Основная (каноническая) задача линейного программирования (ОЗЛП)

Определить $\min\limits_{X \in G} F(X) = C^T X$, (1)

где

$$G: \begin{cases} AX = B \\ X \geqq 0_n \end{cases} , \quad (2)$$

$$X = [x_1, \ldots x_n]^T \; ; \quad C = [c_1, \ldots c_n]^T \; ;$$

$$\dim A = [m \times n] \quad B = [b_1, \ldots b_m]^T \quad 0_n = [\underbrace{0, \ldots 0}_{n}]^T .$$

Геометрический метод решения ОЗЛП.

В практических задачах, как правило $r < n$.

Предполагаем что $m = r$, $n - m = 2$.

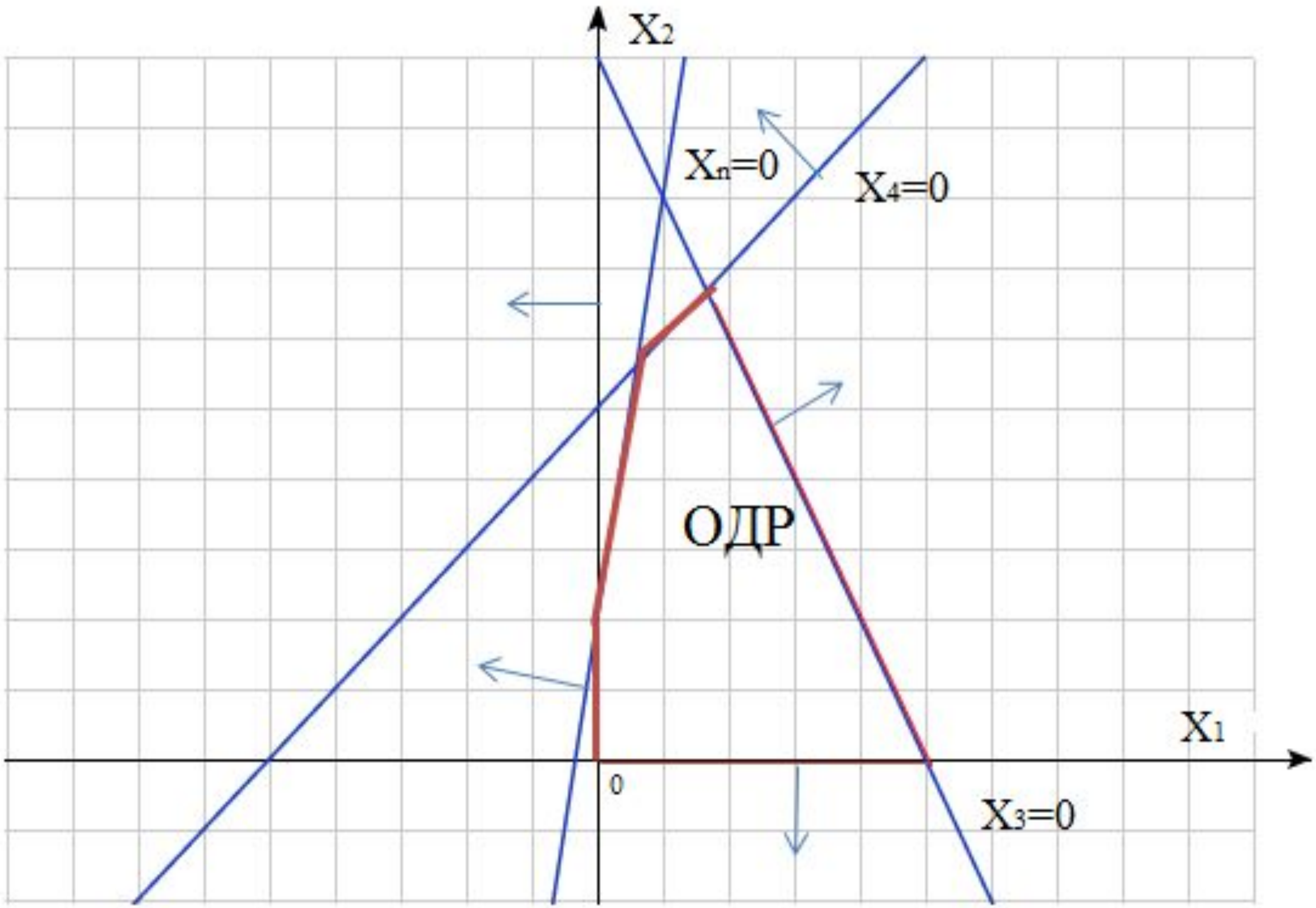
Выразим m базисных переменных через две свободных (например, x_1 и x_2). Система уравнений (2) примет вид:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \end{array}\right\} \qquad (3)$$

С учетом условия неотрицательности переменных множество $\boldsymbol{G}$ можно представить в виде системы неравенств:

$$\boldsymbol{G}: \begin{cases} \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0 \\ \dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0 \\ x_1, x_2 \geqq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Отложим по осям OX_1 и OX_2 значения свободных переменных, а также построим полуплоскости, соответствующие неравенствам (4):


X2
Xn=0
X4=0
ОДР
X1
0
X3=0

Утверждение. ОДР, если она существует, всегда является выпуклым множеством, имеющим форму многоугольника.

Поиск оптимального решения.

Подставим соотношение (3) в (1).

Получим:

$$F(X) = a + bx_1 + cx_2 . \qquad (5)$$

Будем рассматривать целевую функцию в виде:

$$\Phi(X) = bx_1 + cx_2 , \qquad (6)$$

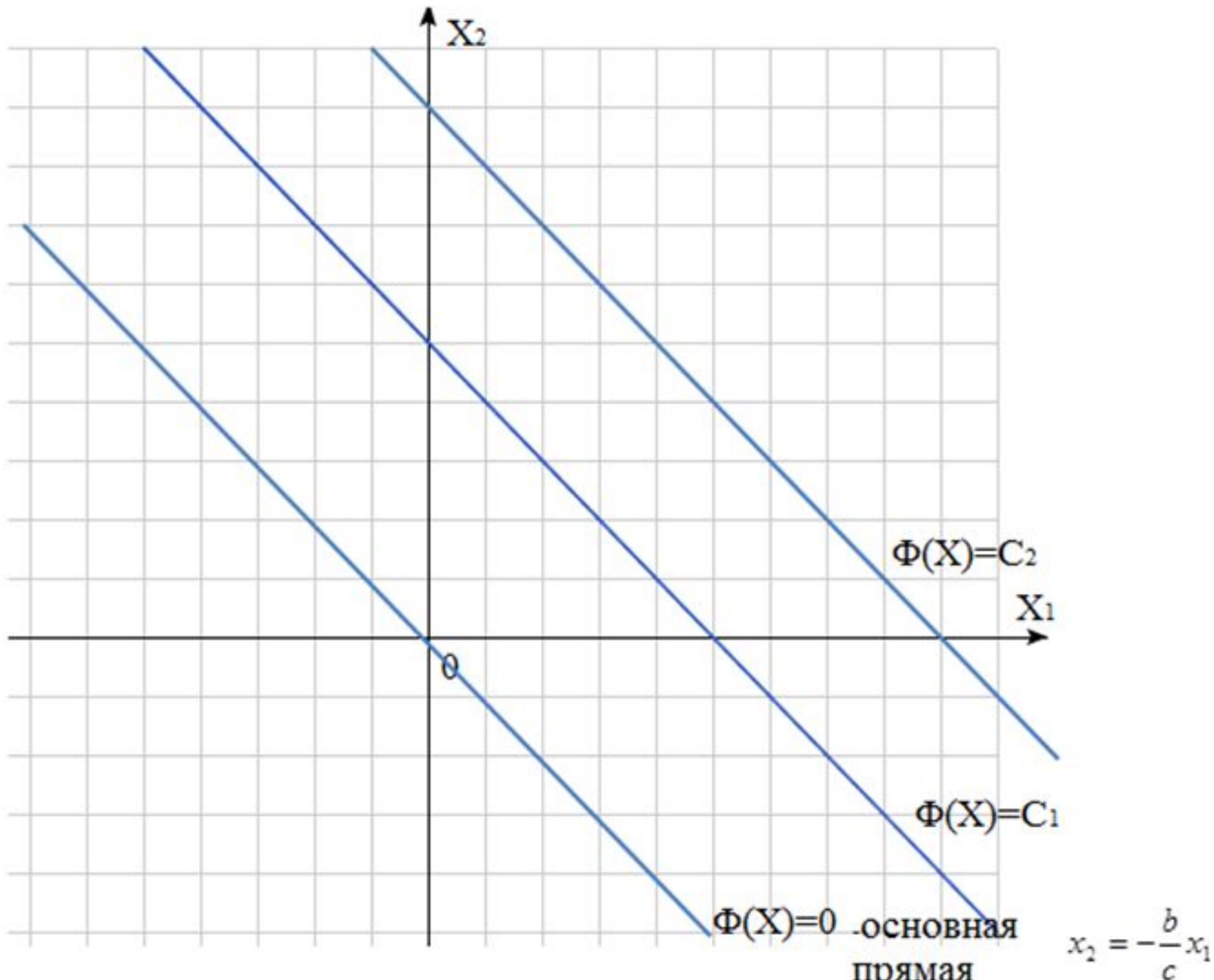
т.к. параметр a не влияет на оптимальное решение x^{opt}.

Линии уровня целевой функции $\varPhi(x)$ - параллельные прямые:

$$\varPhi(x)=C_1 \parallel \varPhi(x)=C_2 \parallel \ldots \quad \ldots \parallel \varPhi(x)=C_n \parallel \varPhi(x)=0,$$

Изменение параметра C равносильно мысленному перемещению прямой $\varPhi(x)=0$ параллельно самой себе.

В каком направлении необходимо перемещать прямую $\varPhi(x)=0$, чтобы значение $\varPhi(x)$ убывало?



X_2
X_1
0
$\Phi(X)=C_2$
$\Phi(X)=C_1$
$\Phi(X)=0$ -основная прямая
$x_2 = -\frac{b}{c}x_1$

Вычислим градиент:

$$\boldsymbol{grad}\Phi(\boldsymbol{X}) = \left[\frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_1}; \frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_2}\right]^T$$

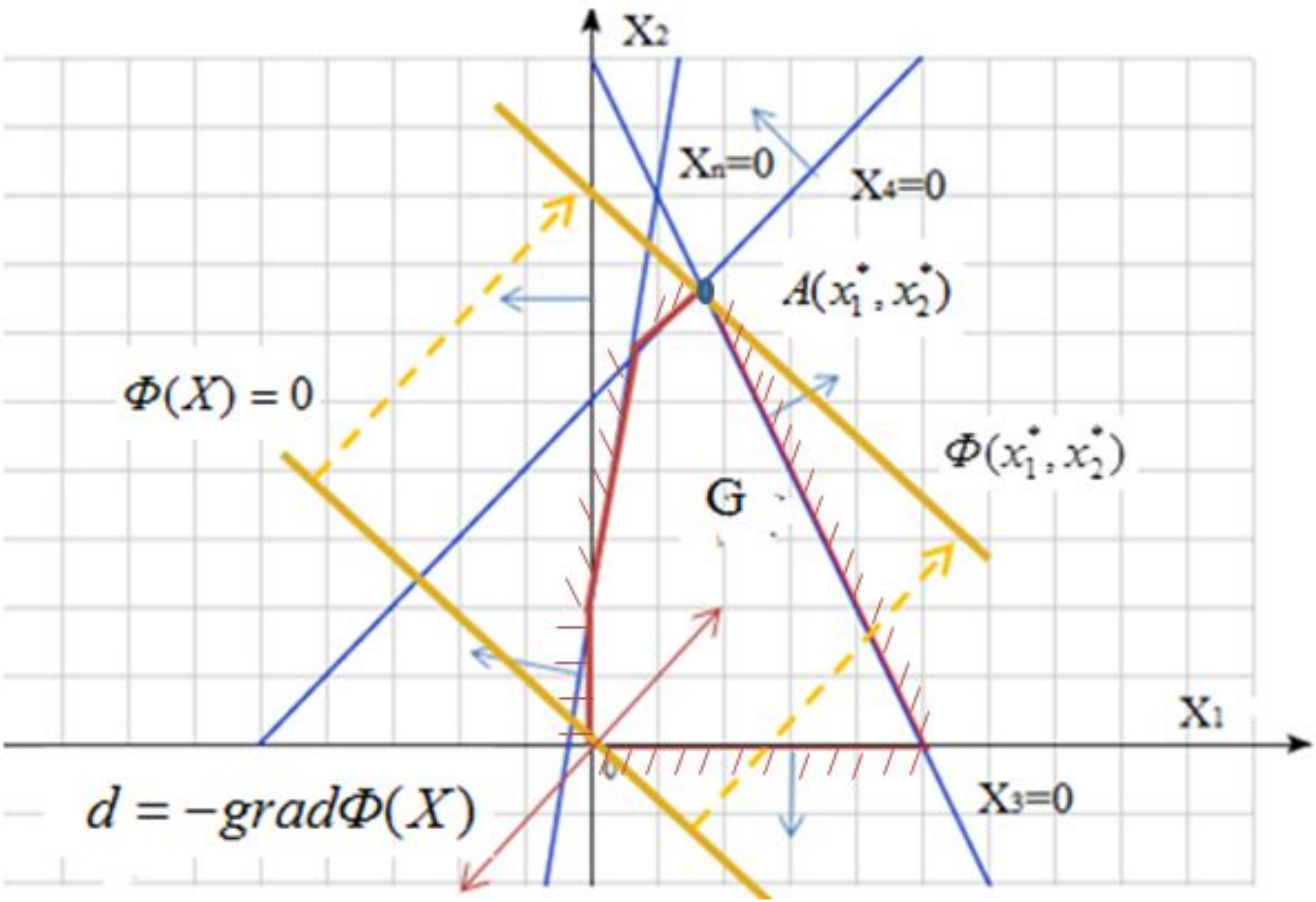
$$\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{X})}{\partial x_1} = b \qquad \frac{\partial\Phi(\boldsymbol{X})}{\partial x_2} = c \Rightarrow \boldsymbol{grad}\,\Phi(\boldsymbol{X}) = [b; c]^T$$

Направление уменьшения $\Phi(\boldsymbol{X})$:

$$\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{grad}\Phi(\boldsymbol{X}) \tag{7}$$

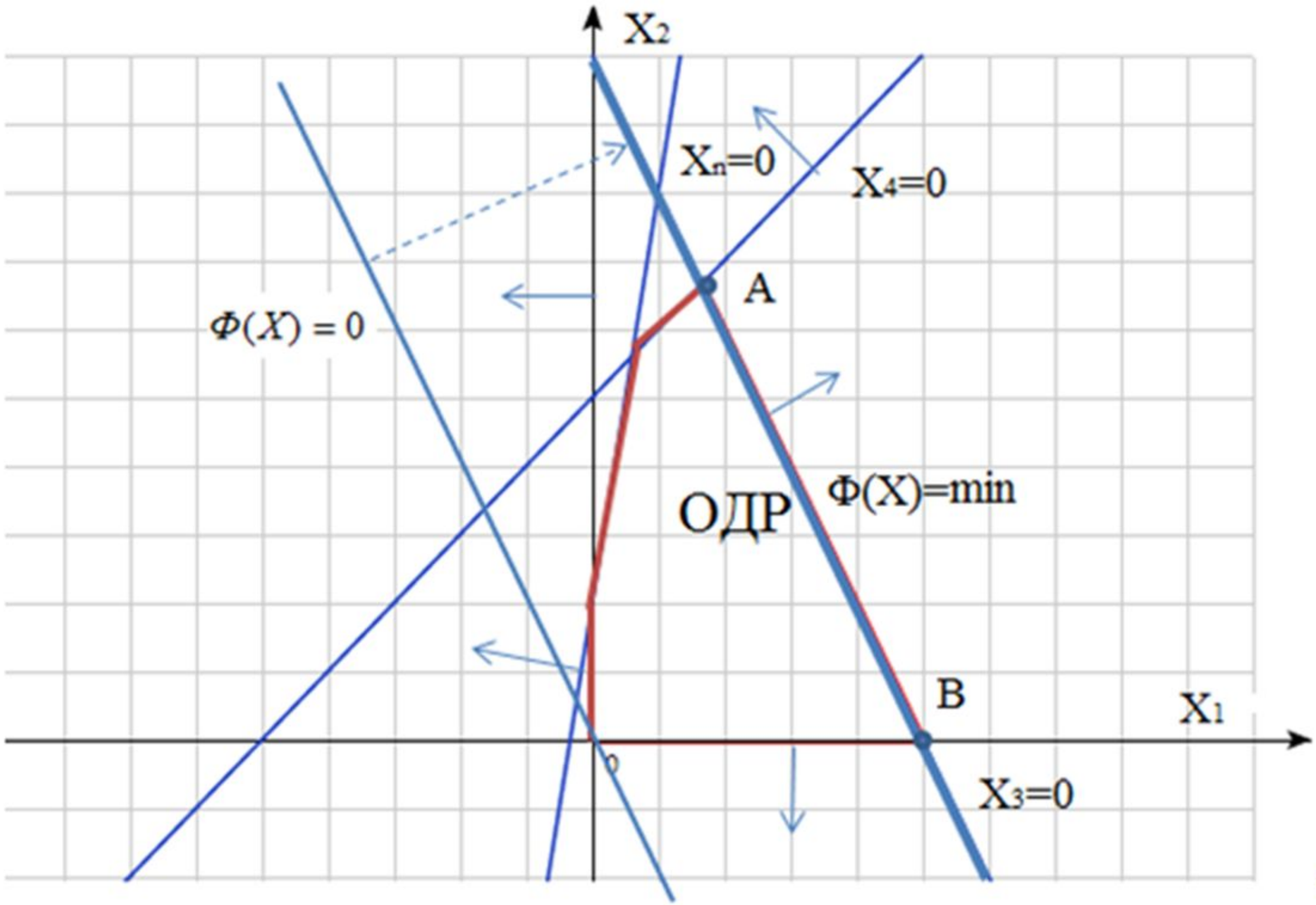
Таким образом, для поиска оптимального решения задачи (1) - (2) необходимо передвигать основную прямую $\Phi(\boldsymbol{X}) = 0$ в направлении $\boldsymbol{d}$ вида (7) параллельно самой себе.

Очевидно, что $min\Phi(\boldsymbol{X})$ будет достигнут, когда прямая $\Phi(\boldsymbol{X})=0$ пройдет через крайнюю точку множества G, наиболее удаленную от начала координат (в данном случае это точка $A(x_1^*, x_2^*)$ в направлении $\boldsymbol{d}$.

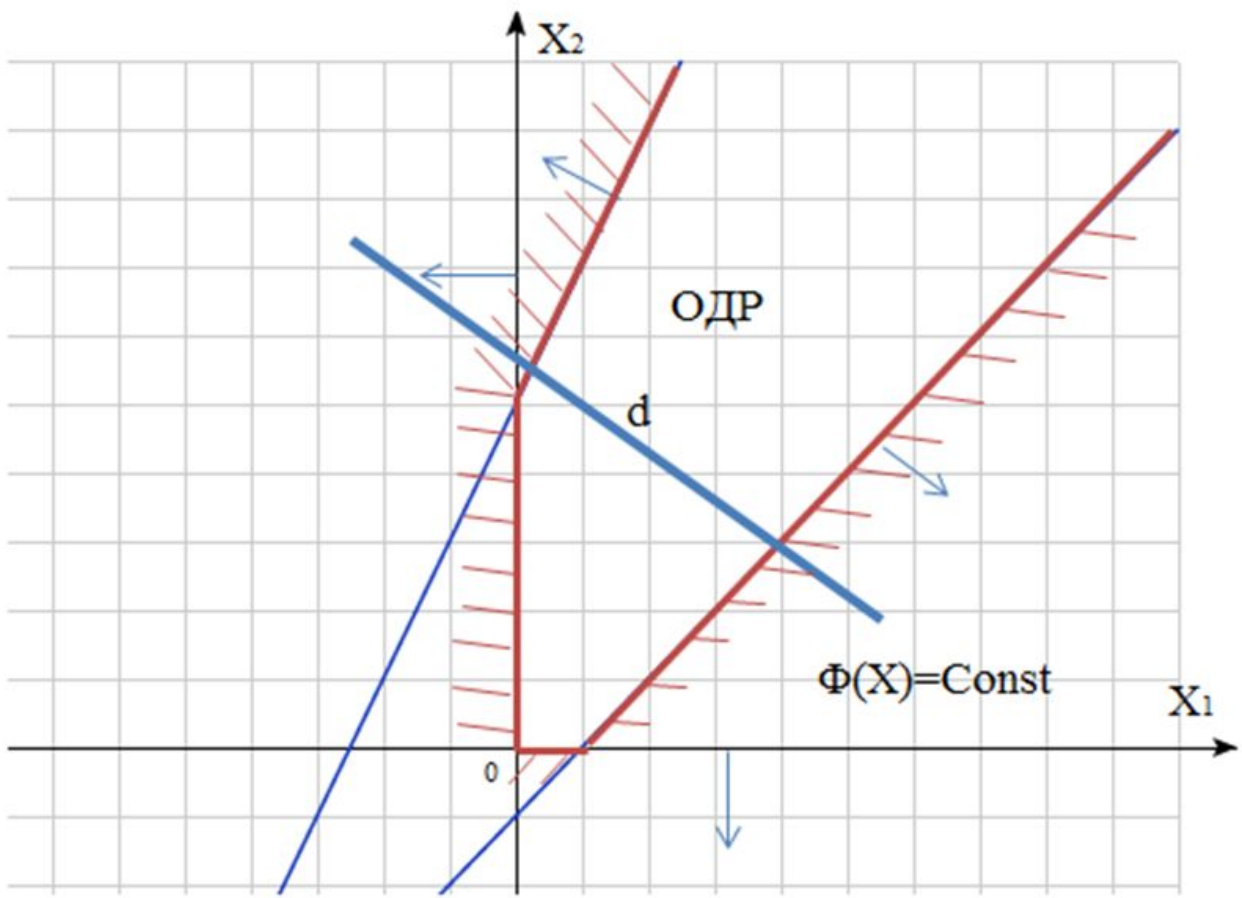


Замечания: Возможен случай, когда прямая $\Phi(X) = 0$ параллельна какой либо прямой X=0 из многоугольника ограничений.

Тогда ОЗЛП имеет бесконечное множество решений (см. рис.).



Замечание: ОДР может быть неограниченным (незамкнутым) множеством. В этом случае возможна ситуация, когда ОЗЛП не имеет конечного решения, т.е. $min F(X) = -\infty$



Рассмотренный выше геометрический метод решения ОЗЛП для случая $n-m=2$ позволяет сделать следующие общие выводы:

1. Решение ОЗЛП если оно существует, находится всегда на границе множества G (но не внутри G).

2. Решение, минимизирующее функцию $F(X)$, всегда достигается в одной из вершин многоугольника $\boldsymbol{G}$.

Решение, лежащее в одной из вершин множества $\boldsymbol{G}$, называется опорным решением.

3. Для того чтобы, найти оптимальное решение, в принципе достаточно перебрать все вершины множества $\boldsymbol{G}$ и выбрать из них ту, в которой $F(X)$ достигает минимума.

4. Если $n - m = 2$ (или k) и решение ОЗЛП существует, то оно всегда достигается в точке, где, по крайней мере, 2 (или k) из переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ обращаются в 0 (т.к. в любой опорной точке пересекаются, по крайней мере, 2 (или k) из ограничивающих прямых (плоскостей).

5. Решение ОЗЛП может быть не единственным, если прямая $\Phi(\boldsymbol{X}) = 0$ параллельна одной из ограничивающих прямых (плоскостей) множества $\boldsymbol{G}$.

6. Решение ОЗЛП может не существовать, если множество $\boldsymbol{G}$ не замкнуто.

ЗАДАЧА 1

Определить $\max F(X) = 3x_1 + 3x_2$

При ограничениях:

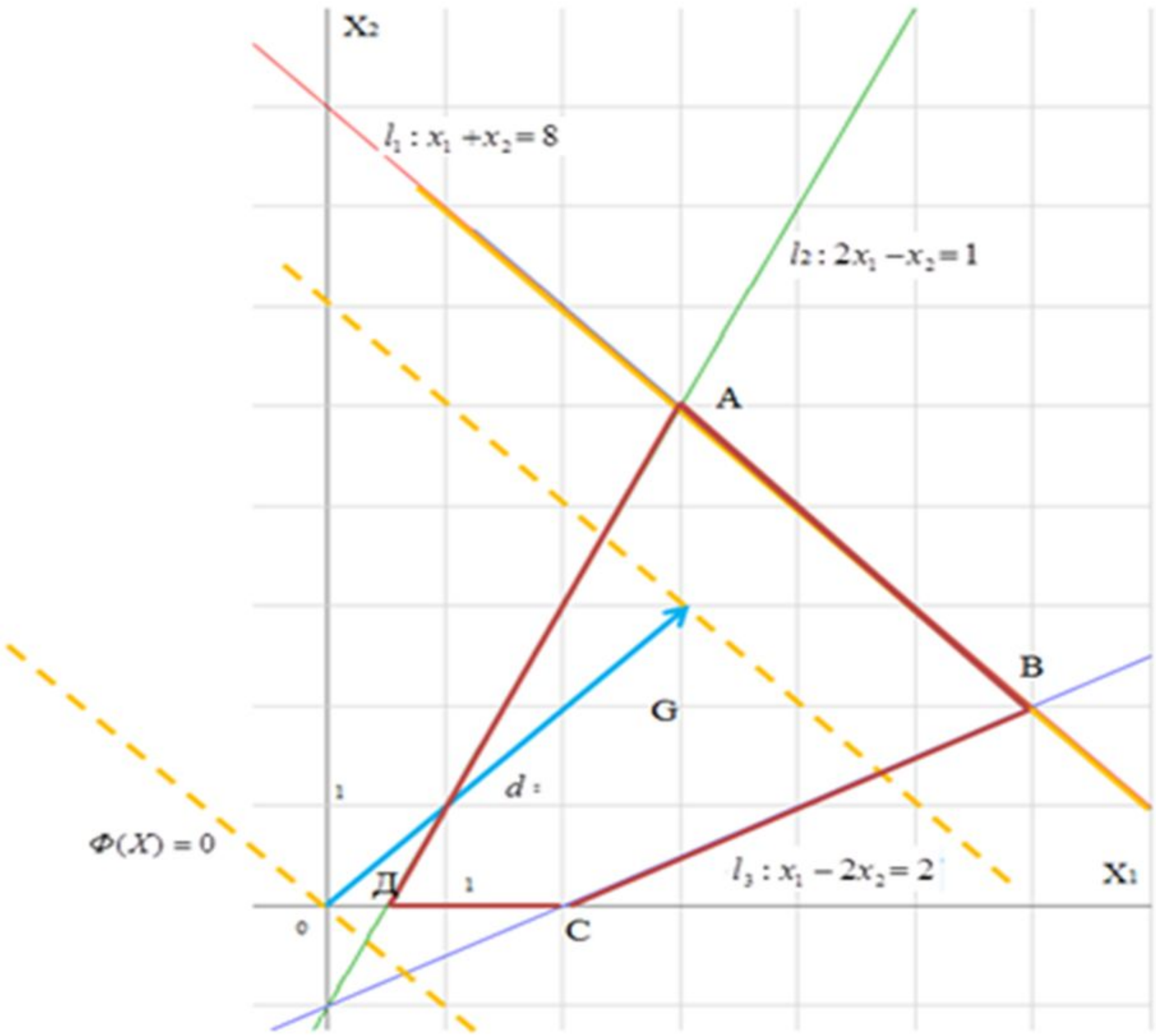
$$G: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$l_1 : x_1 + x_2 = 8$$

$$l_2 : 2x_1 - x_2 = 1$$

$$l_3 : x_1 - 2x_2 = 2$$

$$d = gradF(X) = [3;3]$$



X2
$l_1 : x_1 + x_2 = 8$
$l_2 : 2x_1 - x_2 = 1$
A
B
G
d
1
$\Phi(X) = 0$
Д
1
$l_3 : x_1 - 2x_2 = 2$
X1
0
C

Линия уровня с максимальным значением $F(X)$ совпадает с отрезком AB, являющимся границей многоугольника $ABCД$.

Отрезок $AB \in l_1 : x_1 + x_2 = 8$

Следовательно, на всем отрезке AB линейная функция $F(X) = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2)$ принимает одно и то же значение:

$F = 3 \cdot 8 = 24,$

являющееся максимальным на G.

Это означает, что задача имеет бесконечное множество оптимальных решений.

Координаты точки А:

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow A(3;5)$$

Координаты токи В:

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow B(6;2)$$

Таким образом, точки отрезка AB задаются уравнением:

$x_2 = 8 - x_1$, где $3 \le x_1 \le 6$

Ответ:

1) $F_{\max} = 24$

2) Множество оптимальных решений:

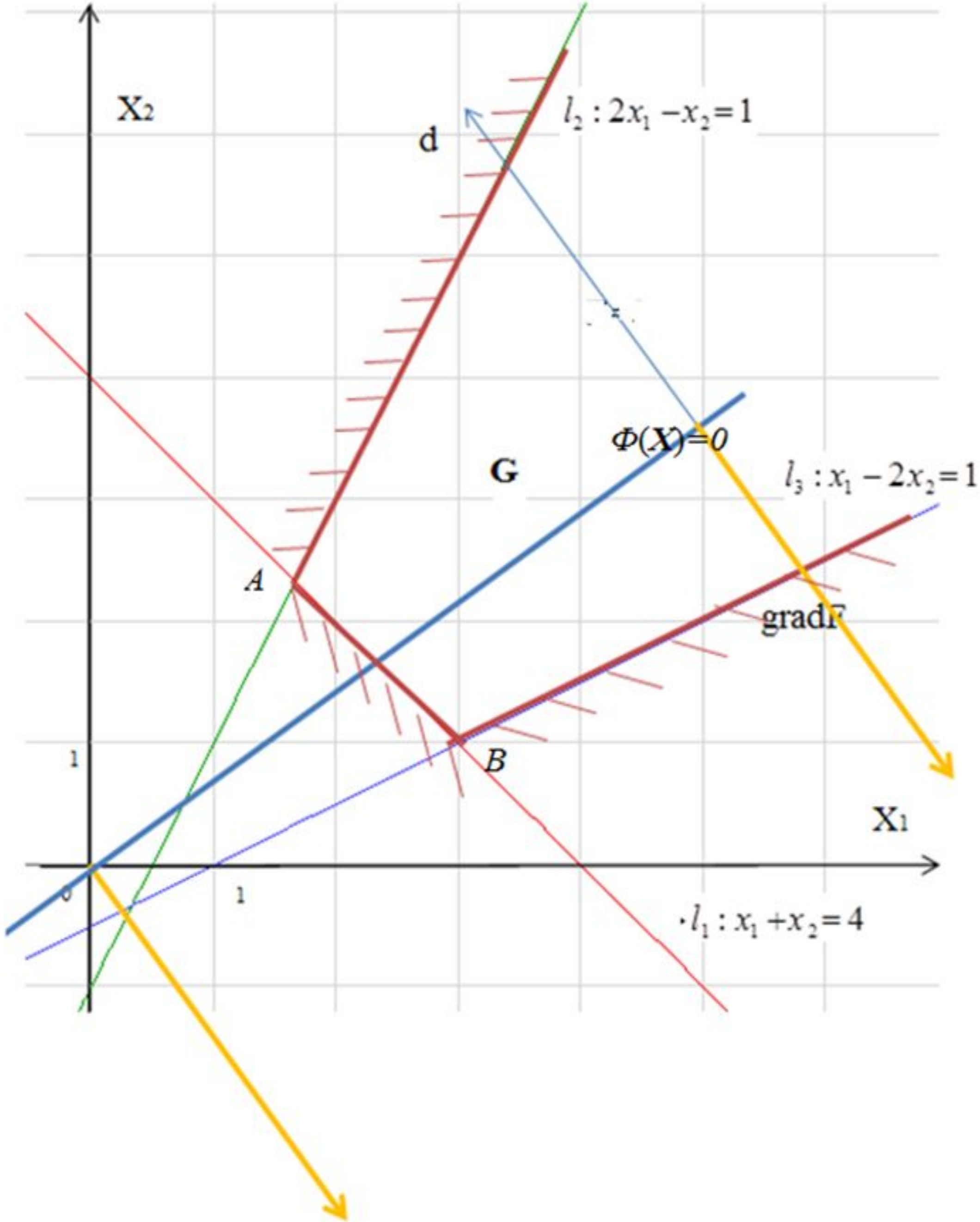
$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 8 - c, \textit{где} \quad 3 \le c \le 6 \end{cases}$$

Задача 2

Определить $minF(\boldsymbol{X}) = 2x_1 - 3x_2 + 1$

При ограничениях:

$$\boldsymbol{G}: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \rightarrow l_1 : x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \rightarrow l_2 : 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \rightarrow l_3 : x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



X2
d
$l_2 : 2x_1 - x_2 = 1$
$\Phi(X)=0$
G
$l_3 : x_1 - 2x_2 = 1$
A
gradF
1
B
X1
0
1
$l_1 : x_1 + x_2 = 4$

$$\mathbf{grad}F(\mathbf{X}) = [2;-3]$$

Направление убывания функции $F(\mathbf{X})$ противоположно направлению $\mathbf{grad}F(\mathbf{X})$

Отсюда следует, что если линию уровня $\Phi(\mathbf{X}) = 0$ перемещать параллельно самой себе в направлении $\boldsymbol{d}$, то она всегда будет пересекать незамкнутый многоугольник $\boldsymbol{G}$. Следовательно, линейная функция $F(\mathbf{X})$ не ограничена снизу. Следовательно, конечного оптимума нет, т.е. $F_{min} = -\infty$

Задача 3.

Определить $\min F(\mathbf{X}) = x_2 + x_3 + x_4$

при ограничениях:

$$\mathbf{G}: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_i \geqq 0 \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Решение.

$r(A) = r(A \mid B) = 2; \quad n\text{-}m = 2$.

$x_1, x_2 -$ основные переменные;

$x_3, x_4 -$ свободные переменные .

Выразим основные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - x_3 + x_4 \\ 2x_1 = 8 - 3x_3 - x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G}: \begin{cases} -3x_3 - x_4 \geqq -8 \\ x_3 + 3x_4 \geqq 0 \\ x_3 \geqq 0 \qquad x_4 \geqq 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{G}: \begin{cases} 3x_3 + x_4 \leqq 8 \rightarrow l_1 : 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_3 + 3x_4 \geqq 0 \rightarrow l_2 : x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 \geqq 0 \qquad x_4 \geqq 0 \end{cases}$$

$$F(\boldsymbol{X}) = \frac{3}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4; \qquad \boldsymbol{grad}F(\boldsymbol{X}) = \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]; \qquad \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{grad}F(X)$$

Оптимальное решение достигается в точке $A(0;\ 0)$.
Значения переменных:

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \dfrac{3}{2} \cdot 0 - \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 4 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0 + \dfrac{3}{2} \cdot 0 = 0 \end{cases};$$

$$F_{min} = 0$$

$$\boldsymbol{X}^* = (4;0;0;0).$$