

## Свободные затухающие колебания

В реальных условиях механические колебания всегда происходят в какой-либо среде. Взаимодействие колеблющейся системы со средой приводит к рассеянию (диссипации) энергии колебаний. Колебания при этом затухают.

Например, реальный колебательный контур всегда обладает омическим сопротивлением  $R$ , поэтому в таком контуре электромагнитная энергия, запасенная в начале колебаний, постепенно превращается во внутреннюю энергию контура в соответствии с законом Джоуля-Ленца.

Составим дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний физической величины  $\xi$ :

$$m\ddot{\xi} = F_{\text{к.у.}} + F_{\text{сопр.}} = -k\xi - r\dot{\xi} \quad (1)$$

где  $F_{\text{к.у.}} = -k\xi$  – квазиупругая сила;

$F_{\text{сопр.}} = -r\dot{\xi}$  – сила сопротивления (сила трения) при *небольших скоростях* изменения  $\xi$ , а  $r$  – коэффициент сопротивления.

Приводя (1) к каноническому виду и вводя обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \text{ и } \frac{r}{m} = 2\beta \quad (2)$$

**получим дифференциальное уравнение собственных колебаний при наличии сопротивления, пропорционального скорости:**

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 \quad (3)$$

Как следует из теории дифференциальных уравнений, решение этого уравнения при  $\beta < \omega_0$ , т.е. когда сопротивление мало по сравнению с квазиупругой (восстанавливающей) силой, имеет вид

$$\xi = \xi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (4)$$

где  $\xi_0$  и  $\varphi_0$  – постоянные интегрирования – амплитуда и фаза колебаний в начальный момент времени  $t = 0$ ;

$\omega$  – частота колебаний;

$\beta$  – коэффициент затухания.

Колебания, происходящие по закону (4), называются **затухающими колебаниями**.

Затухающие колебания не являются гармоническими: их амплитуда убывает со временем по экспоненциальному закону

$$\xi = \xi_0 \cdot e^{-\beta t}. \quad (5)$$

График затухающих колебаний приведен на рис. 1. График не выходит за пределы огибающих  $\xi = \xi_0 \cdot e^{-\beta t}$  и  $\xi = -\xi_0 \cdot e^{-\beta t}$ .

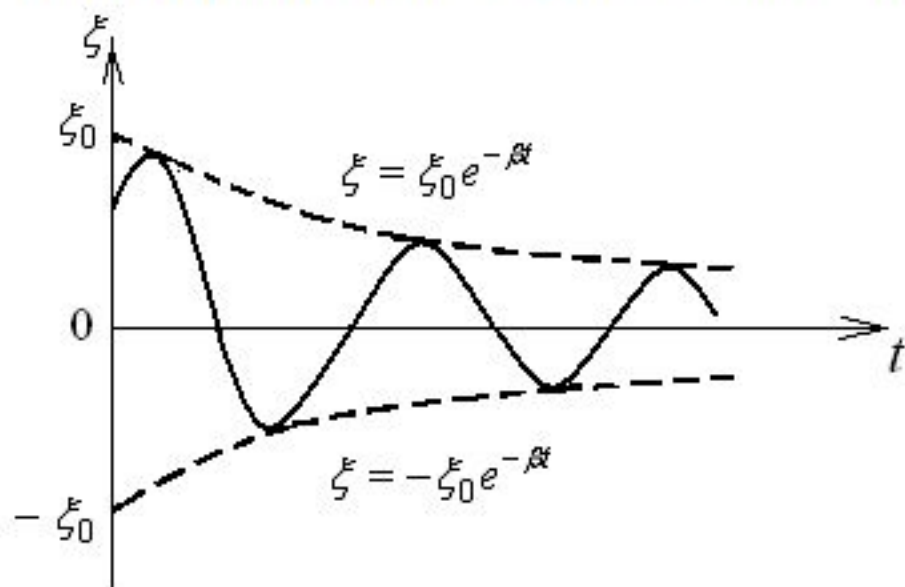


Рис. 1

**Частота собственных затухающих колебаний системы  $\omega$  связана с частотой собственных незатухающих колебаний этой же системы  $\omega_0$  соотношением**

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad (6)$$

Величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (7)$$

называют **условным периодом затухающих колебаний** (условным потому, что такие колебания не являются периодическими).

В случае колебательного контура дифференциальное уравнение (3) и его решение (4) применимо к заряду  $q$ , т.е. под величиной  $\xi$  следует понимать заряд  $q$ . **Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний** будет иметь вид

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (8)$$

где  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  – собственная частота.

Одно из его решений при  $\beta < \omega_0$ , т.е. когда сопротивление мало по сравнению с квазиупругой (восстанавливающей) силой,

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (9)$$

Частоту (6) и период затухающих колебаний (7) в колебательном контуре можно выразить через параметры элементов контура:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{2L}}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{2L}}}. \quad (10)$$

Выражения (9) получены с учетом соответствия физических величин, приведенных в таблице из лекции 12. Так  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , а  $2\beta = \frac{R}{L}$ .

Для характеристики затухающих колебаний используют логарифмический декремент затухания, время релаксации, коэффициент затухания, добротность колебательной системы. Рассмотрим эти характеристики.

Логарифм отношения двух последующих амплитуд называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{\xi_0 e^{-\beta t}}{\xi_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T \quad (11)$$

Время релаксации затухающих колебаний  $\tau$  – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Из условия

$$\frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e$$

находим

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad \text{или} \quad \beta = \frac{1}{\tau} \quad (12)$$

Таким образом, коэффициент затухания – это величина, обратная времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Подставим выражение для  $\beta$  в (11), получим  $\lambda = \frac{T}{\tau}$ . Но  $\frac{\tau}{T} = N$  – число колебаний, совершаемых за время релаксации. Следовательно, логарифмический декремент затухания имеет смысл величины, обратной числу колебаний за время релаксации

$$\lambda = \frac{1}{N} \tag{13}$$

Для характеристики затухания колебаний вводят также добротность колебательной системы  $Q$ , связанную с логарифмическим декрементом соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N \quad (14)$$

*Добротность есть умноженное на  $\pi$  число полных колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Чем выше добротность, тем большее число колебаний успеет совершить система, прежде чем амплитуда колебаний уменьшится в  $e$  раз.*



Можно показать, что при слабом затухании, т.е. когда  $\beta \ll \omega_0$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_B}{R} \quad (15)$$

Величина  $R_B = \sqrt{\frac{L}{C}}$  называется **волновым сопротивлением контура**.

Величину  $Q$  можно связать с относительным изменением энергии  $W$  в колебательной системе за один период колебаний

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{2\pi}{\Delta W / W}. \quad (16)$$

Из (16) следует, добротность тем выше, чем меньше относительные потери энергии в системе за период.

## Вынужденные колебания. Резонанс

**Вынужденные механические колебания.** Если на колебательную систему кроме стационарной квазиупругой (восстанавливающей) силы и силы сопротивления действует еще нестационарная сила (внешняя ЭДС или внешнее напряжение), зависящая от времени по периодическому закону, то в колебательной системе будут совершаться **вынужденные колебания**.

Пусть внешняя сила изменяется по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \Omega t \quad (17)$$

где  $F_0$  – амплитуда силы;

$\Omega$  – частота колебаний вынуждающей силы.

Получим дифференциальное уравнение малых вынужденных колебаний.

$$m\ddot{\xi} = F_{к.у.} + F_{сопр.} + F = -k\xi - r\dot{\xi} + F_0 \cos \Omega t \quad (18)$$

Приводя (18) к каноническому виду и вводя обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta,$$

получим дифференциальное уравнение малых вынужденных колебаний:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{F_0}{m} \cos\Omega t \quad (19)$$

Общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения равно сумме двух решений:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad (20)$$

$\xi_1$  – общее решение однородного дифференциального уравнения (4), характеризующее собственные затухающие колебания,

$$\xi_1 = \xi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (21)$$

$\xi_2$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (19), характеризующее вынужденные колебания:

$$\xi_2 = A \cos(\Omega t + \alpha_0) \quad (22)$$

Справедливость решения (20) можно проверить путем прямой подстановки этого решения в уравнение (18). Подставив (21) и (22) в (19), получим:

$$\xi = \xi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\Omega t + \alpha_0) \quad (23)$$

Собственные колебания со временем постепенно прекращаются из-за затухания. Остаются вынужденные колебания. Графики собственных, вынужденных и результирующих колебаний представлены соответственно на рис. 2а, 2б и 2в:

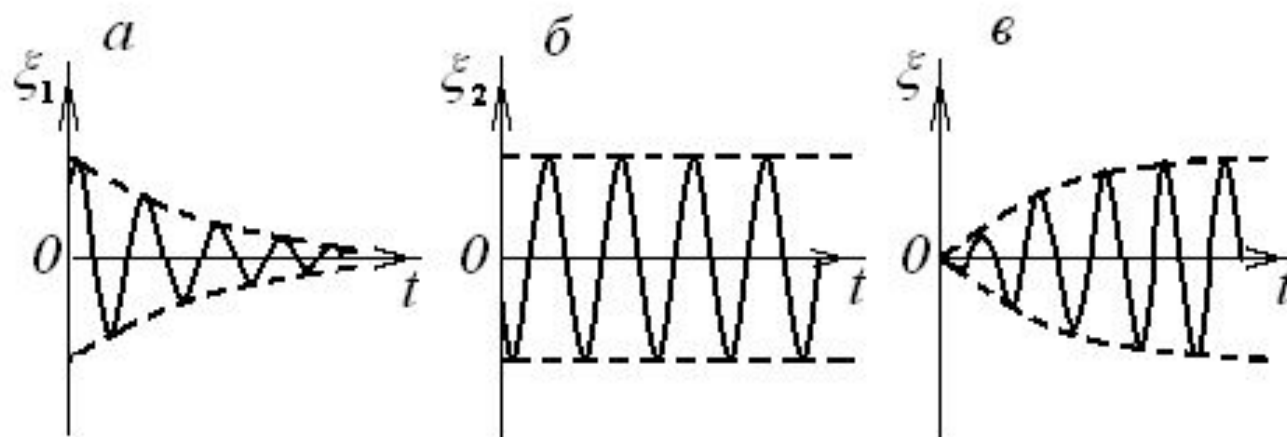


Рис. 2

Рассмотрим свойства вынужденных колебаний.

1. Амплитуда  $A$  вынужденных колебаний и фаза  $\alpha_0$ , определяющая сдвиг фаз между вынужденными колебаниями и вынуждающей силой, *от начальных условий не зависят.*

2. Вынужденные колебания даже при наличии *сопротивления не затухают.*

3. Частота вынужденных колебаний равна частоте вынуждающей силы и от свойств колеблющейся системы (от  $\omega_0$  и  $\beta$ ) не зависит.

Продифференцировав дважды (22) по времени, подставив выражения для  $\xi_2$ ,  $\dot{\xi}_2$  и  $\ddot{\xi}_2$  в (18) и произведя соответствующие преобразования, получим

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \quad (24)$$

Рассмотрим зависимость  $A$  от  $\Omega$  при неизменных  $F_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\beta$  и  $m$ , полагая, что затухание мало ( $\beta < \omega_0$ ). При  $\Omega \ll \omega_0$

$$A \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \delta$$

где  $\delta$  – статическое отклонение, вызываемое силой  $F_0$ .

При  $\Omega \gg \omega_0$

$$A \approx \frac{F_0}{m\Omega^2}$$

Если  $\Omega \rightarrow \infty$ , то  $A \rightarrow 0$ . При некотором значении  $\Omega = \Omega_{рез}$  ( $\Omega_{рез}$  – резонансная частота) подкоренное выражение (24) минимально, следовательно, амплитуда максимальна.

**Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к некоторой характерной для данной системы частоте  $\Omega_{рез}$  называется резонансом.**

Резонансную частоту можно найти, продифференцировав подкоренное выражение в (24) и приравняв полученную производную к нулю.



$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (25)$$

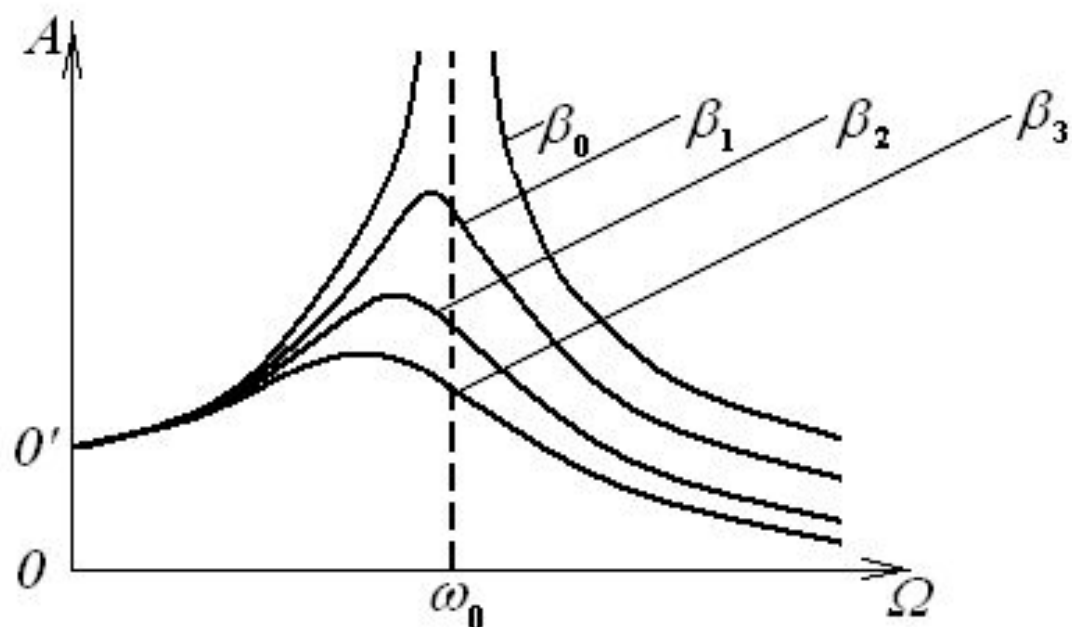


Рис. 3

= 0 (в отсутствие сопротивления) амплитуда должна стать бесконечно большой.

Кривая зависимости  $A = \underline{A}(\Omega)$  называется **резонансной кривой**. На рис. 3 изображены резонансные кривые, соответствующие различным  $\beta$  ( $\beta_3 > \beta_2 > \beta_1, \beta_0 = 0$ ).

Как видно из рис. 3, высота максимума резонансной кривой тем больше, чем меньше  $\beta$ , а при  $\beta$

## Сложение гармонических колебаний

При решении ряда задач, например при сложении колебаний, удобно представлять гармонические колебания с помощью так называемого **вращающегося вектора амплитуды**. Пусть гармонические колебания величины  $\xi$  описываются уравнением:

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$$

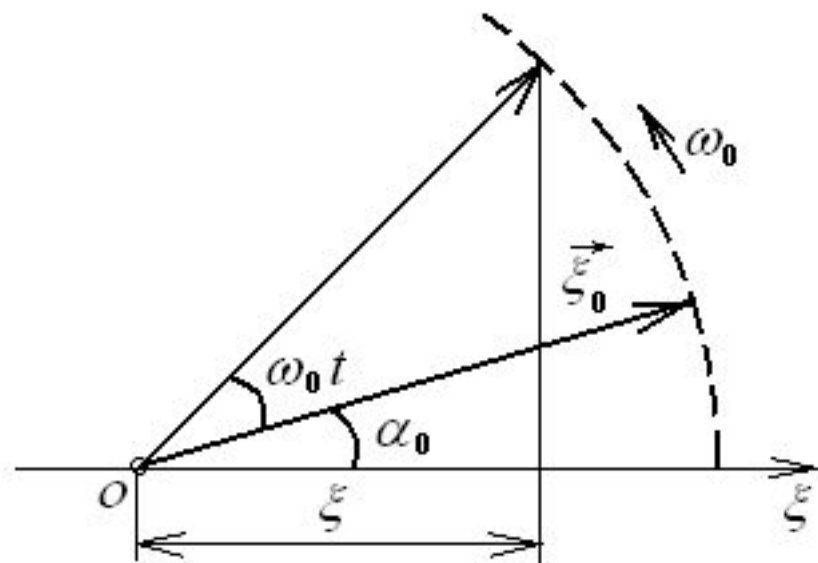


Рис. 4

Выберем в качестве оси абсцисс ось  $\xi$  (рис. 3). Из начала координат (точка  $O$ ) отложим вектор длиной  $\xi_0$ , образующий с осью угол  $\alpha_0$ . Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью  $\omega$ , то угол, составляющий с осью  $\xi$  в любой момент времени будет равен

$$\alpha = \omega t + \alpha_0$$

а проекция вектора на ось  $\xi$ :

$$\xi = \xi_0 \cos \alpha = \xi_0 \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (26)$$

Выражение (26) представляет собой уравнение гармонические колебания с амплитудой  $\xi_0$ , угловой скоростью  $\omega$  и начальной фазой  $\alpha_0$ .

Колебательная система может одновременно участвовать в нескольких колебаниях. Сложить два или несколько колебаний – значит найти закон результирующего колебания: его амплитуду, частоту, траекторию движения в случае механических колебаний. Эта задача в общем случае решается аналитически, но в ряде случаев возможно графическое решение с помощью вращающегося вектора амплитуды. Рассмотрим пример сложения гармонических колебаний с использованием графического решения.

## Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих вдоль одной прямой

Пусть колебательная система участвует одновременно в двух колебаниях. Физическая величина  $\xi$ , описывающая колебания, – величина скалярная. Примером может служить смещение материальной точки, одновременно участвующей в двух колебаниях, направленных вдоль одной прямой. Другой пример: смещение электронного луча в электроннолучевой трубке под действием напряжения от двух или нескольких источников, подаваемого на вертикально отклоняющие пластины.

Пусть одно колебание задано уравнением

$$\xi_1 = \xi_{01} \cos(\omega t + \alpha_{01})$$

а другое

$$\xi_2 = \xi_{02} \cos(\omega t + \alpha_{02})$$

Результирующее колебание  $\xi$ :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{01} \cos(\omega t + \alpha_{01}) + \xi_{02} \cos(\omega t + \alpha_{02})$$

Сложение можно осуществить либо аналитически, сделав простые тригонометрические преобразования, либо – графически, используя, например, вращающийся вектор амплитуды. Выполним сложение графически (рис. 5). Из начала оси  $\xi$  отложим вектора  $\xi_{01}$  и  $\xi_{02}$  под соответствующими углами  $\alpha_{01}$  и  $\alpha_{02}$ . Так как вектора  $\xi_{01}$  и  $\xi_{02}$  вращаются с одинаковой угловой скоростью, то угол между ними, равный  $(\alpha_{02} - \alpha_{01})$ , остается постоянным. Построим вектор  $\xi_0$

$$\xi_0 = \xi_{01} + \xi_{02}$$

который также будет вращаться с угловой скоростью  $\omega$ . Следовательно, результирующее колебание

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (27)$$

где  $\xi_0$  и  $\alpha_0$  – амплитуда и начальная фаза результирующего колебания.

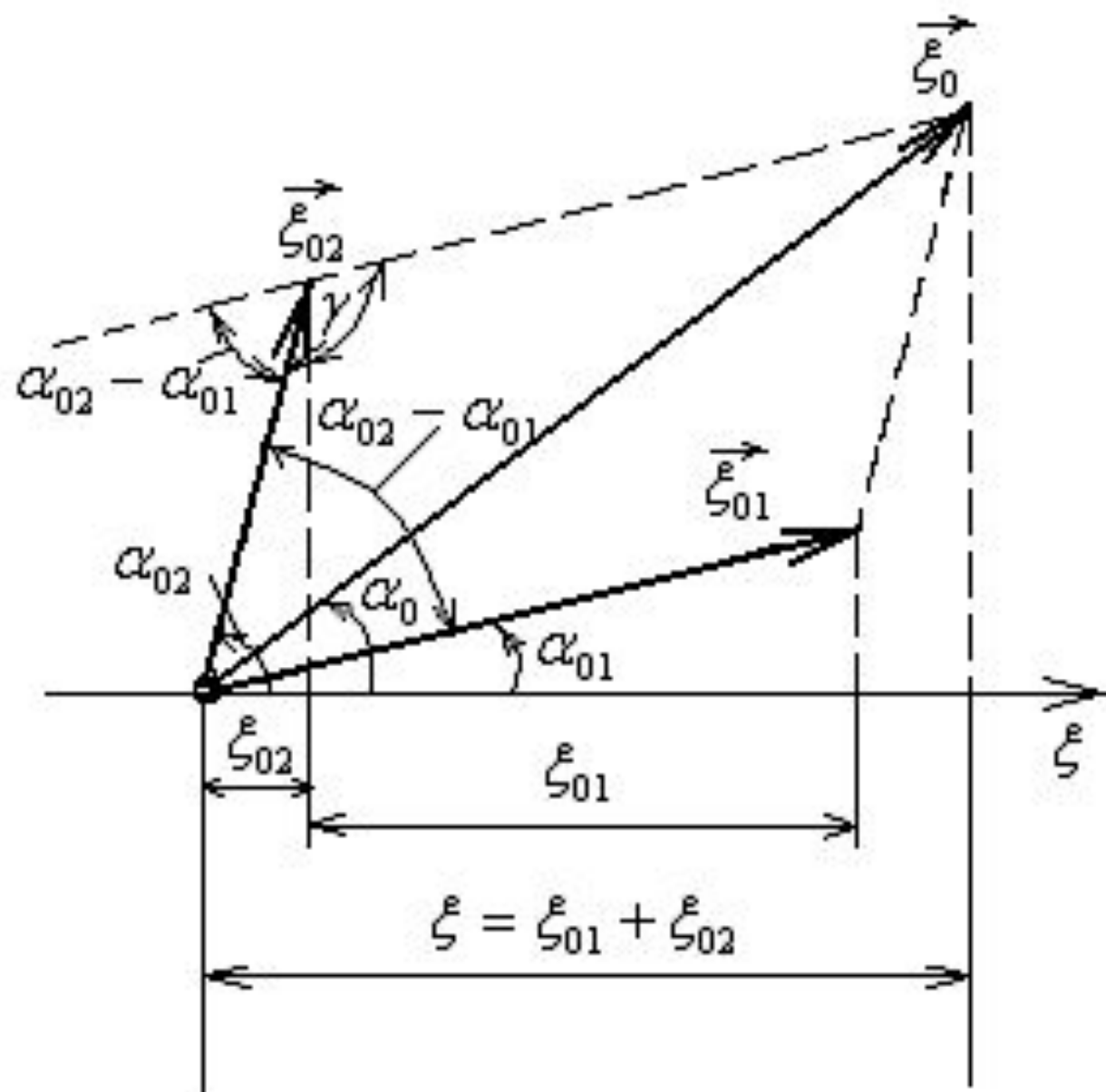


Рис. 5

Из треугольника со сторонами  $\xi_{01}$  и  $\xi_{02}$  по теореме косинусов имеем

$$\xi_0^2 = \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos(\alpha_{02} - \alpha_{01}) \quad (28)$$

Из рис. 5 также следует, что

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{\xi_{01} \sin \alpha_{01} + \xi_{02} \sin \alpha_{02}}{\xi_{01} \cos \alpha_{01} + \xi_{02} \cos \alpha_{02}} \quad (29)$$

Проанализируем зависимость амплитуды результирующего колебания  $\xi_0$  от разности начальных фаз  $\alpha_{02} - \alpha_{01}$ :

а) если  $\alpha_{02} - \alpha_{01} = 2m\pi$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то  $\xi_0 = \xi_{01} + \xi_{02}$ , т.е. колебания *усиливают друг друга*;

б) если  $\alpha_{02} - \alpha_{01} = (2m+1)\pi$ , то  $\xi_0 = |\xi_{01} - \xi_{02}|$ , т.е. колебания *ослабляют друг друга*. В частности, если  $\xi_{01} = \xi_{02}$ , то колебания *полностью гасят друг друга*.

в) в зависимости от разности фаз амплитуда результирующего колебания может *принимать любые значения*, лежащие в интервале

$$\xi_{01} + \xi_{02} \geq \xi_0 \geq |\xi_{01} - \xi_{02}|.$$