Тема: Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферических координатах. Сферические и шаровые функции Лапласа.

- При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого [illegible]ется уравнение Лапласа.
- $\Delta\psi = 0.$
- Функция *ψ* называется гармонической в области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяют уравнению Лапласа.
- Пример - задача, приводящая к уравнению Лапласа - это стационарное тепловое поле.

- Если тепловое поле нестационарно, то задачу о температуре такого поля мы уже ре

$$\frac{1}{a^2}\frac{d\psi}{dt} = \Delta\psi, \qquad (a^2 = \frac{k}{C_p\rho})$$

- Если процесс стационарный, то распределение температуры не меняется с течением времени,и, следовательно, о Лапласа.

$\Delta\psi = 0.$ (1) Δ – оператор Лапласа.

- к тепла, то

(2) $\Delta\psi = -f, \qquad$ где $f = \dfrac{F}{k}$;

где F – плотность тепловых источников;

a, k – коэффициенты теплопроводности.

- Неоднородное уравнение Лапласа (2) часто называют уравнением Пуассона.

- Уравнение Лапласа - уравнение эллиптического типа; Оно может быть одно 1-,2- и трехмерным.
- Функция $\psi(x,y,z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется <u>гармоническо</u> $\psi(x,y,z)$
- Пусть функция определена в области V, границей которой является замкнутая поверхность S.
- Для трехмерного уравнения Лапласа составятся следующие краевые задачи.
- <u>1.Задача 1 (задача Дирихле)</u>: найти функцию $\psi(x,y,z)$ удовлетворяющую внутри области V уравнению Лапласа (1) и на границе S области V краевом(1) $\psi(x,y,z)|_S = f(x,y,z),$ где $f(x,y,z)$
- - это известная функция определенная на поверхности S.

- 2. задача Неймана: найти функцию, удовлетворяющую внутри области в уравнению Лапласа 1 и на границе S области V краевому условию

$$\left.\frac{d\psi(x,y,z)}{dn}\right|_S = f(x,y,z), \qquad \text{где } \frac{d\psi(x,y,z)}{dn}$$

  - нормальная производная функции $\psi(x,y,z)$, то есть производная, взятая по направлению внешней нормали к поверхности S. В текущей точке M(x,y,z); f(x,y,z) - известна функция, определенная на поверхности S.
- 3. <u>Задача 3</u>. Найти функцию, удовлетворяющую внутри области V уравнению Лапласа (1) и на границе S области

$$h\psi(x,y,z) + k\left.\frac{d\psi(x,y,z)}{dn}\right|_S = f(x,y,z),$$

- где h и k - некоторые постоянные; f -

- Так как во всех трёх задачах требуется, чтобы искомая функция удовлетворяла уравнению Лапласа внутри области V, то каждая из них называется внутренней краевой задачей.
- Также можно сформулировать и внешние краевые задачи для трехмерного 2- и 1-мерного уравнений Лапласа.
- Рассмотрим ряд специальных функций, применяемых при решении сформулированных задач.
- Решим уравнение Лапласа (1) в сферических координатах для краевой задачи Дирихле.
- Общее выражение для уравнения Лапласа

$$(1)\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{d\psi}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\equiv 0$$

- Решение ищем в виде метода Фурье (разделения переменных) в сферических координатах для краевой

$$(2)\ \ \psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\cdot \Upsilon(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot 2r\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1\cdot\cos\theta}{r^2\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1\cdot\sin\theta}{r^2\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0 \text{ или}$$

$$(1')\ \ \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0$$

- Подставляя (2) в получим следующее

$$R''\Upsilon + \frac{2}{r}R'\Upsilon + \frac{\cot\theta}{r^2}R\Upsilon' + \frac{1}{r^2}R\Upsilon'' + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}R\Upsilon'' \equiv 0$$

- Тогда для R(r) и получаем соответствующие уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ \text{(шар)}$$

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0 \ \ (2) \ - \ \text{Уравнение Эйлера}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Upsilon}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\varphi^2} + \lambda\Upsilon \equiv 0,$$

- где λ - параметр разделения.
- Тогда $\Delta_{\theta,\varphi}\Upsilon(\theta,\varphi) = -\lambda\Upsilon(\theta,\varphi)$ (3) - сферические функции.

- Если теперь ограниченные решения (3) находить в кла $\Upsilon(\theta,\varphi) = \Psi(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$ $\Psi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, то для функций , получим соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \left(\lambda - \dfrac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Psi \equiv 0 \quad (4) \\ \Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0 \quad (5), \text{где } \mu - \text{параметр разделения} \end{cases}$$

- Уравнения (2), (4) и (5) соответствуют уравнению Лапласа (1), а уравнения (4) и (5) соответствуют также уравнению (3).
- Каждое из них является однородным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, причём коэффициенты уравнений (2) и (3) являются переменными.

- Уравнение (5), поскольку $\Phi(\varphi)$ - периодическая функция, является гармонической, поэтому $\mu = n^2$, где $n \in \mathbb{Z}$ (имеет решения при целом μ).
- При этих μ линейно независимыми решениями уравнения (5) являются функции $\cos n\varphi, \sin n\varphi$.
- Если в уравнении $y = \Psi(\mathrm{x})$, $x = \cos\theta, \mu = n^2$, то получим уравнение

$$(6)\quad (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(\lambda - \frac{n^2}{(1 - x^2)}\right)y = 0$$

- Уравнение (6) называется обобщенным уравнением Лежандра ... перепишется в виде

$$(7)\quad (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y \equiv 0$$

- (7) - уравнение Лежандра

- 2.Так как нас интересует только угловая часть $\Upsilon(\theta, \varphi)$ решения уравнения Лапласа, то запишем его в декартовой системе координат так:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0$$

- Перейдем к комплексным переменным

$$\begin{cases} \eta = x + iy \\ \xi = x - iy \\ z = z \end{cases}$$

- В частности $\Upsilon(\theta, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\Upsilon(\theta, \varphi + 2\pi) = \Upsilon(\theta, \varphi)$$

$$|\Upsilon(0, \varphi)| < \infty, \qquad |\Upsilon(\pi, \varphi)| < \infty \quad (5')$$

- Ограниченные решения уравнения $\Upsilon(\theta, \varphi)$, обладающие непрерывными до второго порядка производными, называются <u>сферическими функциями</u>.

- В сферических координатах: $\begin{matrix} x = r \\ y = \theta \\ z = \varphi \end{matrix}$ $\begin{cases} x = r \cdot cos\varphi \cdot sin\theta \\ y = r \cdot sin\varphi \cdot sin\theta \\ z = r \cdot cos\theta \end{cases}$
- Тогда

$$\eta = x - iy = r \cdot cos\varphi \cdot sin\theta + ir \cdot sin\varphi \cdot sin\theta$$

$$= r \cdot sin\theta(cos\varphi + isin\varphi) = r \cdot sin\theta \cdot e^{-i\varphi} \quad (8)$$

$$f = x - iy = r \cdot sin\theta \cdot e^{-i\varphi}$$

$$Z = rcos\theta$$

- В новых переменных $\eta = x + iy,\ \xi = x - iy$

$$\eta + \xi = 2x \Rightarrow x = \frac{\eta + \xi}{2}$$

$$\eta - \xi = x + iy - x + iy = 2iy \Rightarrow y = \frac{\eta - \xi}{2i}$$

- Тогда уравнение Лаплас $\Delta\psi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0$
- приводится к следующему каноническому виду

$$4\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \quad (9)$$

- Рассмотрим теперь частные решения уравнения (9) в виде однородных полиномов от независимых перемен η, ξ, z , то есть в виде поли $\psi_l(\eta, \xi, z) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\eta^\alpha \xi^\beta z^\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = l$
- Тогда общее выражение для полинома с учётом того, что , запишется в виде:

$$\psi_l(\eta, \xi, z) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} r^\alpha (\sin\theta)^\alpha e^{i\alpha\varphi} r^\beta (\sin\theta)^\beta e^{-i\beta\varphi} r^\gamma (\cos\theta)^\gamma$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} (\sin\theta)^{\alpha+\beta} (\cos\theta)^\gamma e^{i(\alpha-\beta)\varphi} = r^l \Upsilon(\theta, \varphi) \quad (10)$$

- Здесь мы обозначили условную часть полинома через $\Upsilon(\theta, \varphi)$.

- Подставим полином (10) в уравнении Лапласа в сферических координатах (1):

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^l \Upsilon(\theta,\varphi)\right) = l\Upsilon(\theta,\varphi) r^{l-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi_l}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 l r^{l-1} \Upsilon(\theta,\varphi)\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(l r^{l+1} \Upsilon(\theta,\varphi)\right)$$
$$= l(l+1)\Upsilon(\theta,\varphi) r^l.$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{d\psi_l}{dr}\right) = \frac{1}{r^2} l(l+1)\Upsilon(\theta,\varphi) r^l = l(l+1) r^{l-2}\Upsilon(\theta,\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{d\psi_l}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\psi_l = 0 - (\text{уравнение Лапласа } \Delta_{\theta,\varphi}\psi_l$$
$$= r^l\, \Delta_{\theta,\varphi}\Upsilon(\theta,\varphi).$$

$$l(l+1) r^{l-2}\Upsilon(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2} r^l \Delta_{\theta,\varphi}\Upsilon(\theta,\varphi) = 0 \text{ или}$$

$$l(l+1) r^{l-2}\Upsilon(\theta,\varphi) + r^{l-2}\Delta_{\theta,\varphi}\Upsilon(\theta,\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}\Upsilon(\theta,\varphi) = -\frac{l(l+1)\Upsilon(\theta,\varphi) r^{l-2}}{r^{l-2}} \text{ или}$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}\Upsilon(\theta,\varphi) = -l(l+1)\Upsilon(\theta,\varphi) \quad (11)$$

- 3.Сравним уравнения (11) и (3). $\Delta_{\theta,\varphi}\Upsilon(\theta,\varphi) = -\lambda\Upsilon(\theta,\varphi)$ (3)
- Они совпадают, есл $-\lambda = -l(l+1)$ ил $\boxed{\lambda = l(l+1)}$ (12), то есть нужные нам функци $\Upsilon(\theta,\varphi)$ представляют собой угловую часть однородных полиномов, являющихся решениями уравнения Лапласа. (Частный случай эти $l = 0,1,2,3$ полиномов для найдены выше).
- Чтобы получить угловые части, достаточно перейти к сферическим координатам и положи $r = 1$ или разделить (3) r^lа .
- Частные решения однородного дифференциального уравнения определены с точностью да произвольного постоянного множителя, т.к если есть решение его, то и - тоже решение. Выбор этого множителя называется нормировкой функции .
- В квантовой механике условия нормировки определяется физическим смыслом функции, а именно: решение уравнения Шрёдингера (волновая функция) обязательно должна удовлетворять $\int_V |\psi|^2 dV = 1$, где $|\psi|^2 = \psi^*\psi$,

- ψ^* комплексно-сопряженная функция; если интегрирование производится по всей области изменения независимых переменных.

- Тогда для нашей задачи, решен $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\cdot\Upsilon(\theta,\varphi)$ и кроме того $dV = r^2 \cdot \sin\theta\, d\theta d\varphi$ (в сферических координатах), условия записывается в виде

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\Upsilon(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = 1.$$

- Отсюда получаем, ч $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\Upsilon(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = 1$ и
- $\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = 1$ (13),
- т.к. значения интегралов по различным независимым переменным никак между собой не связаны. Такая нормировка сферических функций общепринята.

Непрерывные в област $0 \le \theta \le \pi$ $0 \le \varphi \le 2\pi$ решение уравнения (11) или (3 $\Upsilon(\theta,\varphi + 2\pi) = \Upsilon(\theta,\varphi)$

называются сферическими функциями.

- 4. Выпишем теперь в явном виде найденные выше сферические функции. Как видно из формулы (1($\Upsilon(\theta, \varphi)$ исимость от азимутального угла опе $e^{im\varphi}$ еляе $m = \alpha - \beta$ множителем , где α це β ое число, так как по определе m ин l и - целые числа. $: \Upsilon_{lm}$
- Значени $l = 0; m = 0, \Upsilon_{00} = C.$ зываются в виде индексов
- а) Пусть

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\Upsilon(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = C^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta d\varphi = 1$$ лучаем

$$-C^2 \cos\theta \cdot 2\pi|_0^{\pi} = 1 \Rightarrow -C^2 \left(\cos\pi - cos0°\right) \cdot 2\pi = 1.$$

$$-C^2(-2) \cdot 2\pi = 1, \qquad C^2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\boxed{\Upsilon_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}}$$

- Следовательно

- б) Пусть $l = 0; m = 1$. Тогда $\psi_1(r,\theta,\varphi) = r^l \cdot \Upsilon(\theta,\varphi) \Rightarrow$

$$\psi_1(r,\theta,\varphi) = r^1 \cdot \Upsilon_{11}(\theta,\varphi) \Rightarrow \Upsilon_{11} = \frac{\psi_1(r,\theta,\varphi)}{r} = \frac{a_1\eta}{r}$$

- (т.к. $\psi_1 = \frac{a_{11}\eta}{r} = C_{11}\frac{\eta}{r} = C_{11}\frac{r\sin\theta \cdot e^{i\varphi}}{r} = C_{11}\sin\theta \cdot e^{i\varphi}$,
- т.к. $\eta = r\sin\theta \cdot e^{i\varphi}$)
- Из условия нормировки $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\Upsilon(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = 1 \Rightarrow$

$$C_{11}^2 \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \cdot \sin\theta \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi$$

- т.к. $\int \sin^2\theta \cdot \sin\theta d\theta = \int -(1-\cos^2\theta) d(cos\theta) = \int (\cos^2\theta d(cos\theta)$

$$-\int d(cos\theta) = \left(\frac{\cos^3\theta}{3} - cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow C_{11}^2 \frac{4}{3} 2\pi = 1 \Rightarrow C_{11}^2 = \frac{3}{8\pi} \Rightarrow C_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}$. Тогда $\boxed{\Upsilon_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin\theta \cdot e^{i\varphi}}$

- Аналогично получается все остальные функции, которые запишем в виде таблицы

	0	1	2	3
0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cdot cos\theta;$ a, z	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\cdot(3\cos^2\theta-1);$ $\eta\xi-2z^2$	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\cdot(5\cos^2\theta-3)cos\theta;$ $z^3-\frac{3}{2}$ $\eta\xi z$
±1	-	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cdot sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi}$ $a_1\eta; a_2\xi$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cdot sin\theta\cdot cos\theta\cdot e^{\pm i\varphi}$ $\eta z, \xi z$	$\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\cdot(5\cos^2\theta-1)sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi}$ $\eta^2 z-4z^2\eta$ $\xi^2\eta-4z^2\xi$
±2	-	-	$\sqrt{\frac{25}{32\pi}}\cdot\sin^2\theta\cdot e^{\pm i2\varphi}$ $\eta^2\ \xi^2$	$\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\cdot\sin^2\theta\ cos\theta\cdot e^{\pm i2\varphi}$ $\eta^2 z,\ \xi^2 z$
±3	-	-		$\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\cdot\sin^3\theta\cdot e^{\pm 3i\varphi}$ $\eta^3\ \xi^3$

- Из выше приведённых рассуждений следует, что уравнение (3) для фун $\Upsilon(\theta, \varphi)$ имеет реше $\lambda = l(l+1)$ и $l = 0,1,2, \dots,$,
- причём для каждого значени l имеет $2l + 1$ линейно независимых решений, соответствующих различны $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \pm l$ сла .

l

- В квантовой механике называется <u>орбитальным квантовым числом</u>, Та e^- как через него выражается момент импульса частицы (например, в атоме).

l m

- Конечно, сферические функции применяются и в других разделах физики; тогда и - просто параметры, которые принимают целые значения.

- 4. Приведем без вывода общую формулу, с помощью которой можно получить сферическую функци l о с m

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\cdot P_{l,m}(\cos\theta)\cdot e^{im\varphi} \qquad (14)$$

$$P_{l,m}(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}\cdot(x^2-1)^l;\ \ x=\cos\theta$$

- Где
- Отметим, что из условия нормировки нормировочные положительные множители опре $C_{11}^2 = \frac{3}{8\pi}$ ется с точностью до зна $C_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}$ например), следовательно, и т.д.). Мы выбрали их так чтобы

$$P_{l,|m|} = P_{l,-|m|}$$

- Иногда в квантовой механике принимают следующие определ
- $P_{l,-|m|} = (-1)^{|m|} \cdot P_{l,|m|}$ и $\Upsilon_{l,m} = \delta_m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \cdot \mathrm{P}_{l,m}$
- И $\delta_m = (-1)^m$ при $m \geq 0$, $,\delta_m = 1$ при $m < 0$.
- 6. При $\lambda = l(l+1), l = 0,1,2,\dots,$, частными решениями уравнения (2 $r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$ являются функции
- $R_1(r) = r^l;\ R_2(r) = \frac{1}{r^{l+1}}.$

$$r^l \cdot \Upsilon_l(\theta,\varphi), \frac{1}{r^{l+1}} \Upsilon_l(\theta,\varphi)$$

- Функции называют <u>шаровыми функциями Лапласа $l-\text{го}$ порядка</u>. Они являются частными решениями уравнения Лапласа.
- Внутренние шаровые функции Лапласа являются однородными гармоническими многочленами l-ой степени по переменным x, y,