



# Обнинский Институт Атомной Энергетики





*Обнинский Институт  
Атомной Энергетики*

***МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ  
СИСТЕМ***

*Гулина Ольга Михайловна*

***olga@iate.obninsk.ru***

Copyright © 2001 by Nataly Pashkova

E-mail: [natik\\_pna@mail.ru](mailto:natik_pna@mail.ru)

# Вычисление интегралов методом Монте-Карло

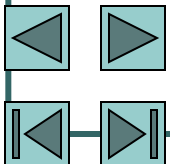
Пусть  $\xi$  —  $M\xi = m$

$$M\xi = \int_a^b xp(x)dx, \quad \square,$$

$$M\xi^2 = \int_a^b x^2 p(x)dx,$$

$$M\hat{\xi}_\zeta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i = \hat{m},$$

$$\hat{m}_N \xrightarrow{P} m$$



# Метод Монте-Карло

---

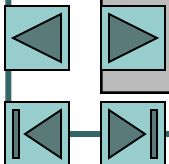
$$Mg(\xi) = \int_G g(x)p(x)dx$$

$$Z=g(\xi),$$

# Общий метод оценки математических ожиданий

*if  $D\xi=b^2$ ,*

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\xi_i - m\right| < \frac{xb}{\sqrt{N}}\right) = \Phi(x)$$



# Оценка эмпирической дисперсии

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \approx M\xi^2$$

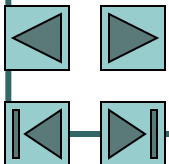
$$D\xi \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \right)^2$$

# Общий метод оценки математических ожиданий

$$I = \int_G f(P) p(P) dP, \quad \int_G p(P) dP = 1$$

$$MZ = I = \int_G f(P) p(P) dP,$$

$$\hat{M}Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z(Q_i)$$



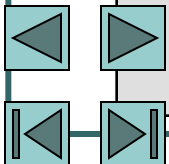
# Вычисление интегралов методом Монте-Карло

**Пример:**

$$I = \int_0^{\infty} f(x) e^{-kx} dx, \quad \text{где } k > 0$$

Выберем  $p(x) = k e^{-kx}$       $f_1 = k^{-1} f(x)$

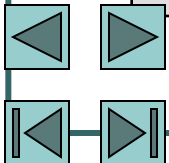
$$\hat{I} = N^{-1} \sum_{i=1}^N f_1(\xi_i) = (kN)^{-1} \sum_{i=1}^N f(\xi_i)$$






# Алгоритм вычисления интеграла

- 1) формула для оценки интеграла;
- 2) формула для получения случайной величины  $\xi$ ;
- 3) формула для оценки погрешности



# Простейший метод Монте-Карло

- $I = \int_G f(P) dP$  

$$p_1(P) = 1/S_G \text{ при } P \in G$$

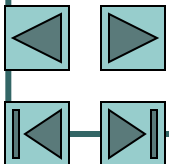
$$f_1(P) = S_G * f(P)$$

$$\int_G f(P) dP = \int_G f_1(P) p_1(P) dP$$

---

***Трудоёмкость* алгоритма  
Монте-Карло**

$$t^* D \xi$$

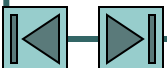
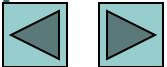


# Способы уменьшения дисперсии

## 1 Частичное аналитическое интегрирование

1.1 Выделение главной части

1.2 Интегрирование по части области



# Частичное аналитическое интегрирование

## Выделение главной части

$$I = \int_G f(P) p(P) dP,$$



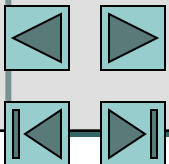
$$h(P)$$

$$\in L_2(P)$$

$$\int_G h(P) p(P) dP = C$$

$$I = C + \int_G (f(P) - h(P)) p(P) dP$$

$$\hat{I} = C + \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N (f(Q_i) - h(Q_i))$$



# Частичное аналитическое интегрирование

## Выделение главной части

$$DZ = \int_G (f(P) - h(P))^2 p(P) dP - (I - C)^2$$

если

$$\int_G (f(P) - h(P))^2 p(P) dP \leq \varepsilon ,$$

**то и  $DZ < \varepsilon$**



# Частичное аналитическое интегрирование

## Интегрирование по части области

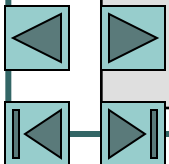
$$I = \int_G f(P) p(P) dP, \quad \int_B f(P) p(P) dP = C,$$

$$\int_B p(P) dP = c,$$

где  $0 < c < 1$

$$I = \int_{G_1} f(P) p(P) dP + C,$$

$$G_1 = G \setminus B$$



# Частичное аналитическое интегрирование

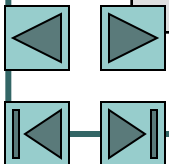
## Интегрирование по части области

**B G1**  $p_1(P) = p(P)/(1-c)$

$$I = \int_{G_1} (1-c) f(P) \frac{p(P)}{1-c} dP + C,$$

$$\hat{I} = C + \frac{1-c}{N} \sum_{i=1}^N f(Q_i)$$

$$DZ' < (1-c)DZ$$





## 2 Метод существенной выборки

---

$$I_0 = \int_G f(P) dP \quad \int_G |f(P)| dP > 0$$

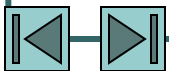
Плотность  $p(P)$ , определенную в  $G$ , назовем *допустимой по отношению к  $f(P)$* , если  $p(P) > 0$  в тех точках, где  $f(P) \neq 0$ .

# Метод существенной выборки

$$Z_0(P) = \begin{cases} f(P)/p(P), P \in G^+ \\ 0, P \in G_0, \end{cases}$$

$$MZ_0(Q) = \int_G Z_0(P)p(P)dP = \int_{G^+} f(P)dP = I_0$$

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_0(Q_i)$$



## Метод существенной выборки

$$DZ_0 = \int_G Z_0^2(P) p(P) dP - I_0^2 = \int_{G^+} [f^2(P) / p(P)] dP - I_0^2$$

**Теорема.** Минимальная дисперсия  $DZ_0$  реализуется в случае, когда плотность  $p(P)$  пропорциональна  $|f(P)|$ , и равна

$$D\hat{Z}_0 = \left[ \int_G |f(P)| dP \right]^2 - I_0^2$$

# Метод существенной выборки

$$\hat{p}(P) = \frac{|f(P)|}{\int_G |f(P)| dP}$$

**желательно выбирать плотность  $p(P)$   
по возможности пропорциональной  $|f(P)|$**

Метод предложен Г. Каном и называется  
**методом существенной выборки**  
*(importance sampling)*

# Метод существенной выборки

Пример:

$$I = \int_0^1 e^x dx \quad e^x \sim 1+x+\dots$$

$$p(x) = (2/3)(1+x) \Rightarrow$$

$$I = \frac{3}{2} \int_0^1 e^x (1+x)^{-1} p(x) dx$$

$$\hat{I} = \frac{3}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{e^{\xi_i}}{1+\xi_i} \quad \xi = \sqrt{1+3\gamma} - 1$$

