

## **ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ**

### **Явление электромагнитной индукции**

*Явление электромагнитной индукции* (открыто М. Фарадеем в 1831 г.) состоит в том, что **при всяком изменении магнитного потока через проводящий контур, в нем возникает ЭДС индукции.**

Опыт показывает, что абсолютное значение ЭДС индукции равно модулю скорости изменения магнитного потока через проводящий контур. Если контур замкнут, то ЭДС индукции вызывает в нем индукционный ток. В незамкнутом контуре индукционный ток возникает, если магнитный поток через проводящий контур, изменяется с переменной скоростью, т. е. когда  $\frac{d\Phi}{dt} \neq \text{const}$ . Изменение магнитного потока через проводящий контур может быть обусловлено изменением пронизывающего контур магнитного поля, изменением формы контура и изменением положения контура в магнитном поле.

Э. Х. Ленц установил правило, согласно которому **индукционный ток всегда имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток через замкнутый контур, противодействует изменению (увеличению или уменьшению) внешнего магнитного потока**. Таким образом, знаки ЭДС индукции и скорости изменения магнитного потока противоположны:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

## Самоиндукция

Ток, текущий в цепи, создает магнитное поле, магнитный поток которого через поверхность, опирающуюся на контур цепи, в неферромагнитной среде пропорционален этому току (это следует из закона Био-Савара-Лапласа и из определения магнитного потока):

$$\Phi = Li \quad (2)$$

где  $L$  – коэффициент пропорциональности, называемый *индуктивностью цепи*.

Индуктивность зависит от формы, размеров цепи, магнитной проницаемости среды и не зависит (в отсутствие ферромагнетиков) от тока в цепи:

Индуктивность длинного соленоида (катушки с сердечником из ферромагнетика) равна

$$L = \frac{\mu_0 \mu n^2 S}{l} \quad (3)$$

Явление самоиндукции заключается в возникновении дополнительной ЭДС (ЭДС самоиндукции) и обусловленного ею тока (тока самоиндукции) в цепи при изменении основного тока в цепи.

ЭДС самоиндукции зависит от скорости изменения основного тока и, следовательно, от скорости изменения созданного им магнитного потока:

$$\varepsilon_{is} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (Li) \quad (4)$$

При  $L = const$  (контур цепи жесткий, отсутствуют ферромагнетики) и  $i = i(t)$

$$\varepsilon_{is} = - \frac{d\Phi}{dt} = - L \frac{d(i(t))}{dt} \quad (5)$$

Если одновременно изменяется и сила основного тока и индуктивность контура, то ЭДС самоиндукции равна

$$\varepsilon_{is} = - \left( L \frac{\partial i}{\partial t} + i \frac{\partial L}{\partial t} \right) \quad (6)$$

Самоиндукция в электромагнетизме играет такую же роль, как и инерция в механике. Вследствие самоиндукции установление и исчезновение тока в цепи, а также любое его изменение происходит не мгновенно, а постепенно.

## Взаимная индукция

Рассмотрим два расположенных рядом проводящих контура 1 и 2 (рис. 1). При наличии тока в контуре 2 ( $i_2$ ) и при соответствующем взаимном расположении контуров, контур 1 будет пронизываться некоторым магнитным потоком  $\Phi_{12}$ , называемым *потокосцеплением взаимной индукции*.

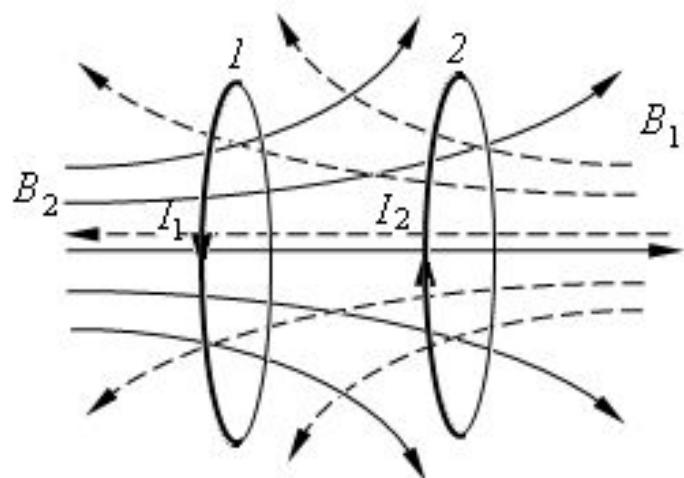


Рис. 1

Поле, создающее этот поток, изображено на рисунке пунктирными линиями. Поток тем больше, чем больше индукция  $B_2$ , создаваемая током  $i_2$  в том месте, где находится контур 1. В вакууме, а также в неферромагнитной среде  $B_2 \sim i_2$ .

Следовательно, поток вектора магнитной индукции через первый контур, созданный током  $i_2$  второго контура

$$\Phi_{12} = L_{12} i_2 \quad (7)$$

Аналогично поток, создаваемый током  $i_1$  и через поверхность контура 2, пропорционален току  $i_1$ :

$$\Phi_{21} = L_{21} i_1 \quad (8)$$

**Таким образом, потокосцепление взаимной индукции – потокосцепление одного контура, обусловленное током в другом контуре.** Если потоки  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_{21}$  существуют, то говорят, что между контурами существует магнитная связь. Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются взаимной индуктивностью цепей.

**Взаимная индуктивность – физическая величина, характеризующая свойство двух (или более) цепей образовывать общие потокосцепления, когда по одной из них течет ток.** Взаимная индуктивность  $L_{21}$  численно равна магнитному потоку, сцепленному с контуром 2 при единичном токе в контуре 1. Взаимная индуктивность  $L_{12}$  численно равна магнитному потоку, сцепленному с контуром 1 при единичном токе в цепи 2. Взаимная индуктивность зависит от формы, размеров и относительного расположения контуров и магнитной проницаемости среды. Можно показать, что  $L_{12} = L_{21}$ .

**Явление взаимной индукции заключается в возникновении ЭДС в контуре при изменении потокосцепления взаимной индукции этого контура.**

Пусть в контуре 2 (см. рис. 1) течет ток. При наличии магнитной связи между контурами 1 и 2 с контуром 1 сцеплен магнитный поток взаимной индукции  $\Phi_{12} = L_{12}i_2$ . При изменении этого потока в контуре 1 возникает ЭДС:

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} L_{12}i_2 \quad (9)$$

Изменение потока  $\Phi_{12}$  может быть обусловлено изменением тока  $i_2$  (при  $L_{12} = \text{const}$ ), изменением взаимной индуктивности контуров  $L_{12}$  (при  $i_2 = \text{const}$ ) и, наконец, одновременным изменением  $i_2$  и  $L_{12}$ . В общем случае ЭДС взаимной индукции в контуре 1 равна:

$$\varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{\partial i_2}{\partial t} + i_2 \frac{L_{12}}{\partial t} \quad (10)$$

Аналогично при наличии в контуре 1 тока в контуре 2 возникает ЭДС, если этот ток изменяется или изменяется взаимная индуктивность.

## Работа по перемещению контура с током в магнитном поле

При перемещении прямолинейного проводника длиной  $l$  с током  $I$  на расстояние  $dr$  в направлении, перпендикулярном к однородному магнитному полю (рис. 2), под действием силы  $\vec{F}$  совершается работа, равная

$$dA = F dr \cos 0 = IlB dr \cos 0 \quad (11)$$

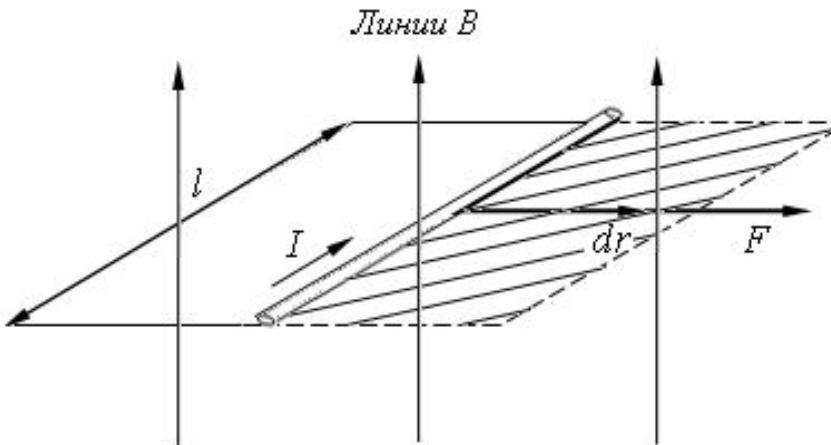


Рис. 2

Произведение  $ldr = dS$  – площадь, которую «заметает» проводник при своем движении. Величина  $BdS \cos 0 = d\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий эту площадь. Следовательно,

$$dA = Id\Phi \quad (12)$$

Таким образом, элементарная работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле, равна произведению тока в проводнике  $I$  на магнитный ток  $d\Phi$ , пронизывающий площадь, которую «заметает» проводник при своем движении. При перемещении проводника на конечное расстояние работа равна

$$A_{12} = \int Id\Phi = I\Delta\Phi \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) справедливы в самом общем случае, когда проводник не прямолинейный, а магнитное поле неоднородно. Работа, совершаемая силами магнитного поля при перемещении замкнутого контура с током, также равна произведению тока в контуре на приращение магнитного потока сквозь поверхность, опирающуюся на контур.

**Магнитный момент кругового тока  $p_m$  равен произведению силы тока  $I$ , протекающему в контуре, на площадь  $S$  контура:**

$$p_m = IS$$

Кроме силы тока  $I$  и площади  $S$  контур характеризуется также ориентацией в пространстве. Поэтому магнитному моменту  $p_m$  приписывают направление, совпадающее с направлением положительной нормали  $\vec{n}$ :

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

Пусть магнитный момент тока в рамке  $\vec{p}_m$  образует с направлением магнитного поля  $\vec{B}$  угол  $\alpha$  (рис. 3).

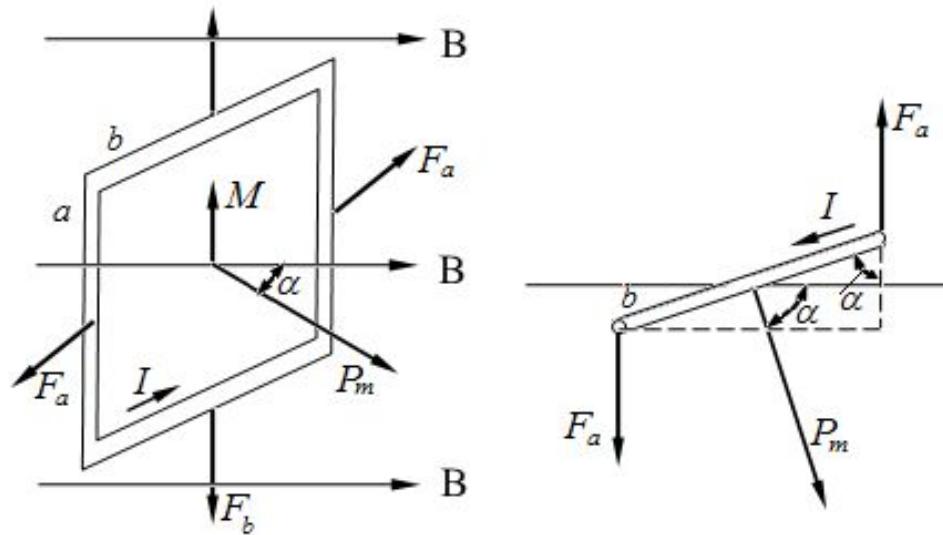


Рис. 3

Силы, действующие на стороны  $b$  рамки, равны по модулю, противоположны по направлению и лежат в плоскости рамки. Эти силы взаимно уравновешиваются. Силы, действующие на стороны  $a$ , образуют пару сил. Механический вращательный момент этой пары относительно оси, численно равен:

$$M = 2F_a \frac{b}{2} \sin \alpha$$

Согласно закону Ампера модуль силы  $F_a$  равен

$$F_a = IBa \sin 90^\circ$$

Следовательно,

$$M = IBab \sin \alpha$$

Здесь  $ab = S$  — площадь рамки;  $IS$  — модуль магнитного момента  $p_m$  тока  $I$ .

Таким образом,

$$M = p_m B \sin \alpha$$

Учитывая взаимную ориентацию векторов  $\vec{M}$ ,  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , можно записать в векторном виде выражение для вращательного момента:

$$\vec{M} = ( \vec{p}_m \times \vec{B} )$$

Как видно вращательный момент  $M = 0$  и рамка находится в равновесии, если магнитный момент тока в рамке параллелен или антипараллелен направлению внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  ( $\alpha = 0$  соответствует устойчивому равновесию,  $\alpha = \pi$  – неустойчивому). Можно показать, что это справедливо для плоского контура любой формы.

## Энергия магнитного поля

Энергия магнитного поля  $W$ , созданного током  $i$ , текущим в цепи с индуктивностью  $L$ , равна

$$W = \frac{Li^2}{2} \quad (14)$$

Энергию магнитного поля можно выразить через его характеристики.

$$W = \frac{B^2 V}{2\mu_0 \mu} \quad (15)$$

Магнитное поле длинного соленоида однородно. Следовательно, *плотность энергии этого поля*  $\omega$  (энергия единицы объема) равна

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \quad (16)$$

Формула (16) справедлива для любого поля: и однородного, и неоднородного. Если известна зависимость энергии от координат, то для нахождения энергии магнитного поля, распределенного в объеме  $V$ , нужно вычислить интеграл

$$W = \int \omega dV = \int \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dV$$

## **МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ**

### **Намагничивание вещества. Гипотеза Ампера**

Все вещества, будучи внесенными в магнитное поле, намагничиваются – становятся источниками дополнительного магнитного поля. Магнитное поле  $\vec{B}_0$ , вызывающее процесс намагничивания данного вещества, будем называть *первичным, внешним, намагничающим*.

**Вещества, способные намагничиваться, называются магнетиками.** Так как намагничиваются все без исключения вещества, то все вещества – магнетики.

Внесем какой–либо магнетик во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ . Под действием этого поля как внутри магнетика, так и вне его, возникает дополнительное, *вторичное собственное магнитное поле* вещества  $\vec{B}'$ . Результирующее поле в любой точке равно сумме полей  $\vec{B}_0$  и  $\vec{B}'$ :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (17)$$

При намагничивании магнетика каждый его атом создает магнитное поле так, как если бы в атоме циркулировал некоторый замкнутый ток. Этот элементарный ток Ампер называл *молекулярным током*; мы его будем называть *микротоком*. Магнитное поле микротока можно охарактеризовать магнитным моменте  $\vec{\rho}_m$

$$\vec{\rho}_m = i' \vec{S} \quad (18)$$

где  $i'$  – сила микротока;  $\vec{S}$  – вектор, численно равный площади, охватываемой микротоком, и связанный с направлением микротока правилом правого буравчика.

Магнитные поля микротоков, складываясь, дают результирующее собственное поле вещества  $\vec{B}'$ , магнитные моменты этих токов дают некоторый результирующий магнитный момент. Интенсивность намагничивания вещества характеризует вектор намагченности  $\vec{J}$ .

**Вектор намагченности  $\vec{J}$  – физическая величина, равная магнитному моменту единицы объема вещества.**

Если  $\vec{J}$  всюду одинаков, намагниченность называется однородной, если различен – неоднородной. В случае однородной намагниченности

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{\rho}_m}{\Delta V} \quad (19)$$

где  $\vec{\rho}_m$  – магнитный момент отдельного атома;  $\Delta V$  – объем, по которому производится суммирование всех  $\vec{\rho}_m$ . В случае неоднородной намагниченности

$$\vec{J} = \lim \frac{\sum \vec{\rho}_m}{\Delta V} \quad (20)$$

*Магнетик называется однородным, если его магнитные свойства одинаковы во всех его точках. В противном случае магнетик называется неоднородным.*

*Магнетик называется изотропным, если его магнитные свойства одинаковы по всем направлениям. В противном случае магнетик называется анизотропным.*

Теория и опыт показывают, что в изотропных неферромагнитных магнетиках в не очень сильных полях и при не очень высоких частотах внешнего поля  $\vec{B}_0$  вектор намагниченности  $\vec{J}$  пропорционален  $\vec{B}_0$ :

$$\vec{J} = \chi \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (21)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\chi$  – безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый объемной магнитной восприимчивостью вещества.

Теория и опыт показывают, что

$$\vec{B}' = \chi \vec{B}_0 \quad (22)$$

Тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \chi \vec{B}_0 = (1 + \chi) \vec{B}_0 \quad (23)$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi \quad (24)$$

называется относительной магнитной проницаемостью вещества. Используя обозначение (23) и соотношение (24) можно записать:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0 \quad (25)$$

*Относительная магнитная проницаемость показывает, во сколько раз изменяется магнитное поле в веществе по сравнению с магнитным полем в вакууме:*

$$\mu = \frac{B}{B_0} \quad (24)$$

## Напряженность магнитного поля

Одним из фундаментальных положений электромагнетизма является положение о том, что магнитное поле создается любыми токами – как макроскопическими, так и микроскопическими. Следовательно, циркуляция вектора  $\vec{B}$  в веществе пропорциональна сумме макро-  $(\sum I_i)$  и микротоков  $\sum i'$ , охватываемых контуром, по которому берется циркуляция:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i + \mu_0 \sum i' \quad (25)$$

Для того чтобы найти циркуляцию вектора  $\vec{B}$ , нужно знать сумму микротоков, которая в свою очередь зависит от  $\vec{B}$ . Это затруднение можно обойти путем нахождения вспомогательной величины, циркуляция которой определяется лишь суммой микротоков.

Выберем внутри намагниченного вещества произвольный замкнутый контур  $L$ . При нахождении циркуляции  $\vec{B}$  по этому контуру в сумму микротоков должны войти те микротоки, которые «нанизываются» на контур обхода (только эти токи пронизывают поверхность, ограниченную контуром  $L$ , один раз) и поэтому дают некоторый суммарный микроток. Все остальные микротоки, пересекающиеся с этой поверхностью, пронизывают ее дважды – один раз в одном направлении, другой раз в другом – и поэтому не дают вклада в  $\Gamma$ .

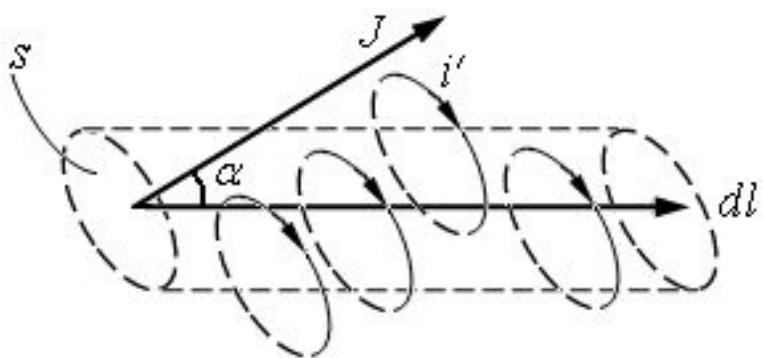


Рис. 4

Подсчитаем число микротоков, «нанизывающихся» на произвольный элемент  $dl$  контура  $L$ . Пусть  $i'$  – сила микротока,  $S$  – площадь, которую он охватывает,  $\alpha$  – угол между  $dl$  и намагниченностью  $J$ .

Из рисунка 4 видно, что на вектор  $dl$  «нанизываются» все микротоки, центры которых лежат внутри наклонного цилиндра объемом  $dV = Sdl \cos \alpha$ . Если  $n$  – число микротоков в единице объема магнетика, то число микротоков, попадающих в этот цилиндр, равно

$$ndV = nSdl \cos \alpha$$

а суммарный ток, связанный с  $dl$ , равен  $i' Sndl \cos \alpha$ . Произведение  $i' S$  есть модуль магнитного момента, создаваемого микротоком  $i'$ ; произведение  $i' Sn = J$  – модуль намагниченности  $J$ :

$$i' Sn = J$$

Следовательно, суммарный микроток, связанный с элементом  $dl$  контура обхода, равен

$$i' Sndl \cos \alpha = Jdl \cos \alpha = Jdl$$

Полный микроток  $i'$ , охватываемый всем контуром  $L$ , равен

$$i' = \int_L Jdl \quad (26)$$

Таким образом, *суммарный микроток, охватываемый произвольным замкнутым контуром  $L$ , равен циркуляции вектора намагниченности, взятой по этому же контуру.*

Подставим (26) в (25):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I + \mu_0 \oint_L \vec{J} d\vec{l}$$

Разделим обе части этого равенства на  $\mu_0$  и перенесем слагаемое  $\oint_L \vec{J} d\vec{l}$  в левую часть:

$$\oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum I \quad (27)$$

Можно ввести еще одну характеристику магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (28)$$

**Величина  $\vec{H}$  называется напряженностью магнитного поля.**

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (29)$$

Если макроскопические токи распределены в пространстве с переменной плотностью  $j$ , то сумма  $\sum I$  заменяется интегралом  $\oint_S \vec{j} d\vec{S}$ , где  $S$  – произвольная поверхность, опирающаяся на контур, по которому берется циркуляция:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \vec{j} d\vec{S} \quad (30)$$

**Таким образом, циркуляция вектора напряженности магнитного поля, созданного электрическими токами, равна полному макроскопическому току, протекающему через любую поверхность  $S$ , опирающуюся на контур интегрирования. Это утверждение носит название теоремы о циркуляции вектора  $\vec{H}$ .**

Поле  $\vec{H}$  можно изобразить графически – с помощью линий вектора  $\vec{H}$ . Линии  $\vec{H}$  строятся так же, как и линии вектора  $\vec{B}$ .

Итак, для описания магнитного поля вводятся индукция  $\vec{B}$  и напряженность  $\vec{H}$ . Из этих двух характеристик важнейшей характеристикой является  $\vec{B}$ . Введение  $\vec{H}$  связано с тем, что циркуляции  $\vec{H}$  зависит только от макротоков, которые легко измерять. Однако из (29) не следует, что напряженность вообще не зависит от среды (т. е. напряженность в каждой точке поля при наличии среды такая же, как и в ее отсутствие). *От среды не зависит не сама напряженность, а ее интегральная функция – циркуляция  $\vec{H}$ .* Напряженность же в общем случае зависит от среды. Так, в неоднородной среде вектор  $\vec{H}$  зависит от распределения магнитной проницаемости; в ограниченных телах, напряженность зависит от формы и размеров тел.

Только в двух весьма особых случаях  $\vec{H}$  не зависит от среды:

- когда однородная изотропная среда заполняет все пространство, где имеется магнитное поле;
- когда такая среда заполняет область, границы которой нигде не пересекаются с линиями внешнего поля.

В качестве примера рассмотрим бесконечно длинный соленоид. Магнитное поле такого соленоида сосредоточено только внутри соленоида. Если

сердечник в соленоиде отсутствует, то  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ . Заполним весь объем соленоида

однородным изотропным магнетиком. Напряженность поля будет равна

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0 + \vec{B}'}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (31)$$

Но  $\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$ . Подставив это выражение в (31), получим

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}_0. \quad (32)$$

Если однородная изотропная среда заполняет все пространство, где имеется магнитное поле, то напряженность магнитного поля в этой среде  $\vec{H}$  совпадает с напряженностью внешнего поля  $\vec{H}_0$ , т. е. напряженность такова, как если бы вещества вообще не было.

В случае безграничной изотропной неферромагнитной среды связь между индукцией и напряженностью выражается более простой формулой. В такой среде справедливо соотношение

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (33)$$

Следовательно

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (34)$$

## **Границные условия для магнитной индукции и напряженности**

При наличии ограниченных магнетиков важное значение приобретают граничные условия, определяющие поведение векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границах раздела магнетиков. Можно показать, что при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора  $\vec{B}$  и тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  не изменяются; тангенциальная же составляющая вектора  $\vec{B}$  и нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  скачкообразно изменяются – испытывают разрыв. Так как одна из составляющих вектора  $\vec{B}$  и вектора  $\vec{H}$  изменяется, то оба вектора при переходе через границы скачкообразно изменяются и по модулю и по направлению, т. е. и  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  зависят от среды.

Из граничных условий для  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  следует, что на границах магнетиков линии  $\vec{B}$  преломляются, но остаются непрерывными. Линии  $\vec{H}$  – и преломляются и испытывают разрыв (рис. 5).

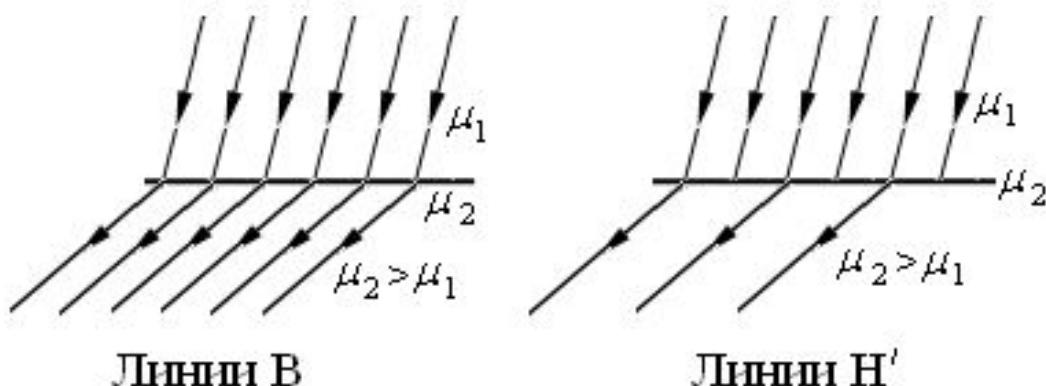


Рис. 5

Часть линий  $\vec{H}$  либо заканчивается, либо начинается на границах магнетиков.