



Шишкина Елена Павловна,
учитель математики МБОУ г.
Мурманска гимназии №2

Задание 2:

Доказать, что при любых
 x, y, z справедливо
неравенство

$$xyz(x + y + z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2$$

РЕШЕНИЕ:

Введем векторы: $\vec{a}(xy; yz; zx)$ и $\vec{b}(xz; xy; yz)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x^2 yz + xy^2 z + xyz^2 = xyz(x + y + z)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 z^2 + x^2 y^2 + y^2 z^2}$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2$$

Так как, $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$,

то $xyz(x + y + z) \leq x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2$

Задача 3: Решите уравнение

$$\sin x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + 1},$$

если $\sin x > 0$

РЕШЕНИЕ:

$$\vec{a}(\sin x; 1); \vec{b}(\sqrt{1 - \cos^2 x}; \sqrt{1 + \cos^2 x})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 x},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + 1}, |\vec{b}| = \sqrt{1 - \cos^2 x + 1 + \cos^2 x} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + 1}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|,$$

значит,

$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \sin x > 0,$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \cos^2 x},$$

$$1 = \frac{1}{1 + \cos^2 x}, \quad 1 + \cos^2 x = 1,$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Задание 4: Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+y-2}, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ:

Пусть $a(x; y); b(\sqrt{y-1}; \sqrt{x-1})$,

тогда $a \cdot b = x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1}$,

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2 \quad (\text{учитывая второе уравнение системы})$$

$$|b| = \sqrt{x+y-2}, \quad |a| \cdot |b| = 2\sqrt{x+y-2}.$$

Так как $a \cdot b = |a| \cdot |b|$, то $a \uparrow \uparrow b$,

то есть $\frac{x}{\sqrt{y-1}} = \frac{y}{\sqrt{x-1}}, x > 1, y > 1$.

$$x\sqrt{x-1} = y\sqrt{y-1}.$$

Рассмотрим $f(t) = t\sqrt{t-1}; D(f) = [1; +\infty)$

Система примет вид:

$$\begin{cases} f(x) = f(y), \\ x^2 + y^2 = 4, \\ x > 1, \\ y > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 4, \\ x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Задание 5:

Найти такое значение x ,
при котором функция

$$y = \sqrt{2 \cos^2 2x + 1} + \sqrt{2 \sin^2 2x + 1}$$

принимает наибольшее
значение

Решение: $D(y)=R$

$$\sqrt{2 \cos^2 2x + 1}; \sqrt{2 \sin^2 2x + 1}, \quad b(1;1)$$

$$a \cdot b = \sqrt{2 \cos^2 2x + 1} + \sqrt{2 \sin^2 2x + 1}$$

$$|a| = \sqrt{2 \cos^2 2x + 1 + 2 \sin^2 2x + 1} = \sqrt{2 + 2} = 2$$

$$|b| = \sqrt{2}$$

Так как $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$, *то*

$$\sqrt{2 \cos^2 2x + 1} + \sqrt{2 \sin^2 2x + 1} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2 \cos^2 2x + 1} + \sqrt{2 \sin^2 2x + 1} = 2\sqrt{2}$$