0 - \text{начальное приближение}$$
$$f_k = f(x_k), \quad f'_k = f'(x_k), \quad f''_k = f''(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf_k}{\sqrt{(n-1)^2 f_k'^2 - n(n-1)f_k f''_k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Методы Паде-аппроксимации

В основе методов лежат два вида Паде-аппроксимации функции $x = g(y)$ обратной к функции $y = f(x)$.

2.1.10. $x = [0/1]_g(y)$

x_0 – начальное приближение

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2}{x_k - t_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

2.1.11. Метод Галлея (Хэлли) $x = [1/1]_g(y)$

$$f_k = f(x_k), \quad f'_k = f'(x_k), \quad f''_k = f''(x_k)$$

$$t_k = -\frac{f_k}{f'_k}$$

$$r_k = \frac{f''_k}{f'_k} t_k^2$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{t_k^2}{t_k + \frac{1}{2}r_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

2.2. Методы нахождения корней алгебраических многочленов

2.2.1. Схема Горнера вычисления значений полинома и его производных

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \dots + a_{n-1})x + a_n$$

$$s_0 = a_0, s_i = a_i + s_{i-1}x_0, i = 1, \dots, n, s_n = P_n(x_0) \Rightarrow P_n(x) = (s_0x^{n-1} + s_1x^{n-2} + \dots + s_{n-1})(x - x_0) + s_n$$

$$s_0^{(k)} = s_0^{(k-1)}, s_i^{(k)} = s_i^{(k-1)} + s_{i-1}^{(k-1)}x_0, i = 1, \dots, n-k, k!s_{n-k}^{(k)} = P_n^{(k)}(x_0)$$

2.2.2. Методы определения границ корней

а) Границы всех корней

$$\frac{|a_n|}{\alpha' + |a_n|} \leq |z| \leq \frac{\alpha}{|a_0|}, \alpha = \max_{i>0} |a_i|, \alpha' = \max_{i<n} |a_i|$$

$$\frac{|a_n|}{|a_{n-1}| + \sqrt{|a_n a_{n-2}|}} \leq |z| \leq \frac{|a_1| + \sqrt{|a_0 a_2|}}{|a_0|}$$

б) Верхняя граница положительных корней

$$a_0 > 0, N_0 = 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}, k = \min\{i | a_i < 0\}, A = \max_{i \geq k} \{-a_i\}$$

в) Нижняя граница отрицательных корней

$$P_n(-x) \Rightarrow N_0$$

г) Нижняя граница положительных корней

$$x^n P_n(x^{-1}) \Rightarrow N_0$$

д) Верхняя граница отрицательных корней

$$x^n P_n(-x^{-1}) \Rightarrow N_0$$

е) Верхняя граница положительных корней

$$P_n^{(k)}(c) > 0, k = 0, \dots, n \Rightarrow$$

2.2.3. Методы определения числа вещественных корней

а) Число вещественных корней = $n - 2m$

б) Число положительных корней = # перемен знака $a_i - 2m$

в) Число вещественных корней $\in (a, b) = w(b) - w(a)$

$w(c)$ - число перемен знаков в последовательности Штурма
 $f_0(c), f_1(c), \dots, f_n(c)$

$$f_0(x) = P_n(x) \quad f_1(x) = P_n'(x) \quad \dots \quad f_{k-1}(x) = f_k(x)q_k(x) - f_{k+1}(x), k = 1, \dots, n-1$$

2.2.4. Метод Лобачевского-Греффе

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, a_0 \neq 0$	$P(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$	$x_i, i = 1, \dots, n$ - корни
$\tilde{P}(x) \equiv (-1)^n P(-x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n$	$\tilde{P}(x) = a_0 (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_{n-1})(x + x_n)$	$-x_i, i = 1, \dots, n$ - корни
$\hat{P}(z) \equiv P(x)\tilde{P}(x) = a_0^{(1)} z^n - a_1^{(1)} z^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n^{(1)}$	$P_1(x) = (-1)^n \hat{P}(-x) = a_0 (x + x_1^2)(x + x_2^2) \dots (x + x_n^2)$	$-x_i^2, i = 1, \dots, n$ - корни
↓ после k шагов		
$P_k(x) = a_0^{(k)} x^n + a_1^{(k)} x^{n-1} + a_2^{(k)} x^{n-2} + \dots + a_{n-1}^{(k)} x + a_n^{(k)}$: $-x_i^m, m = 2^k, i = 1, \dots, n$ - корни	$a_0^{(k+1)} = a_0^{(k)2}, a_1^{(k+1)} = a_1^{(k)2} - 2a_0^{(k)} a_2^{(k)}, a_2^{(k+1)} = a_2^{(k)2} - 2a_1^{(k)} a_3^{(k)} + 2a_0^{(k)} a_4^{(k)}, \dots$ $\dots a_{n-2}^{(k+1)} = a_{n-2}^{(k)2} - 2a_{n-3}^{(k)} a_{n-1}^{(k)} + 2a_{n-4}^{(k)} a_0^{(k)}, a_{n-1}^{(k+1)} = a_{n-1}^{(k)2} - 2a_{n-2}^{(k)} a_n^{(k)}, a_n^{(k+1)} = a_n^{(k)2}$	

$x_1^m + x_2^m + x_3^m + \dots + x_{n-1}^m + x_n^m = a_1^{(k)} / a_0^{(k)}$
 $x_1^m x_2^m + x_1^m x_3^m + \dots + x_1^m x_n^m + x_2^m x_3^m + \dots + x_{n-1}^m x_n^m = a_2^{(k)} / a_0^{(k)}$
 $x_1^m x_2^m x_3^m + \dots + x_1^m x_{n-1}^m x_n^m + x_2^m x_3^m x_4^m + \dots + x_{n-2}^m x_{n-1}^m x_n^m = a_3^{(k)} / a_0^{(k)}$

Формулы Виетта

.....

$x_1^m x_2^m x_3^m \dots x_{n-1}^m + \dots + x_2^m x_3^m \dots x_{n-1}^m x_n^m = a_{n-1}^{(k)} / a_0^{(k)}$
 $x_1^m x_2^m x_3^m \dots x_{n-1}^m x_n^m = a_n^{(k)} / a_0^{(k)}$

+

1) $ x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > \dots > x_n $	2) $ x_1 > x_2 = x_3 > x_4 > \dots > x_n $	3) $ x_1 > x_2 = x_3 > \dots > x_n , x_{2,3} = r e^{\pm i\varphi}$
$x_1^m \approx a_1^{(k)} / a_0^{(k)} \quad a_1^{(k)} \approx a_1^{(k)2}$ $x_2^m \approx a_2^{(k)} / a_1^{(k)} \quad a_2^{(k)} \approx a_2^{(k)2}$ $x_3^m \approx a_3^{(k)} / a_2^{(k)} \quad a_3^{(k)} \approx a_3^{(k)2}$ $x_4^m \approx a_4^{(k)} / a_3^{(k)} \Rightarrow a_4^{(k)} \approx a_4^{(k)2}$ \vdots $x_{n-1}^m \approx a_{n-1}^{(k)} / a_{n-2}^{(k)} \quad a_{n-1}^{(k)} \approx a_{n-1}^{(k)2}$ $x_n^m \approx a_n^{(k)} / a_{n-1}^{(k)} \quad a_n^{(k)} = a_n^{(k)2}$	$x_1^m \approx a_1^{(k)} / a_0^{(k)} \quad a_1^{(k)} \approx a_1^{(k)2}$ $x_2^m \approx \frac{1}{2} a_2^{(k)} / a_1^{(k)} \quad a_2^{(k)} \approx \frac{1}{2} a_2^{(k)2}$ $x_2^{2m} \approx a_3^{(k)} / a_1^{(k)} \quad a_3^{(k)} \approx a_3^{(k)2}$ $x_4^m \approx a_4^{(k)} / a_3^{(k)} \Rightarrow a_4^{(k)} = a_4^{(k)2}$ \vdots $x_{n-1}^m \approx a_{n-1}^{(k)} / a_{n-2}^{(k)} \quad a_{n-1}^{(k)} \approx a_{n-1}^{(k)2}$ $x_n^m \approx a_n^{(k)} / a_{n-1}^{(k)} \quad a_n^{(k)} = a_n^{(k)2}$	$x_1^m \approx a_1^{(k)} / a_0^{(k)} \quad a_1^{(k)} \approx a_1^{(k)2}$ \dots $r^{2m} \approx a_3^{(k)} / a_1^{(k)} \quad a_3^{(k)} \approx a_3^{(k)2}$ $x_4^m \approx a_4^{(k)} / a_3^{(k)} \Rightarrow a_4^{(k)} = a_4^{(k)2}$ \vdots $x_{n-1}^m \approx a_{n-1}^{(k)} / a_{n-2}^{(k)} \quad a_{n-1}^{(k)} \approx a_{n-1}^{(k)2}$ $x_n^m \approx a_n^{(k)} / a_{n-1}^{(k)} \quad a_n^{(k)} = a_n^{(k)2}$
$x_1 + 2r \cos \varphi + x_4 + \dots + x_n = -a_1 / a_0$		

2.2.5. Другой метод нахождения всех корней

В основе метода лежит метод Ньютона

$x_i^{(0)}, i = 1, 2, \dots, n$ – начальные приближения ко всем корням $P(x)$	$k = 1, 2, \dots$ $Q_k(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i^{(k)})$	$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P(x_i^{(k)})}{Q_k'(x_i^{(k)})}, i = 1, 2, \dots, n$	$ x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} < \delta, i = 1, 2, \dots, n$ $ f(x_i^{(k)}) < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n$
---	---	--	--

Метод сходится для многочленов, имеющих простые корни ($x_i \neq x_j, i \neq j$).

2.2.6. Методы выделения множителей

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

а) Метод Лина (метод предпоследнего остатка)

$g_0(x)$ – начальное приближение \Rightarrow	$\{g_k(x)\} k = 1, 2, 3, \dots$	$P(x) = xg_k(x)r_k(x) + \alpha_{k+1}g_{k+1}(x)$
--	---------------------------------	---

Линейный делитель $g_k(x) = x - x_k$
$x_{k+1} = \frac{P(0)x_k}{P(0) - P(x_k)} = \frac{a_n x_k}{a_n - P(x_k)} = -\frac{a_n}{s_{n-1}}$

Квадратичный делитель $g_k(x) = x^2 + p_kx + q_k$
$P(x) = x(x^2 + p_kx + q_k)(b_0x^{n-3} + b_1x^{n-4} + \dots + b_{n-3}) + b_{n-2}(x^2 + p_{k+1}x + q_{k+1})$

б) Метод Берстоу выделение квадратичного делителя

$$P(x) = (x^2 + px + q)R(x) + b_{n-1}(x + p) + b_n \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} \equiv b_{n-1}(p, q) = 0 \\ b_n \equiv b_n(p, q) = 0 \end{cases}$$

$P(x) = (x^2 + p_kx + q_k)R_{n-2}(x) + b_{n-1}(x + p_k) + b_n$	$M = p_k c_{n-2} + q_k c_{n-3}$	$p_{k+1} = p_k + \frac{b_{n-1}c_{n-2} + b_n c_{n-3}}{D}, q_{k+1} = q_k + \frac{b_n c_{n-2} + b_{n-1}M}{D}$
$R_{n-2}(x) = (x^2 + p_kx + q_k)S_{n-4}(x) + c_{n-3}(x + p_k) + c_{n-2}$	$D = c_{n-2}^2 - M c_{n-3}$	

$$P(x) = x(x^2 + p_kx + q_k)(b_0x^{n-3} + b_1x^{n-4} + b_{n-3}) + b_{n-1}(x^2 + p_{k+1}x + q_{k+1})$$

2.2.7. Метод Бернулли

$$P(x) = x^n - p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \dots - p_{n-1} x - p_n$$

В основе метода лежат формулы Ньютона
 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ – корни многочлена

$$k p_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \dots - p_{k-1} s_1, k = 1, 2, \dots, n$$

$$s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$$

$\mu_0, \mu_{-1}, \mu_{-2}, \dots, \mu_{-n+1}$ – произвольные величины
 (например, $\mu_0 = 1, \mu_{-i} = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$)

$$\mu_k = p_1 \mu_{k-1} + p_2 \mu_{k-2} + \dots + p_n \mu_{k-n}, k = 1, 2, 3, \dots$$

1) $x_1 = \dots = x_p, |x_1| > |x_{p+1}| > \dots > |x_n|$

$$x_1 \approx \mu_{k+1} / \mu_k$$

2) $x_1 = \dots = x_p = -x_{p+1} = \dots = -x_{p+q}, |x_1| > |x_{p+q+1}| > \dots > |x_n|$

$$x_1^2 \approx \mu_{k+2} / \mu_k$$

3)

2.2.8. Метод наискорейшего спуска

2.2.9. Методы ускорения сходимости

$$x = \varphi(x)$$

a) $y_0 = x_0, y_1 = x_1 = \varphi(x_0)$

$$y_{k+1} = \varphi(x_k)$$

$$x_{k+1} = y_{k+1} - \frac{(y_{k+1} - y_k) - (y_{k+1} - x_k)}{(y_{k+1} - y_k) - (x_k - x_{k-1})}$$

процесс Эйткена увеличивает
 скорость сходимости
 с β до $2\beta - 1$

b) $x_{3k+1} = \varphi(x_{3k})$

$$x_{3k+2} = \varphi(x_{3k+1})$$

$$x_{3k+3} = \frac{x_{3k+2} x_{3k+1} - x_{3k}^2}{x_{3k+2} - 2x_{3k+1} - x_{3k}}$$

2.2.10. Методы исчерпывания

$$P(x) = 0$$

$$f(x) = 0$$

a) α – корень

$x - \alpha$ – делитель $P(x)$

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x - \alpha}$$

$$Q'(x) = \frac{P'(x)(x - \alpha) - P(x)}{(x - \alpha)^2}, Q''(x)$$

b) α, β – корни

$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q$ – делитель $P(x)$

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x^2 + px + q}$$

$$Q'(x) = \dots, Q''(x) = \dots$$

2.3. Методы решения систем нелинейных уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

2.3.1. Метод последовательных приближений (простых итераций)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x})$$

\mathbf{x}_0 – начальное приближение

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{if } \mathbf{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_* \Rightarrow \mathbf{x}_* = \mathbf{x}_*$$

Теорема сходимости

<ol style="list-style-type: none"> $\forall \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in U_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta\}, \rho(\Phi(\mathbf{x}'), \Phi(\mathbf{x}'')) < q\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), 0 < q < 1$ $\frac{\rho(\mathbf{x}_0, \Phi(\mathbf{x}_0))}{1-q} \leq \delta$ 	$\exists! \mathbf{x}_*: \mathbf{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_*$ $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_*) \leq q^k \delta$
--	---

Критерии прекращения итерационного процесса

$$k \leq K_{\max}$$

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \delta$$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon$$

Интерполяционные методы

2.3.2. Метод Ньютона-Рафсона

В основе метода лежит разложение векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n \quad \text{матрица Якоби}$$

\mathbf{x}_0 – начальное приближение

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{f}'_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) \\ k = 1, 2, 3, \dots$$

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}'_k^{-1} \mathbf{f}_k$	$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}'_0^{-1} \mathbf{f}_k$ модифицированный	$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) < \delta$ $\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\ < \varepsilon$
---	---	---

Теорема сходимости

Скорость сходимости квадратичная

<ol style="list-style-type: none"> $\ \mathbf{f}'^{-1}(\mathbf{x}_0)\ < B$ $\ \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\ _\infty \leq \eta$ $\forall \mathbf{x}: \ \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\ _\infty < 2B\eta \Rightarrow \ \mathbf{f}''(\mathbf{x})\ \leq L$ $h \equiv B^2 L \eta \leq \frac{1}{2}$ 	\Rightarrow	$\exists! \mathbf{x}_*: \mathbf{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_*$ $\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_*\ _\infty < \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B \eta$	\Rightarrow	$\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_*\ _\infty < \frac{1}{2^{2^{n-1}}} (2h)^{2^{n-1}} B \eta$
---	---------------	--	---------------	--

2.3.3. Метод секущих

как дискретная модификация метода Ньютона
 \mathbf{x}_0 – начальное приближение, $k=1,2,3,\dots$

$$\mathbf{f}'_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{\Gamma}_k$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{f}'_k^{-1} \approx \mathbf{\Gamma}_k^{-1} \mathbf{H}_k$$

а) Простейшие аппроксимации частных производных

(h, h_j, h_{ij} – малые величины)

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\mathbf{x}_k + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_k = h\mathbf{I}, \mathbf{\Gamma}_k = \{\gamma_{ij}^{(k)}\}_{i,j}^s, \\ \gamma_{ij}^{(k)} = f_i(\mathbf{x}_k + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)$$

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\mathbf{x}_k + h_j\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)}{h_j}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_k = \text{diag}\{h_j\}_{j=1}^s, \mathbf{\Gamma}_k = \{\gamma_{ij}^{(k)}\}_{i,j}^s, \\ \gamma_{ij}^{(k)} = f_i(\mathbf{x}_k + h_j\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_k)$$

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\mathbf{x}_k + \sum_{l=1}^j h_{il}\mathbf{e}_l) - f_i(\mathbf{x}_k - \sum_{l=1}^{j-1} h_{il}\mathbf{e}_l)}{h_{ij}} \Rightarrow$$

б) Использование вспомогательных точек

$$\mathbf{x}_{k,j}, j=1,2,\dots,s \Rightarrow \mathbf{H}_k = \text{col}\{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k,j}\}_{j=1}^s, \mathbf{\Gamma}_k = \text{col}\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k,j})\}_{j=1}^s$$

в) Использование предшествующих приближений

$k=s, s+1, \dots$

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{s-1}$ – начальные приближения

$$\mathbf{x}_{k-j}, j=1,2,\dots,s \Rightarrow \mathbf{H}_k = \text{col}\{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-j}\}_{j=1}^s, \mathbf{\Gamma}_k = \text{col}\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-j})\}_{j=1}^s$$

Интерполяционные методы второго порядка

В основе методов лежат два вида квадратичной интерполяции векторной функции $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ обратной к $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$:

ряд Тейлора

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{g}(\mathbf{y}_k) + \mathbf{g}'(\mathbf{y}_k)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_k) + \frac{1}{2}\mathbf{g}''(\mathbf{y}_k)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_k)^2$$

Паде-аппроксимация

\mathbf{x}_0 – начальное приближение

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \mathbf{f}'_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k), \mathbf{f}''_k = \mathbf{f}''(\mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{t}_k = \mathbf{f}'_k^{-1} \mathbf{f}_k$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{f}_k^{-1} \mathbf{f}'_k \mathbf{t}_k^2$$

2.3.4. Метод Чебышева $\mathbf{x} = [2/0]_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{t}_k - \frac{1}{2}\mathbf{r}_k, k=1,2,3,\dots$$

2.3.5. Метод Галлея (Хэлли) $\mathbf{x} = [1/1]_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{t}_k^2}{\mathbf{t}_k + \frac{1}{2}\mathbf{r}_k}, k=1,2,3,\dots$$

2.3.6. Метод Зейделя модификация метода простых итераций (сходимость???)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k) \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = \varphi(x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}, \dots, x_s^{(k)}), \quad i=1,2,\dots,s \Rightarrow x_i^{(k+1)} = \varphi(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_s^{(k)}), \quad i=1,2,\dots,s$$

2.3.7. Комбинированные методы и аналоги методов решения СЛАУ

комбинация итерационных методов решения системы нелинейных уравнений с приближенным решением СЛАУ

а) Метод Ньютона + SOR-метод

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{f}'_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) \quad \text{система } \mathbf{f}'_k \mathbf{t}_k = \mathbf{f}_k \text{ решается SOR-методом (1-3 шага)} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{t}_k, \quad k=1,2,3,\dots$$

система решается как последовательность скалярных уравнений

б) Аналог метода Якоби

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_s) = 0$$

в) Аналог метода Зейделя

$$f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_s^{(k)}) = 0$$

$$i=1,2,\dots,s$$

$$f_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_s^{(k)}) = 0$$

2.3.8. Метод наискорейшего спуска

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s f_i^2(\mathbf{x}) \Rightarrow \min_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_*) = 0$$

Задача сводится к минимизации функционала, осуществляемая градиентным методом

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \text{grad} \Phi(\mathbf{x}_k) \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \alpha_k \sum_{j=1}^s f_j(\mathbf{x}_k) \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i} \Leftrightarrow \min_{\alpha_k} \Phi(\mathbf{x}_{k+1}) \Rightarrow \alpha_k \approx \frac{\Phi(\mathbf{x}_k)}{\|\text{grad} \Phi(\mathbf{x}_k)\|_2^2}$$

2.3.9. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений

Сведение частных видов систем к нахождению корней одного алгебраического уравнения

Литература к главе 2

1. Загускин В.Л. *Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений.* – М.: ГИФМЛ, 1960
2. Мысовских И.П. *Лекции по методам вычислений.* – СПб.: Изд. СПбГУ, 1998.
3. Трауб Дж. *Итерационные методы решения уравнений.* – М.: Мир, 1985.
4. Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – М.: Мир, 1975.

Глава 3. Решение проблемы собственных значений для матриц

3.1. Виды задач, классификация, обусловленность

3.1.1. Виды задач на собственные значения

1) Обычная проблема собственных значений

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} - n \times n$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n) \equiv (-1)^n \varphi(\lambda)$$

$$\lambda_i - \text{корни } \varphi(\lambda) \\ i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_1 = \text{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i, (-1)^{n-1} p_n = |\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

\mathbf{A} – простой структуры

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n$$

\Rightarrow

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i\}_{i=1}^n$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \forall \lambda_i \in \mathcal{R}$$

общий случай

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{J} \\ \mathbf{J} = \text{block diag}\{\mathbf{J}^i(\lambda_i)\} \\ \mathbf{J}^i(\lambda_i) = \text{block diag}\{\mathbf{J}_j^i(\lambda_i)\}$$

$$\mathbf{J}_j^i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \lambda_i \end{bmatrix} - j \times j$$

2) Обобщенная проблема собственных значений

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} - m \times n$$

регулярная задача

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}|$$

$$|\mathbf{B}| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$$

$$|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda^{-1}\mathbf{I}$$

$$\exists \alpha : |\mathbf{A} - \alpha\mathbf{B}| \neq 0 \Rightarrow \dots$$

сингулярная задача

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = \text{block diag}\{\mathbf{J}_C, \mathbf{N}_\infty, \mathbf{R}_s, \mathbf{L}_\eta\}$$

3) Полиномиальная проблема собственных значений

$$(\lambda^s \mathbf{A}_s + \lambda^{s-1} \mathbf{A}_{s-1} + \dots + \lambda \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\forall \mathbf{A}_i - m \times n$$

$$\mathbf{D}(\lambda) = \lambda^s \mathbf{A}_s + \lambda^{s-1} \mathbf{A}_{s-1} + \dots + \lambda \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 \Rightarrow \mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} - ms \times ns$$

4) Нелинейная проблема собственных значений

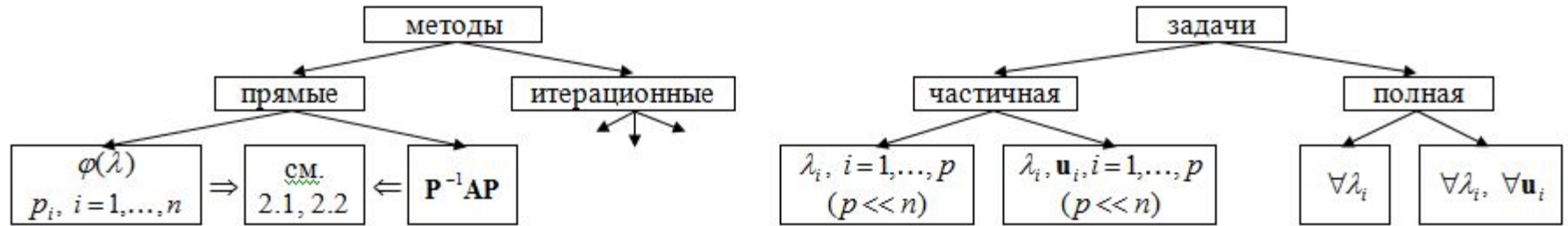
$$\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D}(\lambda) = \{d_{ij}(\lambda)\} - m \times n$$

регулярная задача

$$|\mathbf{D}(\lambda)| = 0$$

3.1.2. Классификация методов решения



3.1.3. Обусловленность проблемы собственных значений

A – простой структуры $A \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i^T A = \lambda_i \mathbf{v}_i^T$
 $i = 1, 2, \dots, n, (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = 0, i \neq j$

$$(A + \Delta A)(\mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i) = (\lambda_i + \Delta \lambda_i)(\mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i) \mid (\dots, \mathbf{v}_j) \Rightarrow (\Delta A \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) + (A \Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \lambda_i (\Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) + \Delta \lambda_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) \Rightarrow$$

if $i = j$

$$(A \Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = (\Delta \mathbf{u}_i, A^T \mathbf{v}_i) = \lambda_i (\Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) \Rightarrow (\Delta A \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = \Delta \lambda_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) \Rightarrow \Delta \lambda_i = \frac{(\Delta A \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)}{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)}$$

$$|\Delta \lambda_i| \leq \frac{\|\mathbf{u}_i\| \|\mathbf{v}_i\|}{|(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)|} \|\Delta A\| \Rightarrow \delta_i = \frac{\|\mathbf{u}_i\| \|\mathbf{v}_i\|}{|(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)|} = \frac{1}{|\cos \varphi_i|} \text{ – коэффициент перекоса, } \varphi_i = (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)$$

if $i \neq j$

$$(\Delta A \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = (\lambda_i - \lambda_j)(\Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) \Rightarrow (\Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \frac{(\Delta A \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)}, \Delta \mathbf{u}_i = \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} \mathbf{u}_k \Rightarrow (\Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \alpha_{ij} (\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j), \alpha_{ij} = \frac{(\Delta A \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j)}$$

if $\|\mathbf{u}_i\| = \|\mathbf{v}_i\| = 1$
 $i = 1, 2, \dots, n$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \sum_{j \neq i} \frac{(\Delta A \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j)} \mathbf{u}_j \Rightarrow \|\Delta \mathbf{u}_i\| \leq \sum_{j \neq i} \frac{\|\Delta A\| \|\mathbf{u}_i\| \|\mathbf{v}_j\|}{|\lambda_i - \lambda_j| |(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j)|} \|\mathbf{u}_j\| \Rightarrow \|\Delta \mathbf{u}_i\| \leq \|\Delta A\| \sum_{j \neq i} \frac{\delta_j}{|\lambda_i - \lambda_j|}$$

Обусловленность собственного значения λ_i зависит от его коэффициента перекоса $\delta_i = \frac{1}{|\cos \varphi_i|}$

Обусловленность собственного вектора \mathbf{u}_i зависит от всех коэффициентов перекоса $\delta_j = \frac{1}{|\cos \varphi_j|}, j \neq i,$

и от близости λ_i к другим собственным значениям $\lambda_j, j \neq i.$

3.2. Прямые методы решения обычной проблемы собственных значений

Вычисление характеристического полинома
или его коэффициентов

$$|A - \lambda I| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n) \equiv (-1)^n \varphi(\lambda)$$

3.2.1. Метод Левере

В основе метода лежат формулы Ньютона

$$A^k, k=1,2,\dots,n \Rightarrow s_k = \text{tr} A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, k=1,2,\dots,n \Rightarrow p_1 = s_1, kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \dots - p_{k-1} s_1, k=1,2,\dots,n$$

3.2.2. Метод Д.К.Фаддеева (-Левере)

Модификация метода Левере

$$A_1 = A \Rightarrow q_k = \frac{1}{k} \text{tr} A_k, B_k = A_k - q_k I, A_{k+1} = A B_k, k=1,2,\dots,n$$

Теорема

$$1) q_k = p_k, k=1,2,\dots,n$$

$$2) B_n = O$$

$$3) B_{n-1} = (-1)^{n-1} A_n, \text{ if } \|A\| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1}$$

3.2.3. Метод Данилевского

Метод состоит в приведении матрицы к подобной ей форме Фробениуса

$$A_1 = A, A_{k+1} = P_k^{-1} A_k P_k, P_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -a_{1k}^{(k)} a_{k+1,k}^{(k)-1} & & \\ & & \vdots & & \\ & & & a_{k+1,k}^{(k)-1} & \\ & & & \vdots & \ddots \\ & & & & & -a_{nk}^{(k)} a_{k+1,k}^{(k)-1} & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, P_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{1k}^{(k)} & & \\ & & \vdots & & \\ & & & a_{k+1,k}^{(k)} & \\ & & & \vdots & \ddots \\ & & & & & a_{nk}^{(k)} & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, k=2,\dots,n, A_n = F = \begin{bmatrix} & & & & p_n \\ & & & & p_{n-1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & p_1 \end{bmatrix}$$

$$B_k = P_k^{-1} A_k :$$

$$B_{k+1,*}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k)-1} A_{k+1,*}^{(k)}$$

$$B_{i*}^{(k)} = A_{i*}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} B_{k+1,*}^{(k)}, i \neq k+1$$

$$(B_{*k}^{(k)} = e_{k+1})$$

$$A_{k+1} = B_k P_k :$$

$$A_{*k+1}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n a_{ik}^{(k)} B_{*i}^{(k)}$$

$$A_{*j}^{(k+1)} = B_{*j}^{(k)}, i \neq k+1$$

$$(A_{*k}^{(k)} = e_{k+1})$$

3.2.4. Вычисление характеристического многочлена для матриц специального вида

а) $A = S$ – трехдиагональная матрица

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_n & \alpha_n \end{bmatrix}, S_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_k & \alpha_k \end{bmatrix}$$

$$p_k(t) = |S_k - tI_k|, k = 1, 2, \dots, n, S_n = S$$

$$p_0(t) = 1, p_1(t) = \alpha_1 - t, \\ p_k(t) = (\alpha_k - t)p_{k-1}(t) - \beta_k \gamma_k p_{k-2}(t), k = 2, \dots, n$$

б) $A = H$ – матрица Хессенберга (верхняя)

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, H_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{k-1,k} & a_{kk} \end{bmatrix}$$

$$p_k(t) = |H_k - tI_k|, k = 1, 2, \dots, n, H_n$$

$$p_0(t) = 1, p_1(t) = a_{11} - t, \\ p_k(t) = (a_{kk} - t)p_{k-1}(t) - a_{k-1,k} a_{k,k-1} a_{k-1,k-2} p_{k-2}(t) - \dots - a_{1,k} a_{k,k-1} \dots a_{21} p_0(t) \quad k = 2, \dots, n$$

Приведение матрицы к специальному виду ортогональными преобразованиями $QAQ^T = S$ или $QAQ^T = H$

3.2.5. Метод Гивенса

$$B = T_{ij} A \Rightarrow B_{k*} = A_{k*}, k \neq i, j, B_{i*} = cA_{i*} + sA_{j*}, B_{j*} = -sA_{i*} + cA_{j*} \\ C = BT_{ij}^T \Rightarrow C_{*k} = B_{*k}, k \neq i, j, C_{*i} = cB_{*i} + sB_{*j}, C_{*j} = -sB_{*i} + cB_{*j}$$

$$a) A = A^T \quad C = T_{ij} A T_{ij}^T \quad c_{j,i-1} = c_{i-1,j} = 0 \\ b) A \neq A^T \quad C = T_{ij} A T_{ij}^T \quad c_{j,i-1} \neq c_{i-1,j} = 0$$

$$Q = T_{23} T_{24} \dots T_{2n} T_{34} \dots T_{3n} \dots T_{n-1,n}$$

$$0 = c_{j,i-1} = b_{j,i-1} = -sa_{i,i-1} + ca_{j,i-1} \Rightarrow c = \frac{a_{i,i-1}}{\sqrt{a_{i,i-1}^2 + a_{j,i-1}^2}}, s = \frac{a_{j,i-1}}{\sqrt{a_{i,i-1}^2 + a_{j,i-1}^2}}$$

$$QAQ^T = S$$

$$QAQ^T = H^T$$

$$Q = U_1 U_2 \dots U_{n-1}$$

3.2.6. Метод Хаусхольдера а) ... б) ...

3.2.7. Метод Ланцоша

Приведение симметричной матрицы к трехдиагональному виду ортогонализацией последовательности Крылова

$$p_1, \|p_1\|_2 = 1 (p_0 = 0) \quad q_{k+1} = Ap_k - \alpha_k p_k - \beta_k p_{k-1} \quad \alpha_k = (Ap_k, p_k), \beta_{k+1} = \|q_{k+1}\|_2 \quad p_{k+1} = \beta_{k+1}^{-1} q_{k+1}, k = 1, \dots, n (\beta_{n+1} = 0)$$

$$Ap_k = \beta_k p_{k-1} + \alpha_k p_k + \beta_{k+1} p_{k+1} \quad k = 1, \dots, n \Rightarrow S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_n & \alpha_n \\ & & & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}$$

3.3. Итерационные методы решения полной проблемы собственных значений

3.3.1. Использование методов нахождения корней алгебраического многочлена

а) Итерационные методы вычисления корней алгебраического многочлена $\varphi(\lambda)$

см. методы из 2.1 – 2.2

б) Использование рекуррентных формул для матриц специального вида

$A = S$	$p_0(t) = 1, p_1(t) = \alpha_1 - t, p_k(t) = (\alpha_k - t)p_{k-1}(t) - \beta_k \gamma_k p_{k-2}(t), k = 2, \dots, n$	$p_n(t) = (-1)^n \varphi(t)$
	$p'_0(t) = 0, p'_1(t) = -1, p'_k(t) = (\alpha_k - t)p'_{k-1}(t) - \beta_k \gamma_k p'_{k-2}(t) - p_{k-1}(t), k = 2, \dots, n$	$p'_n(t) = (-1)^n \varphi'(t)$
	$p''_0(t) = 0, p''_1(t) = 0, p''_k(t) = (\alpha_k - t)p''_{k-1}(t) - \beta_k \gamma_k p''_{k-2}(t) - 2p'_{k-1}(t), k = 2, \dots, n$	$p''_n(t) = (-1)^n \varphi''(t)$

$A = H$	$p_0(t) = 1, p_1(t) = a_{11} - t, p_k(t) = (a_{kk} - t)p_{k-1}(t) - a_{k-1,k} a_{k,k-1} a_{k-1,k-2} p_{k-2}(t) + \dots + (-1)^{k-1} a_{1,k} a_{k,k-1} \dots a_{21} p_0(t), k = 2, \dots, n$
	$p'_0(t) = 0, p'_1(t) = -1, p'_k(t) = (a_{kk} - t)p'_{k-1}(t) - a_{k-1,k} a_{k,k-1} a_{k-1,k-2} p'_{k-2}(t) + \dots + (-1)^{k-1} a_{1,k} a_{k,k-1} \dots a_{32} p'_1(t) - p_{k-1}(t), k = 2, \dots, n$
	$p''_0(t) = 0, p''_1(t) = 0, p''_k(t) = (a_{kk} - t)p''_{k-1}(t) - a_{k-1,k} a_{k,k-1} a_{k-1,k-2} p''_{k-2}(t) + \dots + (-1)^{k-1} a_{1,k} a_{k,k-1} \dots a_{32} p''_1(t) - 2p'_{k-1}(t), k = 2, \dots, n$

в) Итерационные методы вычисления корней детерминантного уравнения $|D(t)| = 0$

см. методы из 2.1

г) Исчерпывание вычисленных корней

$$\varphi_1(x) = \varphi(t)/(t - \alpha)$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(t)/(t^2 + pt + q)$$

3.3.2. Методы деления спектра (для симметричных трехдиагональных матриц)

Используются свойства последовательности Штурма $p_0(t) = 1, p_1(t) = \alpha_1 - t, p_k(t) = (\alpha_k - t)p_{k-1}(t) - \beta_k \gamma_k p_{k-2}(t), k = 2, \dots, n$

а) обычная проблема собственных значений

$$D(\lambda) = A - \lambda I \quad (A = A^T)$$

перемен знака $p_k(c), k = 1, 2, \dots, n = \# \text{ с.з. } < c$

\Rightarrow применение методов бисекции, ...

б) обобщенная проблема собственных значений

$$D(\lambda) = A - \lambda B \quad (A = A^T, B > 0)$$

$$A - cB = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix} = LDL^T, L (l_{ii} = 1), D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$$

$ D(c) = \prod_{k=1}^n d_k, d_1 = \alpha_1, d_k = \alpha_k - \beta_k^2 / d_{k-1}, k = 2, \dots, n$
отрицательных $d_k, k = 1, 2, \dots, n = \# \text{ с.з. } < c$

\Rightarrow применение методов бисекции, хорд, секущих, ...

3.3.3. Метод Якоби

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{\Lambda} \quad \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{T}_{ij} \mathbf{A}_k \mathbf{T}_{ij}^T \quad \leftrightarrow \text{один шаг} \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{T}_{ij}^T = (\mathbf{T}_{ij} \mathbf{A}) \mathbf{T}_{ij}^T$$

$$n^2(\mathbf{A}) = \sum_{i,j} a_{ij}^2, \quad t^2(\mathbf{A}) = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 = n^2(\mathbf{A}) - \sum_i a_{ii}^2$$

$$n^2(\mathbf{C}) = \sum_{i,j} c_{ij}^2, \quad t^2(\mathbf{C}) = \sum_{i \neq j} c_{ij}^2 = n^2(\mathbf{C}) - \sum_i c_{ii}^2$$

$$n^2(\mathbf{C}) \equiv \|\mathbf{C}\|_E^2 = \text{tr} \mathbf{C}^2 = \text{tr} \mathbf{T}_{ij} \mathbf{A}^2 \mathbf{T}_{ij}^T = \text{tr} \mathbf{A}^2 = \|\mathbf{A}\|_E^2 = n^2(\mathbf{A})$$

$$t^2(\mathbf{C}) - t^2(\mathbf{A}) = \sum_k (a_{kk}^2 - c_{kk}^2) = a_{ii}^2 + a_{jj}^2 - c_{ii}^2 - c_{jj}^2$$

$$\Rightarrow t^2(\mathbf{C}) - t^2(\mathbf{A}) = 2c_{ij}^2 - 2a_{ij}^2 \Leftarrow$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}_{ij} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}}_{ij}^T$$

$$n^2(\tilde{\mathbf{A}}) = a_{ii}^2 + a_{ij}^2 + a_{ji}^2 + a_{jj}^2,$$

$$n^2(\tilde{\mathbf{C}}) = c_{ii}^2 + c_{ij}^2 + c_{ji}^2 + c_{jj}^2,$$

$$n^2(\tilde{\mathbf{C}}) = n^2(\tilde{\mathbf{A}})$$

$$a_{ii}^2 + a_{ij}^2 + a_{ji}^2 + a_{jj}^2 = c_{ii}^2 + c_{ij}^2 + c_{ji}^2 + c_{jj}^2$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_{ij} \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}_{k*} = \mathbf{A}_{k*}, \quad k \neq i, j, \quad \mathbf{B}_{i*} = c\mathbf{A}_{i*} + s\mathbf{A}_{j*}, \quad \mathbf{B}_{j*} = -s\mathbf{A}_{i*} + c\mathbf{A}_{j*}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{T}_{ij}^T \Rightarrow \mathbf{C}_{*k} = \mathbf{B}_{*k}, \quad k \neq i, j, \quad \mathbf{C}_{*i} = c\mathbf{B}_{*i} + s\mathbf{B}_{*j}, \quad \mathbf{C}_{*j} = -s\mathbf{B}_{*i} + c\mathbf{B}_{*j}$$

$$\Rightarrow c_{ji} = c_{ij} = cb_{ji} + sb_{jj} = c(-sa_{ii} + ca_{ji}) + s(-sa_{ji} + ca_{jj}) = (c^2 - s^2)a_{ji} + cs(a_{jj} - a_{ii})$$

$$c_{ji} = c_{ij} = 0 \Rightarrow t^2(\mathbf{C}) - t^2(\mathbf{A}) = -2a_{ij}^2 \Rightarrow a_{ji} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{jj} - a_{ii}) \sin 2\varphi = 0 \Rightarrow \text{tg } 2\varphi = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}$$

а) классический

$$|a_{ij}^{(k)}| = \max_{p \neq q} |a_{pq}^{(k)}|$$

сходимость

$$t^2(\mathbf{A}_k) \leq t^2(\mathbf{A}) \left(1 - \frac{1}{n(n-1)}\right)^k$$

б) циклический

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$j = i+1, \dots, n$$

в) с преградами

$$\omega_1 = \frac{t(\mathbf{A})}{n(n-1)} > \omega_2 > \omega_3 > \dots \geq \varepsilon$$

3.3.4. Уточнение приближений к собственным значениям (после метода Якоби)

$$a_{ij} = \varepsilon \alpha_{ij}, \quad \forall j \neq i$$

\Rightarrow

$$\lambda_i \cong a_{ii} + k_i \varepsilon^2, \quad i = 1, \dots, n$$

$$|\mathbf{A} - (a_{11} + k_1 \varepsilon^2) \mathbf{I}| \cong \begin{vmatrix} -k_1 \varepsilon^2 & \varepsilon \alpha_{12} & \dots & \varepsilon \alpha_{1n} \\ \varepsilon \alpha_{21} & a_{22} - a_{11} & \dots & \varepsilon \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon \alpha_{n1} & \varepsilon \alpha_{n2} & \dots & a_{nn} - a_{11} \end{vmatrix} \approx \varepsilon^2 \begin{vmatrix} -k_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & a_{22} - a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} - a_{11} \end{vmatrix} \cong 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{1j} \alpha_{j1}}{a_{11} - a_{jj}}$$

$$\lambda_i \cong a_{ii} + \sum_{j=i}^n \frac{a_{ij} a_{ji}}{a_{ii} - a_{jj}}$$

3.3.5. LR-алгоритм (Рунтисхаузер)

а) алгоритм без сдвигов $A_1 = A$ $A_k = L_k R_k (l_{ii}^{(k)} = 1) \Rightarrow R_k L_k = A_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots$ ($A_{k+1} = L_k^{-1} A_k L_k = R_k A_k R_k^{-1}$)

if A – простой структуры, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| \Rightarrow r_{ii}^{(k)} \rightarrow \lambda_k$ линейная сходимость $O\left(\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right|^k + \left|\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right|^k\right)$ –

б) модификация со сдвигом (односторонним) (и с понижением порядка)

$A - t_1 I = L_1 R_1$ $R_k L_k - (t_{k+1} - t_k) I = L_{k+1} R_{k+1}, t_{k+1} = t_k + r_{nn}^{(k)}, k = 1, 2, 3, \dots$ $t_{k+1} \rightarrow \lambda_n$ квадратичная сходимость

3.3.6. QR-алгоритм (Френсис, Кублановская В.Н.)

а) алгоритм без сдвигов $A_1 = A$ $A_k Q_k = L_k \Rightarrow Q_k^T L_k = A_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots$ ($A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$)

if A – простой структуры, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| \Rightarrow a_{ii}^{(k)} \rightarrow \lambda_i^2$ линейная (квадратичная if A = A^T) сходимость

б) модификация со сдвигами (двусторонними) (и с понижением порядка)

$(A_k - t_k I) Q_k = L_k, Q_k^T L_k + t_k I = A_{k+1}, t_k = a_{nn}^{(k)}$ $t_{k+1} \rightarrow \lambda_n$ квадратичная (кубическая if A = A^T) сходимость

в) с предварительным приведением к форме Хессенберга

if A = H^T – нижняя (левая), A Q = L $\Rightarrow Q = T_{12}^T T_{23}^T \dots T_{n-1,n}^T \Rightarrow T_{12} T_{23} \dots T_{n-1,n} L$ – нижняя (левая) $\Rightarrow \forall A_k$ – нижние (левые)

3.3.7. Решение обобщенной и полиномиальной регулярных задач

а) Сведение обобщенной задачи к обычной

для регулярных задач $B^{-1} A - \lambda I$ $B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} - \lambda I$ $A^{-1} B - \mu I$ $(A - \alpha B)^{-1} B - \mu I$

б) Решение полной обобщенной задачи

для регулярных и сингулярных задач QZ -алгоритм AB -алгоритм

в) Сведение полиномиальной задачи к обобщенной

$$D(\lambda) = \lambda^s A_s + \lambda^{s-1} A_{s-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0 \Rightarrow \mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -\lambda I & & & A_0 \\ I & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -\lambda I & A_{s-2} \\ & & I & A_s - \lambda A_{s-1} \end{bmatrix}$$

3.4. Методы решения частичной проблемы собственных значений

$$\lambda_i, \mathbf{u}_i, i=1, \dots, p \quad (1 \leq p \ll n)$$

3.4.1. Степенной метод if \mathbf{A} – простой структуры $\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, i=1, 2, \dots, n, |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

а) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

$$\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0} \quad (\mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^2 \mathbf{y}_{k-1} = \dots = \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{y}_0$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^{k+1} \mathbf{u}_i = \alpha_1 \lambda_1 \left(\mathbf{u}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k+1} \mathbf{u}_i \right)$$

if $\alpha_1 \neq 0, u_j^1 \neq 0$

$$\frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^{k+1} u_j^1 (1 + O(|\lambda_2/\lambda_1|^{k+1}))}{\alpha_1 \lambda_1^k u_j^1 (1 + O(|\lambda_2/\lambda_1|^k))} = \lambda_1 (1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right))$$

$\mathbf{y}_{k+1} \xrightarrow{\text{по направлению}} \mathbf{u}_1$

линейная сходимость

нормировка $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1} = \gamma_k^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$

$$\gamma_k = \tilde{y}_j^{(k+1)} \quad (\gamma_k = \|\mathbf{y}_{k+1}\|_\infty)$$

$$\gamma_k = \pm \|\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}\|_2$$

$$\gamma_k = \frac{(\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}, \mathbf{y}_k)}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)}$$

б) $\lambda_1 = \dots = \lambda_p, |\lambda_1| > |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

if $\sum_{i=1}^p \alpha_i u_j^i \neq 0$

$$\frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_1^{k+1} u_j^i (1 + O(|\lambda_{p+1}/\lambda_1|^{k+1}))}{\sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_1^k u_j^i (1 + O(|\lambda_{p+1}/\lambda_1|^k))} = \lambda_1 (1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right))$$

$\mathbf{y}_{k+1} \xrightarrow{\text{по направлению}} \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i$

линейная сходимость

в) $\lambda_1 = -\lambda_2, |\lambda_1| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

if $\alpha_1 u_j^1 + \alpha_2 u_j^2 \neq 0$

$$\frac{y_j^{(2k+2)}}{y_j^{(2k)}} = \frac{\lambda_1^{2k+2} (\alpha_1 u_j^1 + \alpha_2 u_j^2) (1 + O(|\lambda_3/\lambda_1|^{2k+2}))}{\lambda_1^{2k} (\alpha_1 u_j^1 + \alpha_2 u_j^2) (1 + O(|\lambda_3/\lambda_1|^{2k}))} = \lambda_1^2 (1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right))$$

$\mathbf{y}_{k+1} + \lambda_1 \mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{по направлению}} \mathbf{u}_1$

$\mathbf{y}_{k+1} - \lambda_1 \mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{по направлению}} \mathbf{u}_2$

г) $\lambda_{1,2} = r e^{\pm i\varphi} \quad (|\lambda_1| \approx |\lambda_2|), |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1 \lambda_2 = q \quad \alpha_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta} \quad y_j^{(k)} = 2r^k \rho \cos(k\varphi + \theta) + \sum_{i=3}^p \alpha_i \lambda_i^k u_j^i$

$$\begin{aligned} & y_j^{(k+1)} + p y_j^{(k)} + q y_j^{(k-1)} \approx \\ & \approx \alpha_1 u_j^1 \lambda_1^{k-1} (\lambda_1^2 + p \lambda_1 + q) + \alpha_2 u_j^2 \lambda_2^{k-1} (\lambda_2^2 + p \lambda_2 + q) \approx 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y_j^{(k+1)} + p y_j^{(k)} + q y_j^{(k-1)} \approx 0 \\ y_i^{(k+1)} + p y_i^{(k)} + q y_i^{(k-1)} \approx 0 \end{cases}$$

$\mathbf{y}_{k+1} - \lambda_2 \mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{по направлению}} \mathbf{u}_1$

$\mathbf{y}_{k+1} + \lambda_1 \mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{по направлению}} \mathbf{u}_2$

д) Метод следов (идейно близок к степенному методу) $s_k = \text{tr} \mathbf{A}^k, s_{k+1}/s_k \rightarrow \lambda_1$

3.4.2. Метод обратных итераций

а) $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ $\boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}_i = \lambda_i^{-1}\mathbf{u}_i}$ $\boxed{\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}, \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_k}$ $\boxed{k=0,1,2,\dots} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k}$ для пучка $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}$: $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_k}$

б) $|\lambda_1 - \alpha| \leq |\lambda_2 - \alpha| \leq \dots \leq |\lambda_n - \alpha|$ $\boxed{(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_i = (\lambda_i - \alpha)^{-1}\mathbf{u}_i} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k, k=0,1,2,\dots}$ для пучка $\boxed{(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{B})\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_k}$

3.4.3. Метод градиентной релаксации

$$\boxed{\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}, \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \mathbf{B} > 0 \Rightarrow \forall \lambda_i \in \mathbf{R}}$$

$$\boxed{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n}$$

$$\boxed{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \rho(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x})} \text{ - отношение Релея}}$$

$$\boxed{\max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \rho(\mathbf{x}) = \lambda_1, \max_{\mathbf{x} \perp \mathbf{u}_1} \rho(\mathbf{x}) = \lambda_2, \dots, \min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \rho(\mathbf{x}) = \lambda_n}$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{z}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - \rho(\mathbf{x})}{t} = \dots = \frac{2}{(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x})} ((\mathbf{A} - \rho(\mathbf{x})\mathbf{B})\mathbf{x}, \mathbf{z}) \Rightarrow \text{grad} \rho(\mathbf{x}) = \frac{2}{(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x})} (\mathbf{A} - \rho(\mathbf{x})\mathbf{B})\mathbf{x} = \frac{2}{(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x})} \mathbf{r}$$

\mathbf{x} - текущее приближение $\mathbf{r} = (\mathbf{A} - \rho(\mathbf{x})\mathbf{B})\mathbf{x}$ - вектор невязки $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{r}}$ - следующее приближение

$$\begin{matrix} \max_{\alpha} \rho(\mathbf{x}') \\ \min_{\alpha} \rho(\mathbf{x}') \end{matrix} \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} \rho(\mathbf{x}') = 0 \Rightarrow \alpha - \begin{matrix} \text{наибольший } (> 0) \\ \text{наименьший } (< 0) \end{matrix} \text{ корень уравнения } \boxed{at^2 + bt + c = 0}$$

$$\boxed{a = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{r})(\mathbf{A}\mathbf{r}, \mathbf{r}) - (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{r})(\mathbf{B}\mathbf{r}, \mathbf{r})}{(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x})}}$$

$$\boxed{b = (\mathbf{A}\mathbf{r}, \mathbf{r}) - \rho(\mathbf{x})(\mathbf{B}\mathbf{r}, \mathbf{r})}$$

$$\boxed{c = (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{r}) - \rho(\mathbf{x})(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{r}_k; \mathbf{f}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \mathbf{g}_k = \mathbf{B}\mathbf{x}_k, \beta_k = (\mathbf{g}_k, \mathbf{x}_k), \rho_k = \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{x}_k)}{\beta_k}, \mathbf{r}_k = \mathbf{f}_k - \rho_k \mathbf{g}_k, \mathbf{p}_k = \mathbf{A}\mathbf{r}_k, \mathbf{q}_k = \mathbf{B}\mathbf{r}_k,$$

$$\boxed{a_k = \frac{(\mathbf{g}_k, \mathbf{r}_k)(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) - (\mathbf{f}_k, \mathbf{r}_k)(\mathbf{q}_k, \mathbf{r}_k)}{\beta_k}}$$

$$\boxed{b_k = (\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) - \rho_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{r}_k)}$$

$$\boxed{c_k = (\mathbf{f}_k, \mathbf{r}_k) - \rho_k(\mathbf{g}_k, \mathbf{r}_k)}$$

3.4.4. Методы координатной релаксации

$$\boxed{\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}, \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \mathbf{B} > 0}$$

$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_i}$ - следующее приближение

а) $\boxed{\frac{d\rho(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_i)}{d\alpha} = 0} \Rightarrow \boxed{a = \frac{g_i a_{ii} - f_i b_{ii}}{\beta}} \quad \boxed{b = a_{ii} - \rho b_{ii}} \quad \boxed{c = f_i - \rho g_i} \Rightarrow \boxed{\alpha \text{ - корень уравнения } at^2 + bt + c = 0}$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} + \alpha\mathbf{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{g}' = \mathbf{g} + \alpha\mathbf{B}\mathbf{e}_i, \beta' = \beta + \alpha(g_i + g'_i), \rho' = \rho + \frac{\alpha^2}{\beta'} \sqrt{b^2 + 4ac}$$

б) $\boxed{(\mathbf{A} - \rho(\mathbf{x})\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0}}$ - система нелинейных уравнений $\Rightarrow \boxed{b = a_{ii} - \rho b_{ii}} \quad \boxed{c = f_i - \rho g_i} \Rightarrow \boxed{\alpha = -b/c}$

3.4.5. Методы уточнения собственных значений и собственных векторов

а) **Метод обратных итераций** (μ_0 – приближение к собственному значению пучка $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}$, $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$)

– стационарные итерации (метод Виландта)

$$(\mathbf{A} - \mu_0\mathbf{B})\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1} = \gamma_k^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}, \mu_0 + \gamma_k^{-1} \rightarrow \lambda_1, \mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{u}_1, k = 0, 1, \dots$$

– нестационарные итерации (+ модификация P-W)

$$(\mathbf{A} - \mu_k\mathbf{B})\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1} = \gamma_k^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}, \mu_{k+1} = \mu_k + \gamma_k^{-1} \rightarrow \lambda_1, k = 0, 1, 2, \dots$$

– итерации с отношением Релея

$$(\mathbf{A} - \rho_k\mathbf{B})\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1} = \gamma_k^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}, \rho_{k+1} = \rho(\mathbf{y}_{k+1}) \rightarrow \lambda_1, k = 0, 1, 2, \dots$$

б) **Метод Берстоу** (вычисление квадратичного делителя характеристического полинома матрицы \mathbf{A} : см. п/п 2.2.6.б)

в) **Решение нелинейного уравнения** (μ_0 – приближение к собственному значению $\mathbf{D}(\lambda)$)

– решение детерминантного уравнения $|\mathbf{D}(\lambda)| = 0$

– решение уравнения $\sigma_n(\lambda) = 0$ ($\sigma_n(\mu_k)$ – наименьшее сингулярное значение матрицы $\mathbf{D}(\mu_k)$)

– решение уравнения $l_{nn}(\lambda) = 0$ ($l_{nn}(\mu_k)$ – элемент матрицы $\mathbf{L}(\mu_k)$ из нормализованного разложения матрицы $\mathbf{D}(\mu_k)$)

метод Ньютона $\mathbf{D}_k = \mathbf{D}(\mu_k)$ $\mathbf{\Theta}_k \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_k = \mathbf{L}_k$ $\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{\Theta}_k \mathbf{q}_n^{(k)}$ $\mu_{k+1} = \mu_k + x_n^{(k)-1}$ $k = 0, 1, 2, \dots$

3.4.6. Метод одновременных итераций (для пучка $\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}$)

$$\mathbf{U}_1 - \text{блочный } n \times l \text{ с.в.}, \mathbf{\Lambda}_1 - \text{блочное } l \times l \text{ с.з.} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{\Lambda}_1\tilde{\mathbf{u}}_j = \lambda_j\tilde{\mathbf{u}}_j \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{U}_1\tilde{\mathbf{u}}_j) = \lambda_j\mathbf{B}(\mathbf{U}_1\tilde{\mathbf{u}}_j), j = 1, \dots, l$$

– обобщение степенного метода

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_{k+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}\mathbf{\Gamma}_k^{-1}$$

$$\mathbf{Y}_{k+1} \rightarrow \mathbf{U}_1, \mathbf{\Gamma}_k \rightarrow \mathbf{\Lambda}_1, k = 0, 1, 2, \dots$$

– обобщение обратных итераций

$$(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{B})\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_{k+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}\mathbf{\Gamma}_k^{-1}$$

$$\mathbf{Y}_{k+1} \rightarrow \mathbf{U}_1, (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma}_k^{-1}) \rightarrow \mathbf{\Lambda}_1, k = 0, 1, 2, \dots$$

один из способов «нормировки»: $\mathbf{\Gamma}_k = (\mathbf{Y}_k^T \mathbf{Y}_k)^{-1} (\mathbf{Y}_k^T \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1})$

3.4.7. Метод итерации подпространств (методы Ланцоша, Арнольди)

$$\mathbf{p}_1, \|\mathbf{p}_1\|_2 = 1 (\mathbf{p}_0 = \mathbf{0})$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{p}_k - \alpha_k\mathbf{p}_k - \beta_k\mathbf{p}_{k-1}$$

$$\alpha_k = (\mathbf{A}\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k), \beta_{k+1} = \|\mathbf{q}_{k+1}\|_2$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \beta_{k+1}^{-1}\mathbf{q}_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathbf{P}_k = \text{span}\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}, \quad \mathbf{P}_k = [\mathbf{p}_1 \quad \dots \quad \mathbf{p}_k], \quad \mathbf{S}_k = \mathbf{P}_k^T \mathbf{A} \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_k & \\ & & & & \alpha_k \end{bmatrix}, \quad \lambda_j(\mathbf{S}_k) \rightarrow \lambda_j(\mathbf{A}), \quad k = 1, 2, 3, \dots (\ll n)$$

3.5. Методы исчерпывания и понижения размеров

3.5.1. Методы исчерпывания

а) Метод Хотеллинга исчерпывания собственного значения матрицы и пучка

$$\begin{array}{|l} \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{B} \end{array} \quad i=1,2,\dots,n \quad \mathbf{v}_1^T \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{B} \quad \begin{array}{|l} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{A}_1 = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{B} \end{array} \quad i=2,\dots,n \quad \begin{array}{|l} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}^T \end{array} \quad \begin{array}{|l} (\lambda_1 \rightarrow 0) \\ (\lambda_1 \rightarrow \alpha) \end{array}$$

б) Метод Виландта исчерпывания собственного значения матрицы и пучка

$$\begin{array}{|l} \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{B} \end{array} \quad i=1,2,\dots,n \quad \mathbf{z}_1^T \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \lambda_1 \mathbf{z}_1^T \mathbf{B} \quad \begin{array}{|l} \mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}_i \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{A}_1 = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{B} \end{array} \quad i=2,\dots,n \quad \begin{array}{|l} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{v}}_1^T \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}^T \end{array} \quad \begin{array}{|l} (\lambda_1 \rightarrow 0) \\ (\lambda_1 \rightarrow \alpha) \end{array}$$

в) Обобщения методов Хотеллинга и Виландта исчерпывания блочного собственного значения матрицы и пучка

г) Обобщения методов Хотеллинга и Виландта для полиномиальной задачи

3.5.2. Понижение размеров

а) Понижение размеров матрицы с исчерпыванием одного собственного значения

$$\begin{array}{|l} \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \\ i=1,2,\dots,n \end{array} \quad \mathbf{H}\mathbf{u}_1 = \gamma \mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{P} \\ \mathbf{0}^T & \hat{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{|l} \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{u}}_i \\ i=2,\dots,n \end{array} \Rightarrow \mathbf{u}_i = \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix}$$

Матрица \mathbf{H} может быть вычислена как матрица отражения или произведение матриц вращения

$$\mathbf{Q}\mathbf{u}_1 = \alpha \mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{Q}$$

б) Понижение размеров матрицы с исчерпыванием блочного собственного значения

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{A}_1 \quad \mathbf{H}\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{P} \\ \mathbf{O} & \hat{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{|l} \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{u}}_i \\ i=2,\dots,n \end{array} \Rightarrow \mathbf{u}_i = \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix}$$

Матрица \mathbf{H} может быть вычислена нормализованным процессом разложения

$$\mathbf{Q}\mathbf{U}_1 \mathbf{\Theta} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_0 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{Q}$$

в) Понижение размеров пучка матриц