Решение алгебраических задач с помощью скалярного произведения векторов

Шишкина Елена Павловна,
учитель математики МБОУ г. Мурманска гимназии №2

Задание 2:

Доказать, что при любых x, y, z справедливо неравенство

$$xyz(x+y+z) \le x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2$$

РЕШЕНИЕ:

Введем векторы: $\vec{a}(xy; yz; zx)$ **и** $\vec{b}(xz; xy; yz)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x+y+z)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2}$$

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2$$

Так как, $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$

то $xyz(x+y+z) \le x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2$

Задание 3: Решите уравнение

$$\sin x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} + \sqrt{1+\cos^2 x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + 1},$$

если $\sin x > 0$

РЕШЕНИЕ:

$$\vec{a}(\sin x;1);\vec{b}\left(\sqrt{1-\cos^2 x};\sqrt{1+\cos^2 x}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sin x\cdot\sqrt{1-\cos^2 x}+\sqrt{1+\cos^2 x},$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\sin^2 x+1},|\vec{b}|=\sqrt{1-\cos^2 x+1+\cos^2 x}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+1}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

значит, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}, \sin x > 0,$$

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{1+\cos^2 x},$$

$$1 = \frac{1}{1+\cos^2 x}, \qquad 1+\cos^2 x = 1,$$

$$\cos x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\mathit{Ответ}: \qquad \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Задание 4: Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+y-2}, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ:

Пусть $\vec{a}(x;y),\vec{b}\left(\sqrt{y-1};\sqrt{x-1}\right),$

тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1},$

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2$ **(учитывая второе уравнение системы)**

$|\vec{b}|=\sqrt{x+y-2},\qquad |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=2\sqrt{x+y-2}.$

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$ *то* $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b},$

то есть $\dfrac{x}{\sqrt{y-1}}=\dfrac{y}{\sqrt{x-1}},x>1,y>1.$

$$x\sqrt{x-1}=y\sqrt{y-1}.$$

Рассмотрим $f(t)=t\sqrt{t-1};D(f)=[1;+\infty)$

Система примет вид:

$$\begin{cases} f(x)=f(y), \\ x^2+y^2=4, \\ x>1, \\ y>1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=y, \\ x^2+y^2=4, \\ x>1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ y=\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$

Задание 5:

Найти такое значение x, при котором функция

$$y=\sqrt{2\cos^2 2x+1}+\sqrt{2\sin^2 2x+1}$$

принимает наибольшее значение

Решение: D(y)=R

$$\vec{a}\left(\sqrt{2\cos^2 2x+1};\sqrt{2\sin^2 2x+1}\right),\qquad \vec{b}(1;1)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2\cos^2 2x+1}+\sqrt{2\sin^2 2x+1}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{2\cos^2 2x+1+2\sin^2 2x+1}=\sqrt{2+2}=2$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{2}$$

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,\qquad mo$

$$\sqrt{2\cos^2 2x+1}+\sqrt{2\sin^2 2x+1}\le 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2\cos^2 2x+1}+\sqrt{2\sin^2 2x+1}=2\sqrt{2}$$