

Основная (каноническая) задача линейного программирования (ОЗЛП)

Определить $\min_{X \in G} F(X) = C^T X$, (1)

где

$$G: \begin{cases} AX = B \\ X \geq 0_n \end{cases} , \quad (2)$$

$$X = [x_1, \dots, x_n]^T ; \quad C = [c_1, \dots, c_n]^T ;$$

$$\dim A = [m \times n] \quad B = [b_1, \dots, b_m]^T \quad 0_n = \underbrace{[0, \dots, 0]}_n .$$

Геометрический метод решения ОЗЛП.

В практических задачах, как правило $r < n$.

Предполагаем что $m = r$, $n - m = 2$.

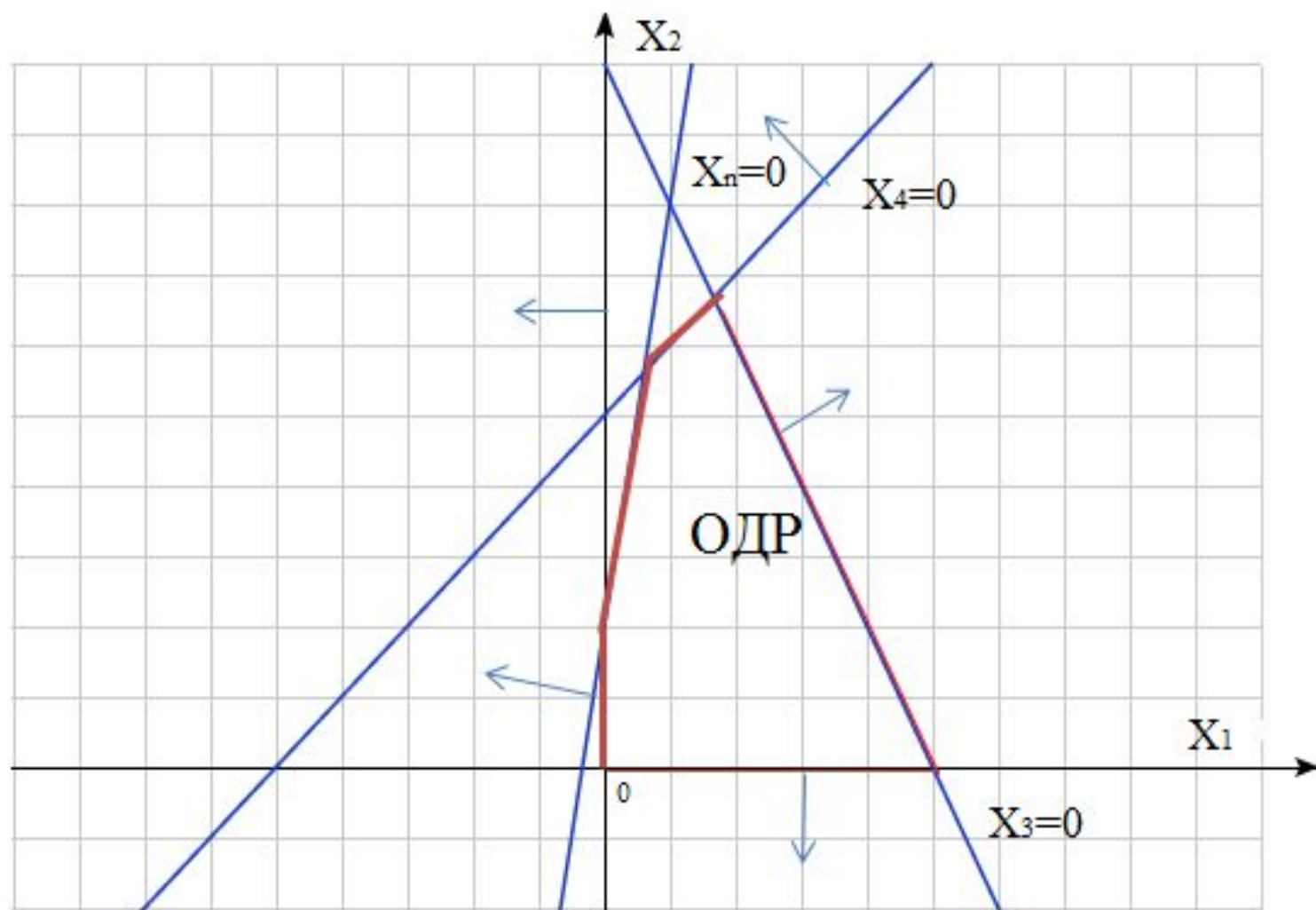
Выразим m базисных переменных через две свободных (например, x_1 и x_2). Система уравнений (2) примет вид:

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = \alpha_{3I}x_I + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{nI}x_I + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \end{array} \right\} \quad (3)$$

С учетом условия неотрицательности переменных множество G можно представить в виде системы неравенств:

$$G: \begin{cases} \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0 \\ \dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Отложим по осям OX_1 и OX_2 значения свободных переменных, а также построим полуплоскости, соответствующие неравенствам (4):



Утверждение. ОДР, если она существует, всегда является выпуклым множеством, имеющим форму многоугольника.

Поиск оптимального решения.

Подставим соотношение (3) в (1).

Получим:

$$F(X) = a + bx_1 + cx_2 \quad (5)$$

Будем рассматривать целевую функцию в виде:

$$\Phi(X) = bx_1 + cx_2 \quad (6)$$

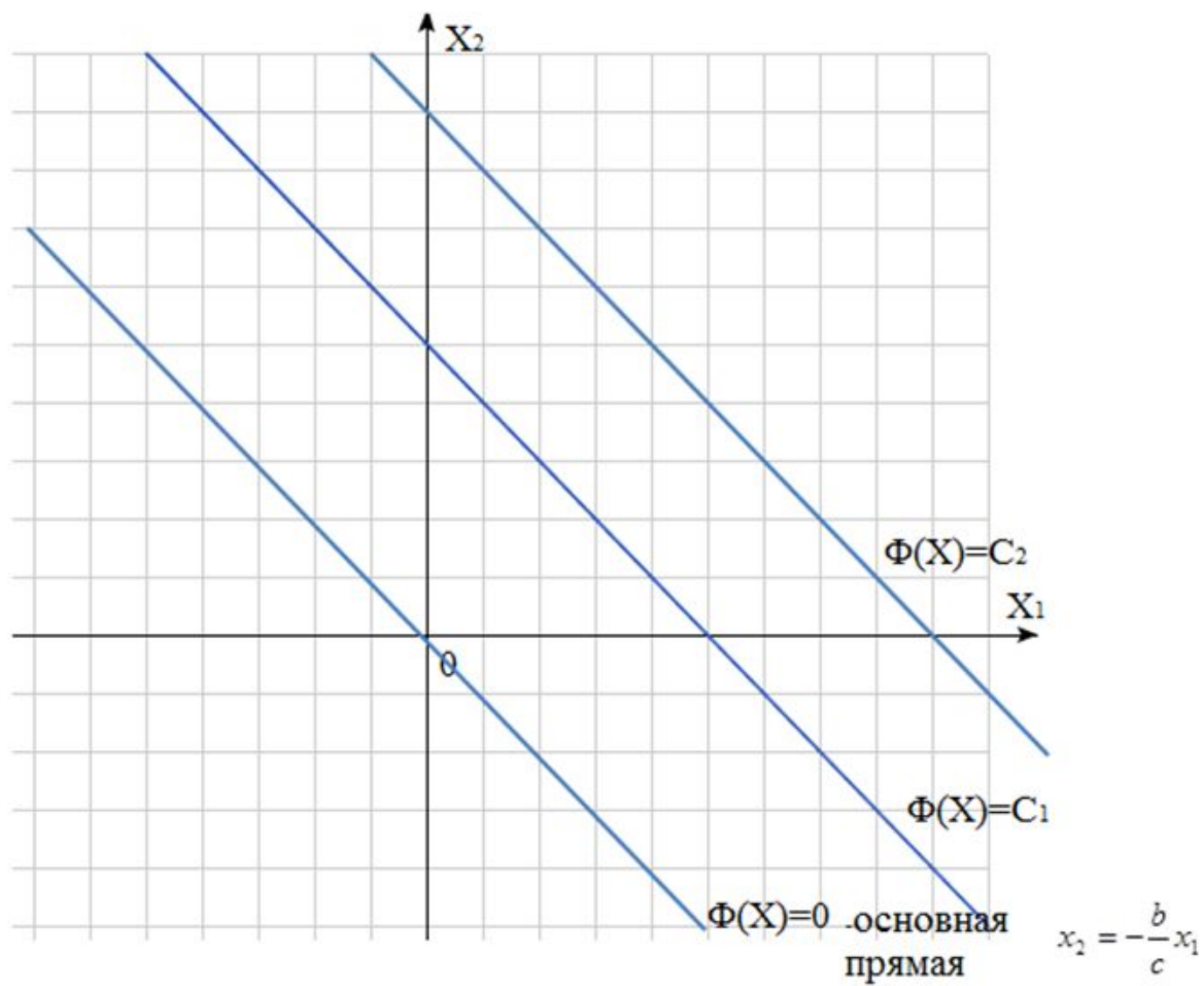
т.к. параметр a не влияет на оптимальное решение x^{opt} .

Линии уровня целевой функции $\Phi(x)$ - параллельные прямые:

$$\Phi(x) = C_1 \quad \& \quad \Phi(x) = C_2 \quad \& \dots \quad \dots \quad \& \quad \Phi(x) = C_n \quad \& \quad \Phi(x) = 0$$

Изменение параметра C равносильно мысленному перемещению прямой $\Phi(x) = 0$ параллельно самой себе.

В каком направлении необходимо перемещать прямую $\Phi(x) = 0$, чтобы значение $\Phi(x)$ убывало?



Вычислим градиент:

$$\text{grad}\Phi(X) = \left[\frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_1}; \frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_2} \right]^T$$

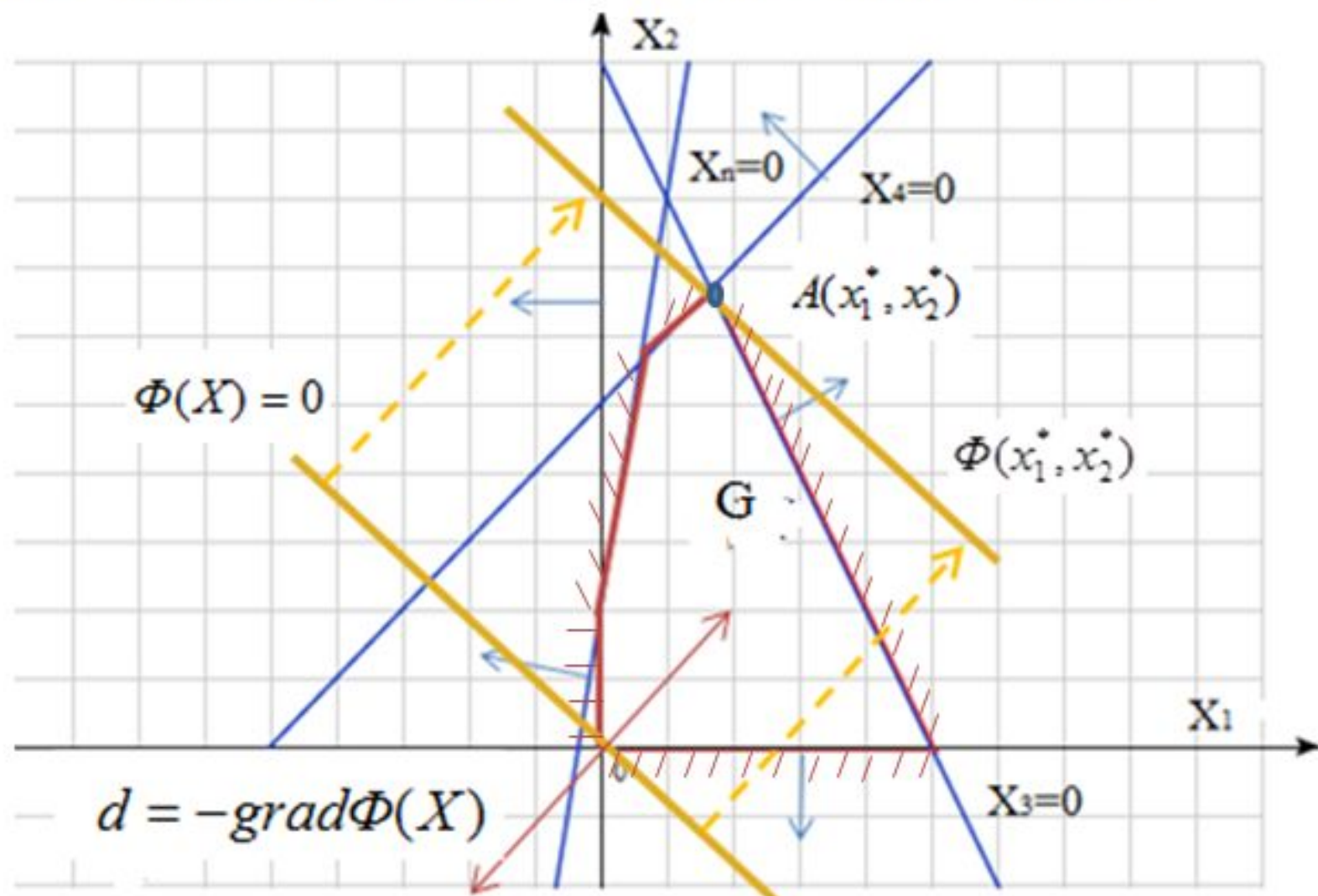
$$\frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_1} = b \quad \frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_2} = c \Rightarrow \text{grad}\Phi(X) = [b; c]^T$$

Направление уменьшения $\Phi(X)$:

$$d = -\text{grad}\Phi(X) \quad (7)$$

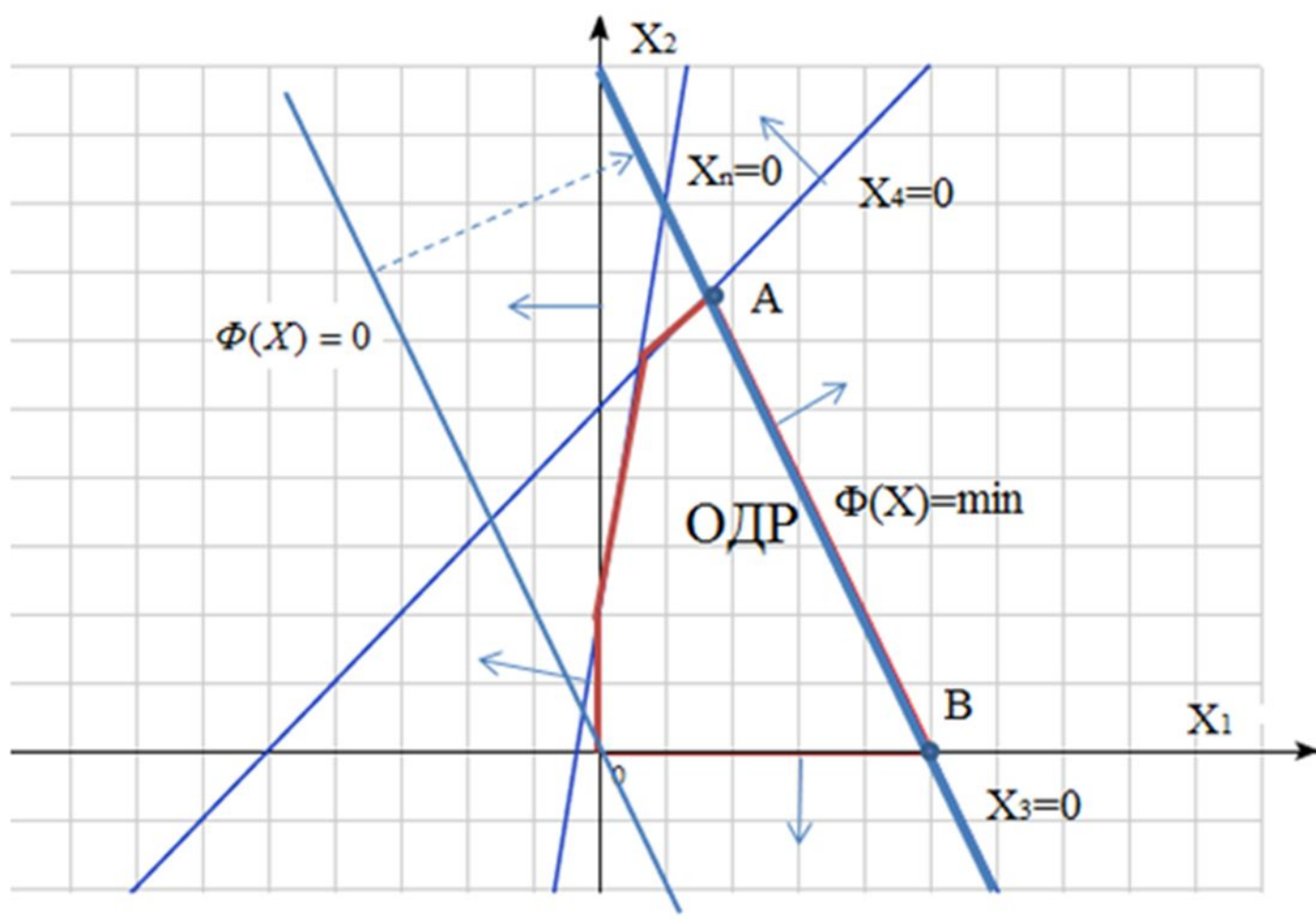
Таким образом, для поиска оптимального решения задачи (1) - (2) необходимо передвигать основную прямую $\Phi(X) = 0$ в направлении d вида (7) параллельно самой себе.

Очевидно, что $\min \Phi(X)$ будет достигнут, когда прямая $\Phi(X)=0$ пройдет через крайнюю точку множества G , наиболее удаленную от начала координат (в данном случае это точка $A(x_1^*, x_2^*)$) в направлении d .

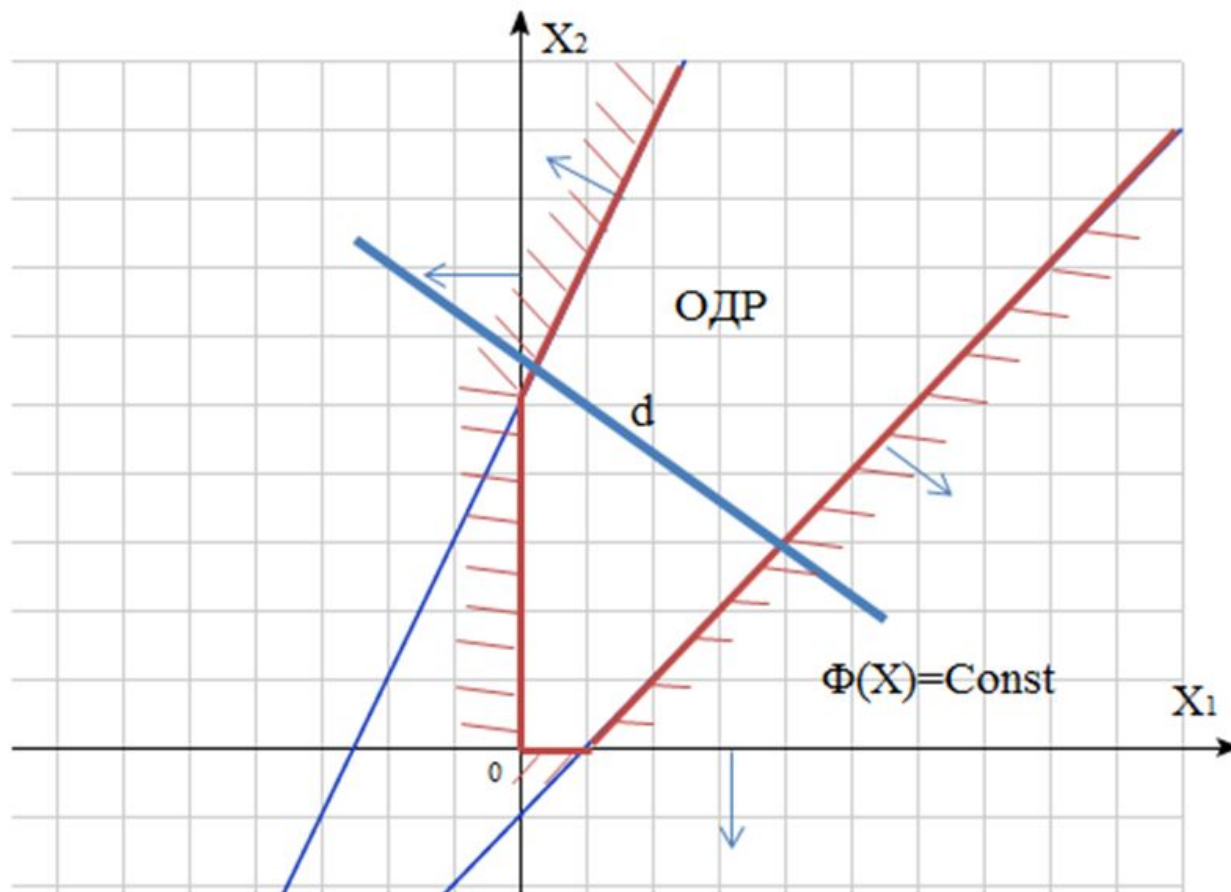


Замечания: · Возможен случай, когда прямая $\Phi(X) = 0$ параллельна какой-либо прямой $X=0$ из многоугольника ограничений. ¶

Тогда ОЗЛП имеет бесконечное множество решений (см. рис.). ¶



Замечание: ОДР может быть неограниченным (незамкнутым) множеством. В этом случае возможна ситуация, когда ОЗЛП не имеет конечного решения, т.е. $\min F(X) = -\infty$



Рассмотренный выше геометрический метод решения ОЗЛП для случая $n - m = 2$ позволяет сделать следующие общие выводы:

1. Решение ОЗЛП если оно существует, находится всегда на границе множества G (но не внутри G).

2. Решение, минимизирующее функцию $F(X)$, всегда достигается в одной из вершин многоугольника G .

Решение, лежащее в одной из вершин множества G , называется опорным решением.

3. Для того чтобы, найти оптимальное решение, в принципе достаточно перебрать все вершины множества G и выбрать из них ту, в которой $F(X)$ достигает минимума.

4. Если $n - m = 2$ (или k) и решение ОЗЛП существует, то оно всегда достигается в точке, где, по крайней мере, 2 (или k) из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ обращаются в 0 (т.к. в любой опорной точке пересекаются, по крайней мере, 2 (или k) из ограничивающих прямых (плоскостей)).

5. Решение ОЗЛП может быть не единственным, если прямая $\Phi(X) = 0$ параллельна одной из ограничивающих прямых (плоскостей) множества G .

6. Решение ОЗЛП может не существовать, если множество G не замкнуто.

ЗАДАЧА°1¶

¶

Определить $\max F(X) = 3x_1 + 3x_2$ ¶

При ограничениях:¶

$$G : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases} ¶$$

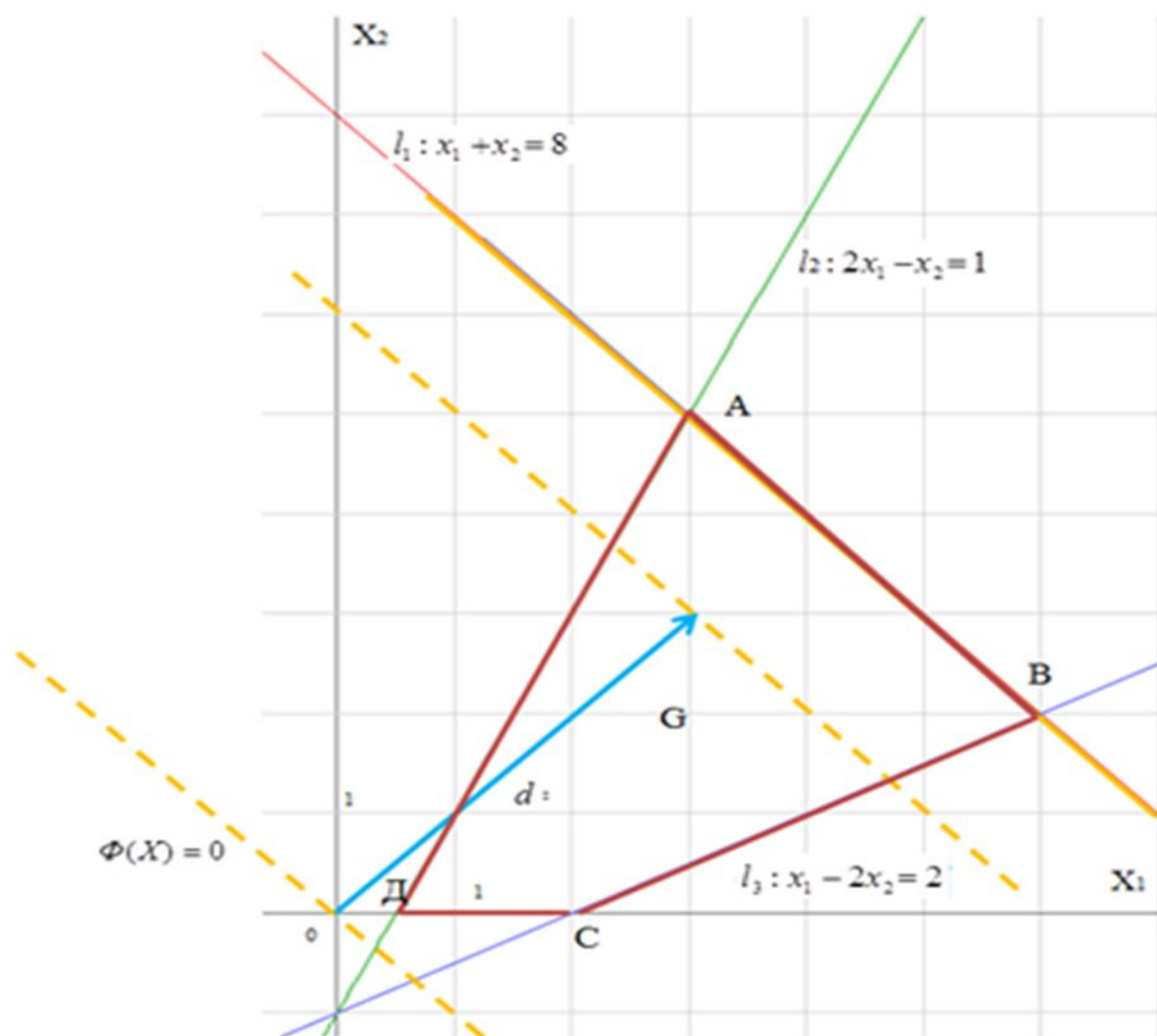
¶

$$l_1 : x_1 + x_2 = 8 ¶$$

$$l_2 : 2x_1 - x_2 = 1 ¶$$

$$l_3 : x_1 - 2x_2 = 2 ¶$$

$$d = \text{grad} F(X) = [3; 3] ¶$$



Линия уровня с максимальным значением $F(X)$ совпадает с отрезком AB , являющимся границей многоугольника $ABCD$.¶

Отрезок $AB \in l_1 : x_1 + x_2 = 8$ ¶

Следовательно, на всем отрезке AB линейная функция...

$F(X) = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2)$ принимает одно и то же значение:¶

$$F = 3 \cdot 8 = 24,¶$$

являющееся максимальным на G .¶

Это означает, что задача имеет бесконечное множество оптимальных решений.¶

Координаты точки A:

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow A(3;5)$$

Координаты точки B:

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow B(6;2)$$

Таким образом, точки отрезка AB задаются уравнением:

$$x_2 = 8 - x_1, \text{ где } 3 \leq x_1 \leq 6$$

Ответ:

1) $F_{\max} = 24$

2) Множество оптимальных решений:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 8 - c, \text{ где } 3 \leq c \leq 6 \end{cases}$$

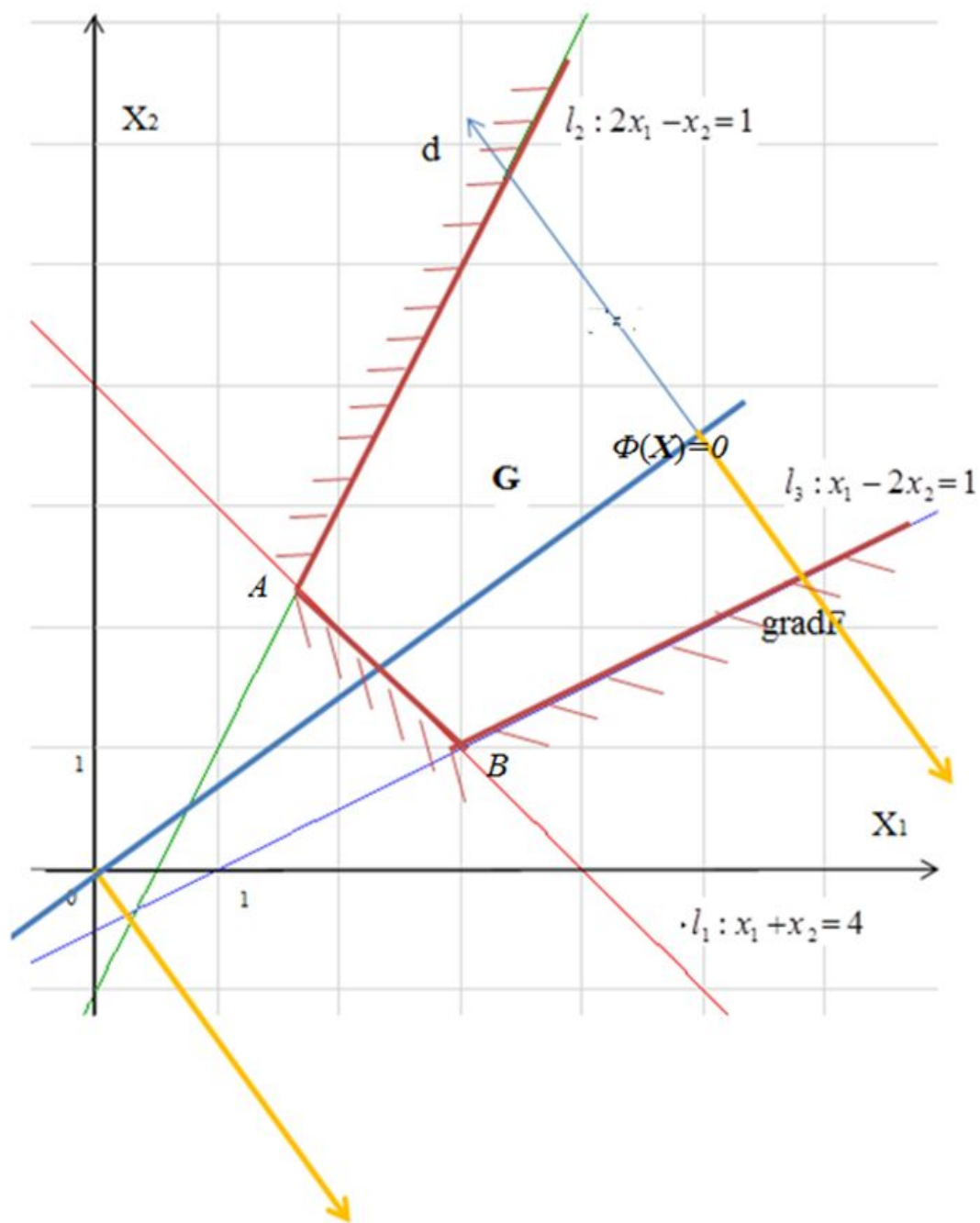
Задача 2



Определить $\min F(X) = 2x_1 - 3x_2 + 1$

При ограничениях:

$$G: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \rightarrow l_1 : x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \rightarrow l_2 : 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \rightarrow l_3 : x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{grad}F(X) = [2; -3]$$

Направление убывания функции $F(X)$ противоположно направлению $\text{grad}F(X)$

Отсюда следует, что если линию уровня $\Phi(X) = 0$ перемещать параллельно самой себе в направлении d , то она всегда будет пересекать незамкнутый многоугольник G . Следовательно, линейная функция $F(X)$ не ограничена снизу. Следовательно, конечного оптимума нет, т.е. $F_{\min} = -\infty$

Задача 3.

Определить $\min F(X) = x_2 + x_3 + x_4$
при ограничениях:

$$G: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Решение.

$$r(A) = r(A | B) = 2; \quad n - m = 2.$$

x_1, x_2 — основные переменные;

x_3, x_4 — свободные переменные.

Выразим основные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - x_3 + x_4 \\ 2x_1 = 8 - 3x_3 - x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

$$G: \begin{cases} -3x_3 - x_4 \geq -8 \\ x_3 + 3x_4 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow G: \begin{cases} 3x_3 + x_4 \leq 8 \rightarrow l_1: 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_3 + 3x_4 \geq 0 \rightarrow l_2: x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(X) = \frac{3}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4; \quad \text{grad} F(X) = \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right]; \quad d = -\text{grad} F(X)$$

Оптимальное решение достигается в точке $A(0; 0)$.

Значения переменных:

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 = 0 \end{cases} ;$$

$$F_{min} = 0$$

$$X^* = (4; 0; 0; 0) .$$