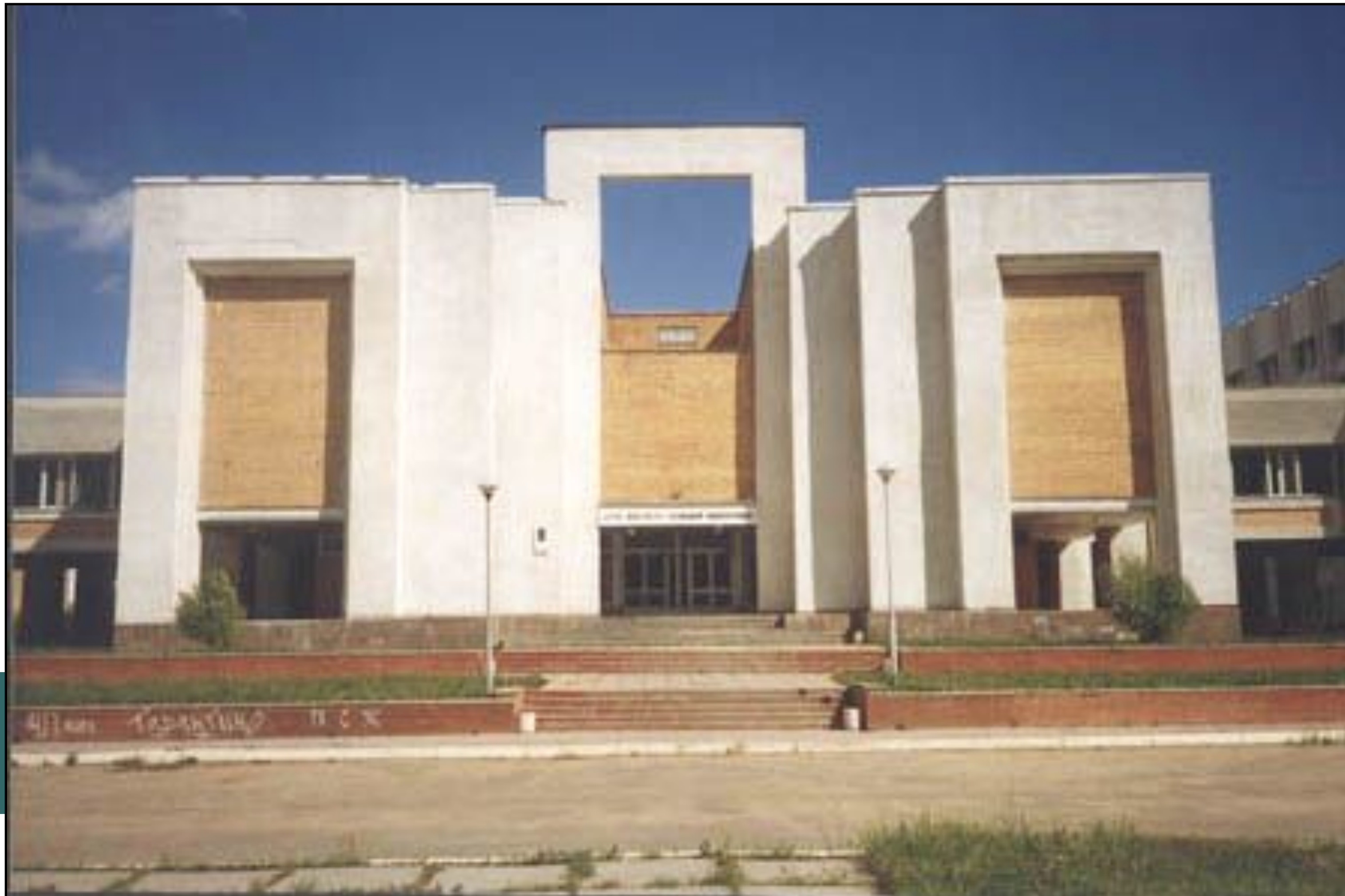
Обнинский Институт Атомной Энергетики



Обнинский Институт
Атомной Энергетики

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Гулина Ольга Михайловна

olga@iate.obninsk.ru

Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Пусть ξ- *Mξ=m*

$$M\xi = \int_a^b xp(x)dx, \quad ,$$

$$M\xi^2 = \int_a^b x^2 p(x)dx,$$

$$M\hat{\xi}_\varsigma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i = \hat{m},$$

$$\hat{m}_N \xrightarrow{P} m$$

Метод Монте-Карло

$$Mg(\xi) = \int_G g(x)p(x)dx$$

$Z = g(\xi)$,

Общий метод оценки математических ожиданий

if $D\xi = b^2$,

$$P\left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i - m \right| < \frac{xb}{\sqrt{N}} \right) = \Phi(x)$$

Оценка эмпирической дисперсии

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 \approx M\xi^2$$

$$D\xi \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)^2$$

Общий метод оценки математических ожиданий

$$I = \int_G f(P)\,p(P)\,dP,$$

$$\int_G p(P)\,dP = 1$$

$$MZ = I = \int_G f(P)\,p(P)\,dP,$$

$$\hat{M}Z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z(Q_i)$$

Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Пример:

$$I = \int_0^{\infty} f(x) e^{-kx} dx,$$ где k>0

Выберем p(x)=ke^{-kx} $_1$=k^{-1}f(x)

$$\hat{I} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} f_1(\xi_i) = (kN)^{-1} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$$

Алгоритм вычисления интеграла

1) формула для оценки интеграла;

2) формула для получения случайной величины ξ;

3) формула для оценки погрешности

Простейший метод Монте-Карло

- I= $\int\limits_G f(P)dP$ →

$p_1(P)=1/S_G$ при $P\in G$

$f_1(P)=S_G*f(P)$

$$\int\limits_G f(P)dP = \int\limits_G f_1(P)p_1(P)dP$$

Трудоемкость алгоритма

Монте-Карло

$$t * D\xi$$

Способы уменьшения дисперсии

1 Частичное аналитическое интегрирование

1.1 Выделение главной части

1.2 Интегрирование по части области

Частичное аналитическое интегрирование

Выделение главной части

$$I = \int_G f(P)\,p(P)\,dP,$$

h(P) ∈L$_2$(P)

$$\int_G h(P)\,p(P)\,dP = C$$

$$I = C + \int_G \big(f(P) - h(P)\big)\,p(P)\,dP$$

$$\hat{I} = C + \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}\big(f(Q_i) - h(Q_i)\big)$$

Частичное аналитическое интегрирование

Выделение главной части

$$DZ = \int_G \left(f(P) - h(P)\right)^2 p(P)\,dP - (I - C)^2$$

если $$\int_G \left(f(P) - h(P)\right)^2 p(P)\,dP \le \varepsilon$$ **,**

то и DZ<ε

Частичное аналитическое интегрирование

Интегрирование по части области

$$I = \int_G f(P)\,p(P)\,dP, \qquad \int_B f(P)p(P)dP = C,$$

$$\int_B p(P)dP = c,$$

$$I = \int_{G_1} f(P)p(P)dP + C,$$

где **0<c<1**

G1=G\B

Частичное аналитическое интегрирование

Интегрирование по части области

В G1 p1(P)=p(P)/(1-c)

$$I = \int\limits_{G_1} (1-c) f(P) \frac{p(P)}{1-c} dP + C,$$

$$\hat{I} = C + \frac{1-c}{N} \sum_{i=1}^{N} f(Q_i)$$

DZ`<(1-c)DZ

2 Метод существенной выборки

$$I_0 = \int_G f(P)\,dP$$

$$\int_G \left| f(P) \right| dP > 0$$

Плотность ***p(P),*** определенную в ***G***, назовем *допустимой по отношению к* ***f(P),*** *если* ***p(P)>0*** *в тех точках, где* ***f(P) ≠0.***

Метод существенной выборки

$$Z_0(P) = \begin{cases} f(P)/\,p(P), P \in G^+ \\ 0, P \in G_0, \end{cases}$$

$$MZ_0(Q) = \int\limits_G Z_0(P)p(P)dP = \int\limits_{G^+} f(P)dP = I_0$$

$$\hat{I} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_0(Q_i)$$

Метод существенной выборки

$$DZ_0 = \int\limits_G Z_0^2(P)p(P)dP - I_0^2 = \int\limits_{G^+} \left[f^2(P) / p(P) \right] dP - I_0^2$$

Теорема. Минимальная дисперсия DZ_0 реализуется в случае, когда плотность ***p*(*P*) пропорциональна |*f*(*P*)|**, и равна

$$D\hat{Z}_0 = \left[\int\limits_G \left| f(P) \right| dP \right]^2 - I_0^2$$

Метод существенной выборки

$$\hat{p}(P) = \frac{|f(P)|}{\int\limits_G |f(P)|\,dP}$$

желательно выбирать плотность p(P) по возможности пропорциональной |f(P)|

Метод предложен Г. Каном и называется ***методом существенной выборки*** (***importance sampling***)

Метод существенной выборки

Пример:

$$I = \int_0^1 e^x dx$$

$e^x \sim 1+x+\ldots$

$p(x)=(2/3)(1+x)$ =>

$$I = \frac{3}{2}\int_0^1 e^x (1+x)^{-1} p(x) dx$$

$$\hat{I} = \frac{3}{2N}\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{\xi_i}}{1+\xi_i} \qquad \xi = \sqrt{1+3\gamma} - 1$$