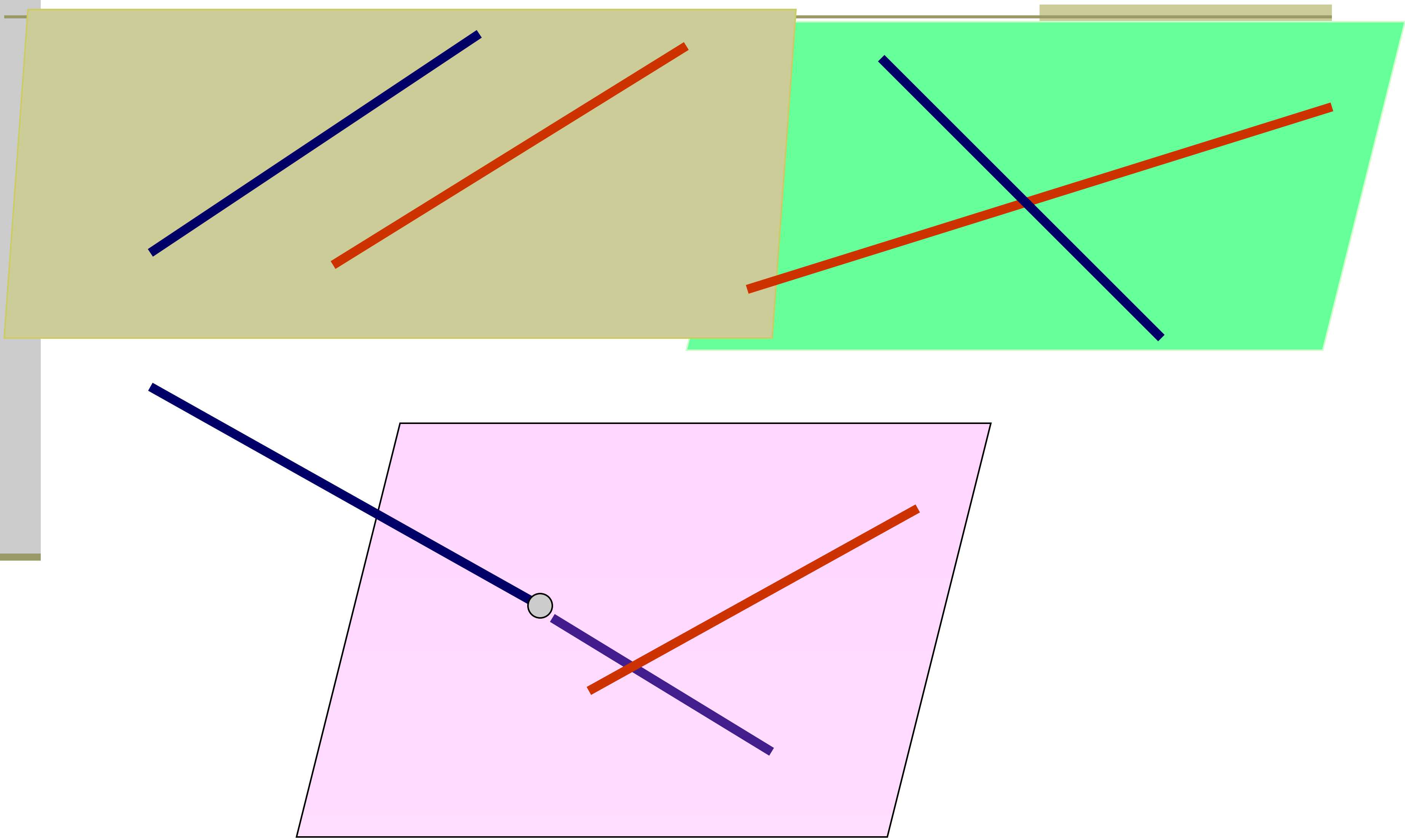
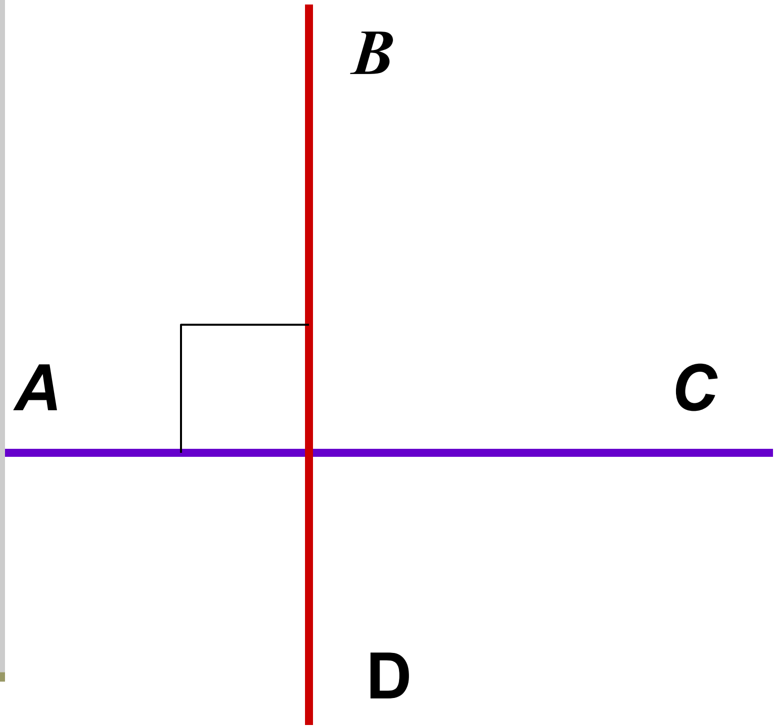
Взаимное расположение прямой и плоскости

Взаимное расположение двух прямых в пространстве



Планиметрия



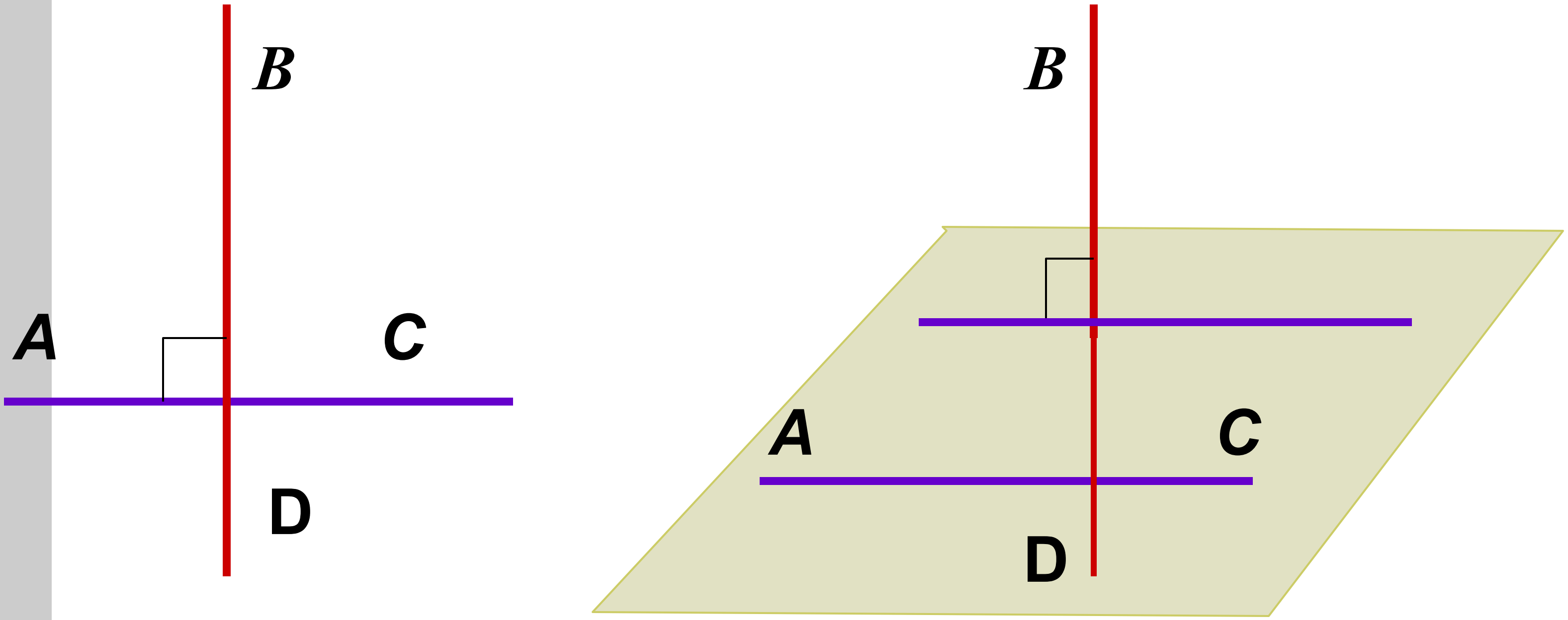
1. Определение:

Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными, если они образуют четыре прямых угла.

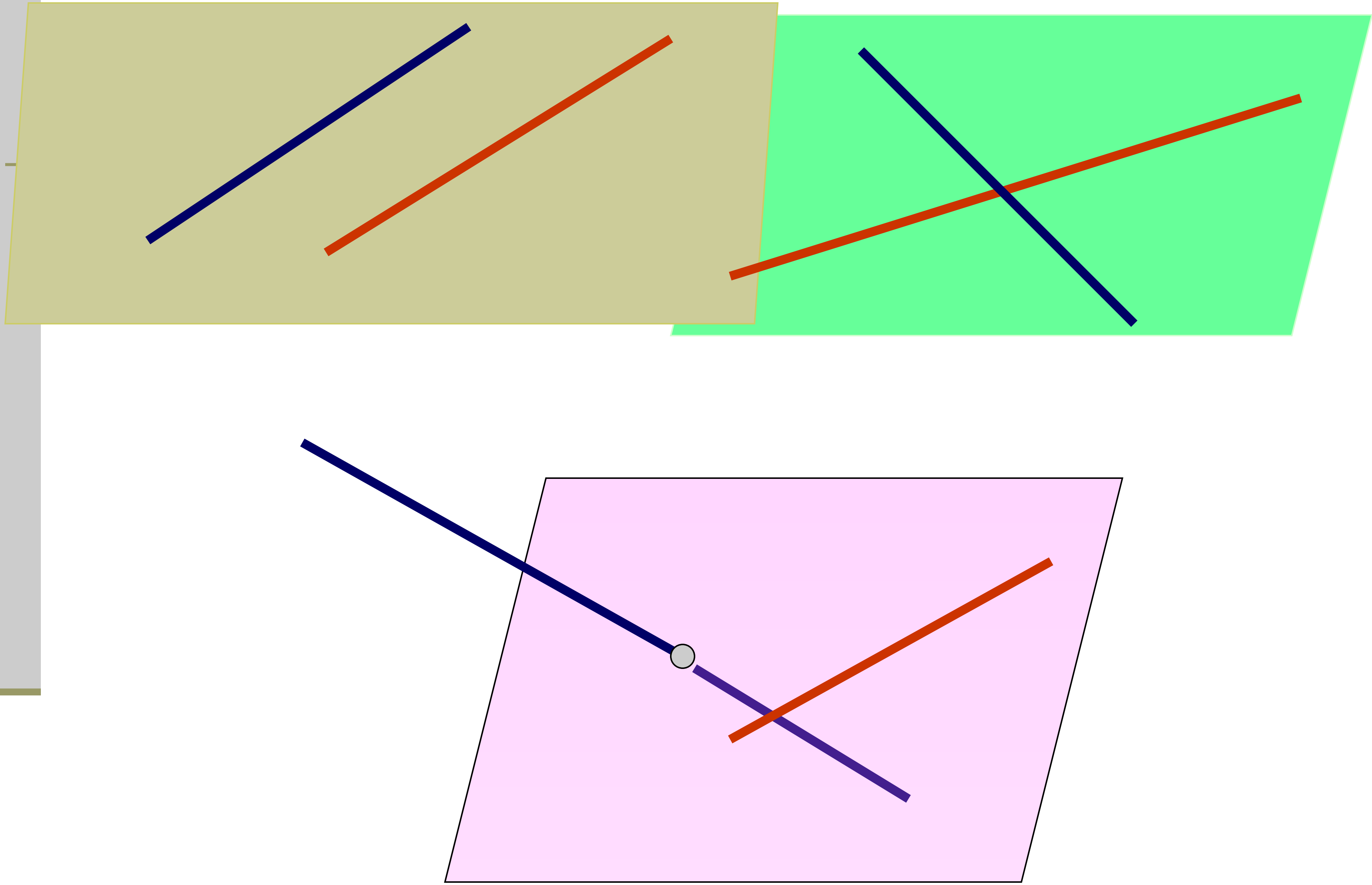
2. Свойство:

Две прямые перпендикулярные третьей не пересекаются.

Стереометрия

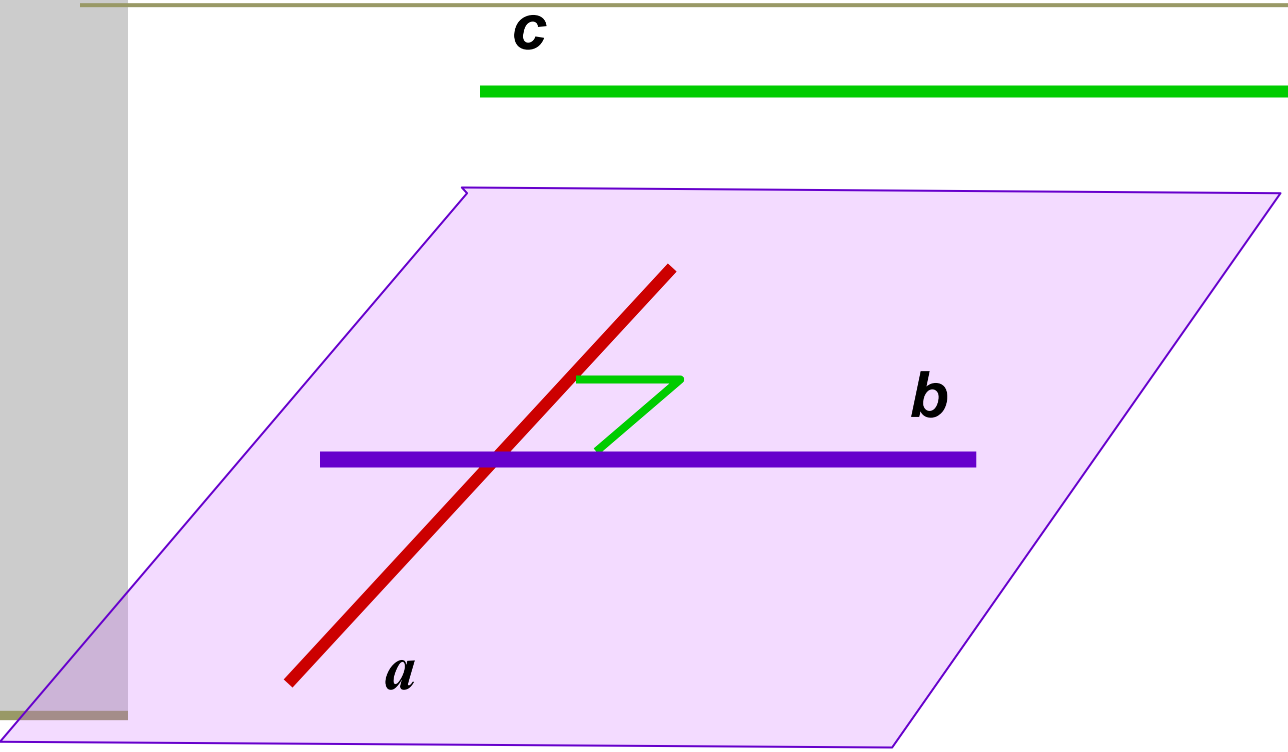


Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.



Прямые *a* и *b* пересекаются.

Прямые *a* и *c* скрещиваются.



$$a \perp b$$

$$a \perp c$$

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой

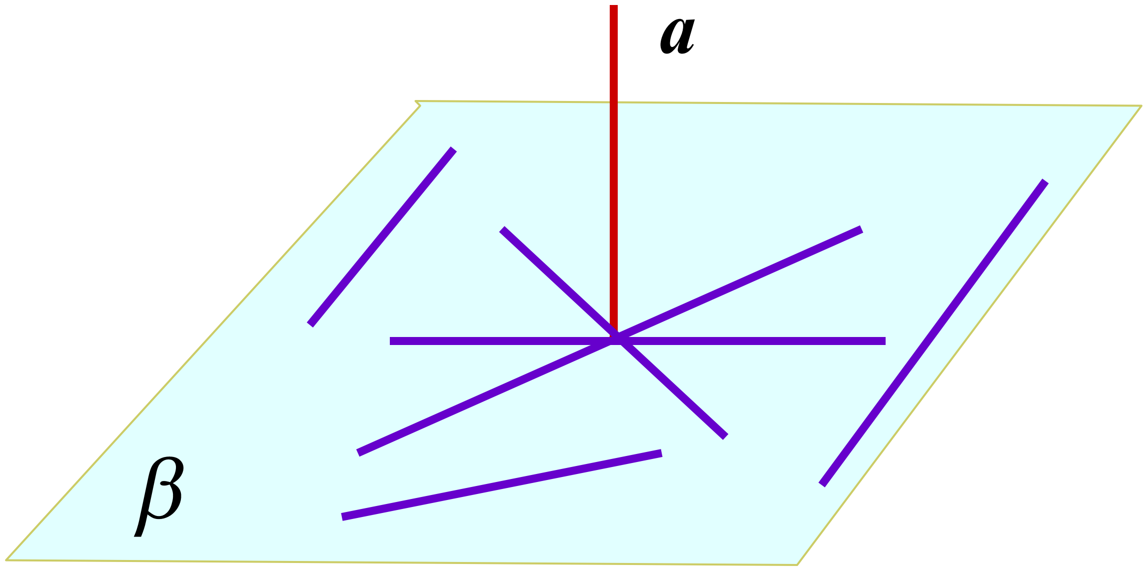
2. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости.

Знать определение прямой перпендикулярной к плоскости.

Уметь формулировать и доказывать теоремы прямую и обратную о параллельных прямых.

Определение:

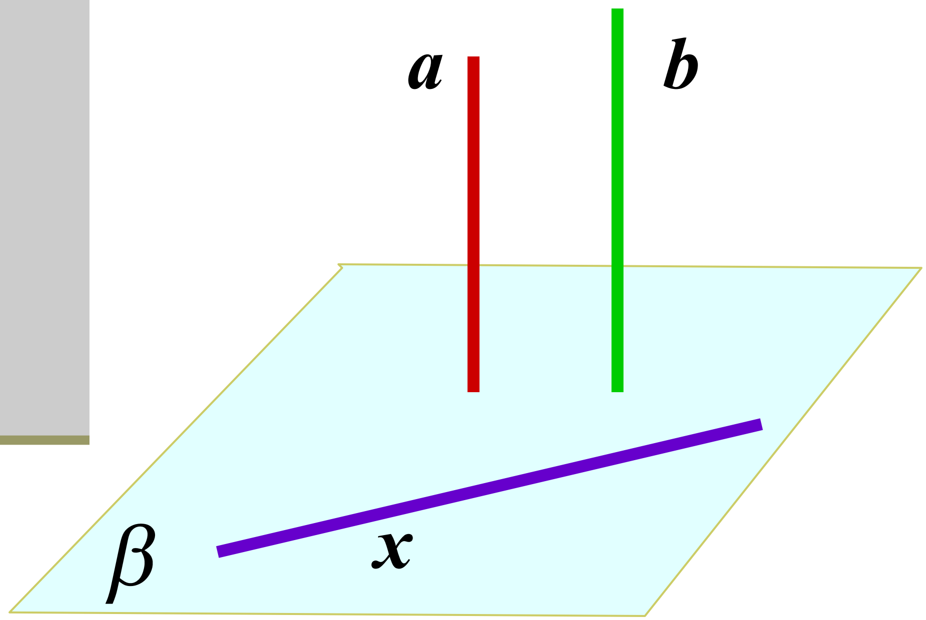
Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.



$$a \perp \beta$$

Теорема 1

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то другая прямая перпендикулярна к этой плоскости



Дано: $a \parallel b \quad a \perp \beta$

Доказать $b \perp \beta$

Доказательство

$x \in \beta$

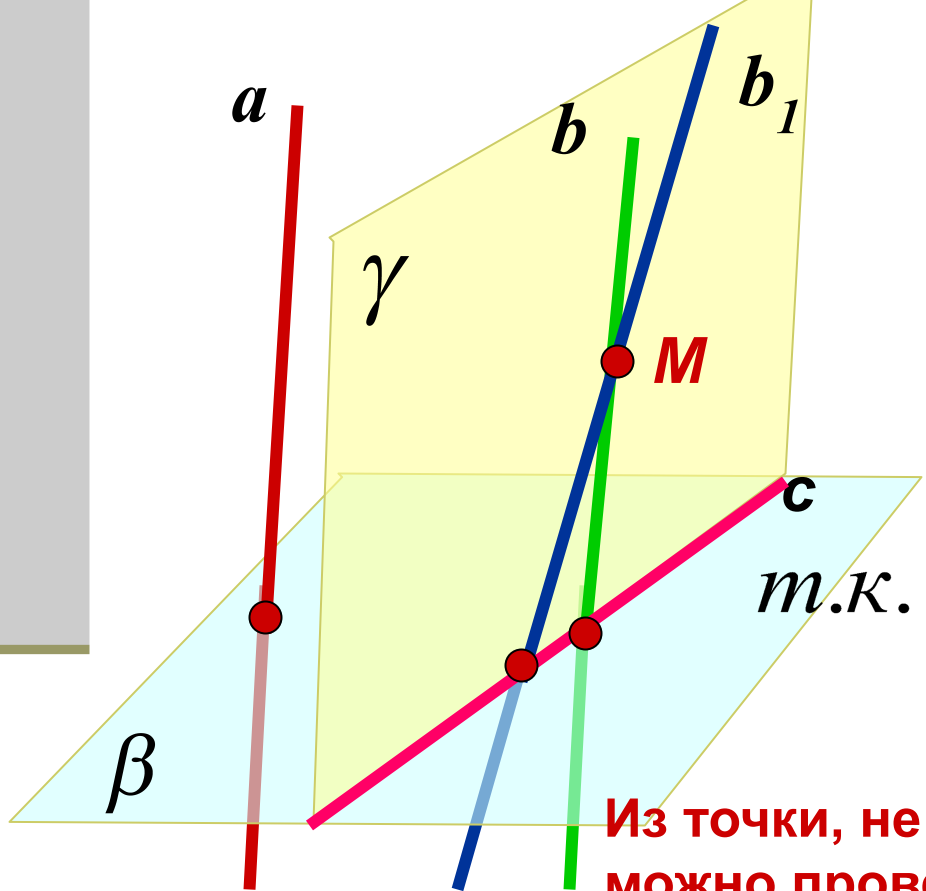
$a \perp \beta, \text{то } a \perp x$

$\text{по лемме } b \perp x$

$b \perp \beta$

Теорема 2. (Обратная)

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



Дано: $a \perp \beta \quad b \perp \beta$

Доказать $a \parallel b$

Доказательство

$M \in b \quad b_1 \parallel a$

$т.к. \ a \perp \beta, то \ по \ T_1 \ \ b_1 \perp \beta$

$b_1 = b$

Из точки, не лежащей на данной прямой, можно провести перпендикуляр к данной прямой, и притом только один.

О

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Л

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой

О

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Т1

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то другая прямая перпендикулярна к этой плоскости

Т2

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Устная работа

№1 Верно ли утверждение: прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к прямой, принадлежащей плоскости?

№2 Могут ли быть перпендикулярны к плоскости две стороны треугольника одновременно?

№3 Сторона АВ правильного треугольника АВС лежит в плоскости α . Может ли прямая ВС быть перпендикулярна к этой плоскости?

Устная работа

№4

Верно ли утверждение: если прямая перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к данной плоскости?

№5

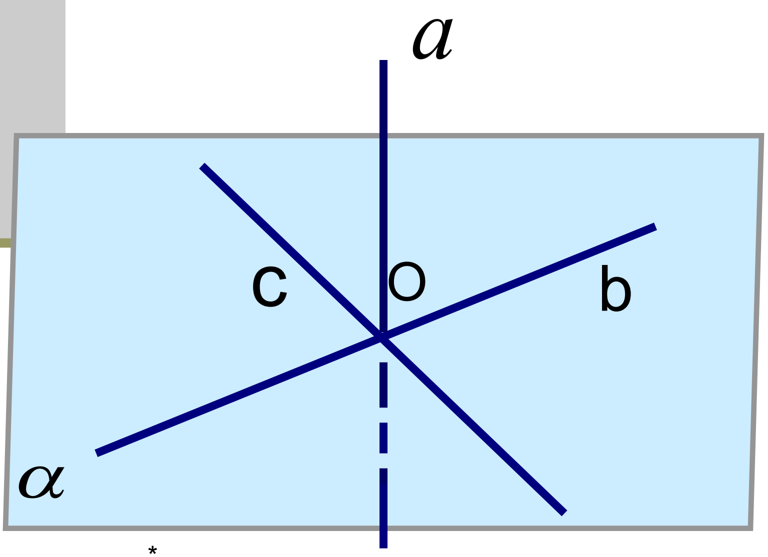
Прямая *а* перпендикулярна к плоскости α , прямая b не перпендикулярна к плоскости α . Могут ли прямые а и b быть параллельными?

№6

Верно ли утверждение: если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна лежащим в этой плоскости двум сторонам треугольника?

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

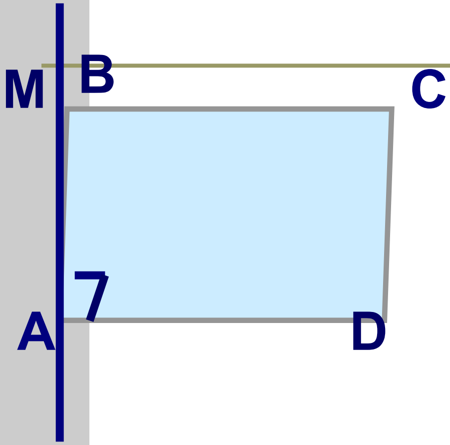
Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости



$$\frac{a \perp b \qquad a \perp c \qquad b \cap c = O}{a \perp \alpha}$$

*

Устная работа



№7 Через вершину квадрата ABCD проведена прямая AM, перпендикулярная к плоскости квадрата. Докажите, что прямая AD перпендикулярна к плоскости, проходящей через прямые AM и AB.

№8 На практике вертикальность столба проверяют, глядя на столб поочередно с двух направлений. Как обосновать правильность такой проверки?

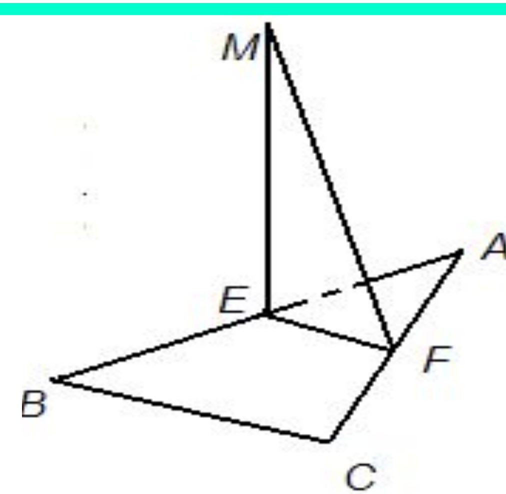
*

КАРТОЧКА 1.

Отрезок EF является средней линией прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB=90^\circ$). Через точку E проведен перпендикуляр ME к плоскости этого треугольника.

Доказать:

1) $MF \perp AC$, 2) $MC=MA$.



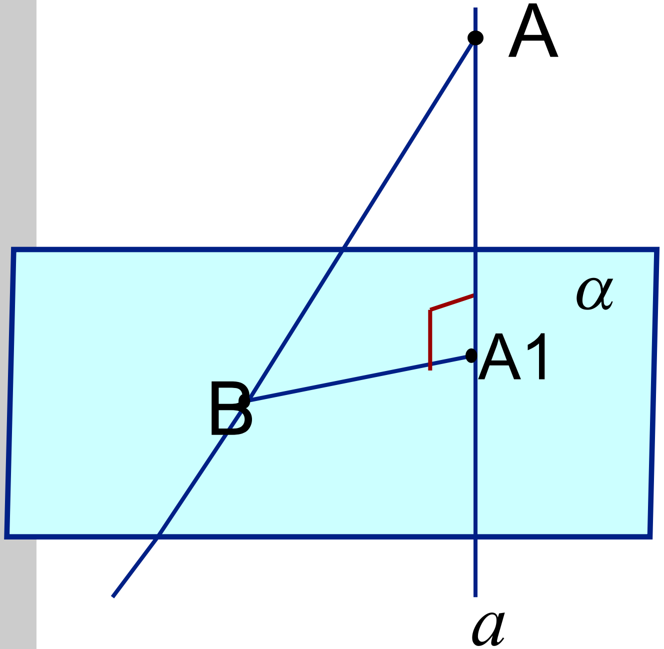
*

EF – ср. лин. $\triangle ABC \Rightarrow EF \parallel BC \Rightarrow \angle AFE = \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC \perp EF$

$ME \perp (ABC) \xRightarrow{\text{опр}} ME \perp AC$

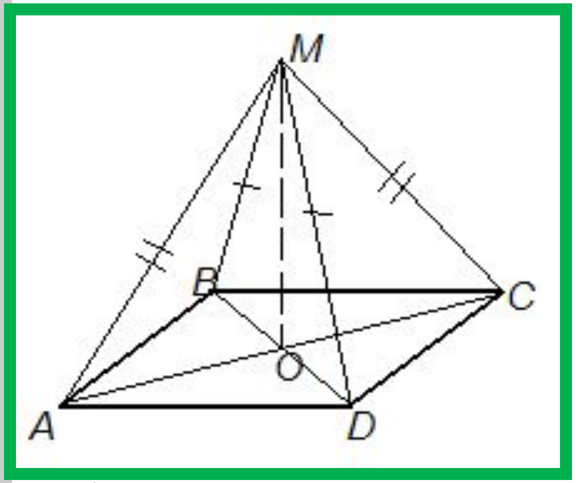
$$\left.\begin{aligned} &AC \perp EF \\ &AC \perp ME \\ &ME \cap EF = E \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{пр}} AC \perp (MEF) \Rightarrow AC \perp MF$$

Перпендикуляр и наклонная к плоскости



Прямая a проходит через точку А перпендикулярно к плоскости .
Точка A_1- проекция точки А на плоскость α .
Отрезок AA_1 называется перпендикуляром к плоскости.
Точка A_1 -основание перпендикуляра.
Расстояние от точки А до плоскости равно длине этого перпендикуляра.
Точка В - произвольная точка плоскости.
Отрезок АВ- наклонная к плоскости.
Точка В-основание наклонной.
Отрезок A_1B -проекция наклонной АВ на плоскость α .

Решение задач по готовым чертежам



Дано:
ABCD – параллелограмм.
Доказать:
прямая MO ⊥ (ABC)

Док-во:

по св-ву диаг пар-ма т. O – сер. BD и AC.

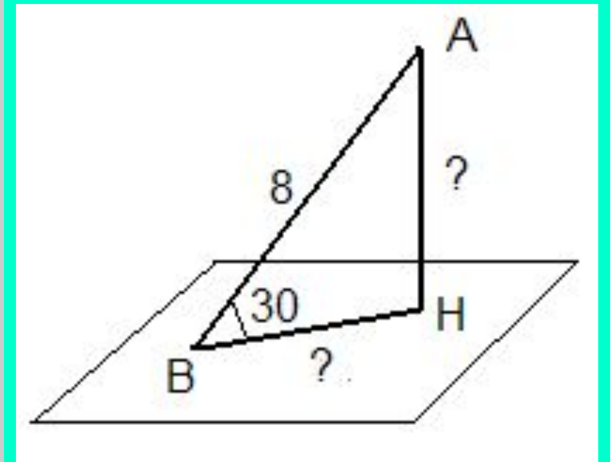
△BMD – р/б, BO = OD ⇒ MO – медиана $\xRightarrow{\text{по св-ву р/б }\triangle}$ MO – высота ⇒ MO ⊥ BD

Аналогично MO ⊥ AC

AC ∩ BD = O

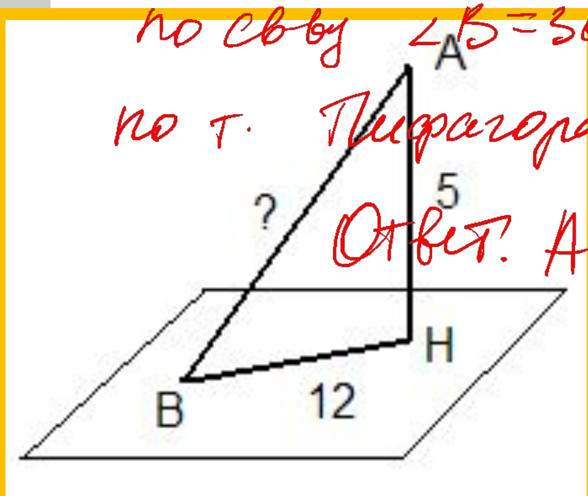
$\left.\begin{array}{l} MO \perp BD \\ MO \perp AC \\ BD \cap AC = O \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{пр}} MO \perp (ABC)$

Решение задач по готовым чертежам



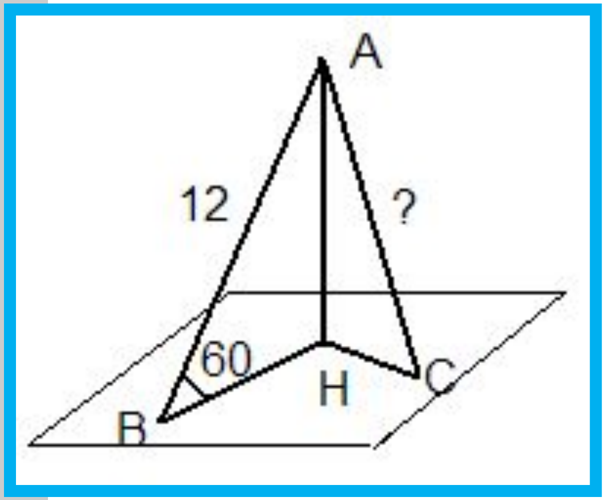
Дано:
AH $\perp \alpha$, AB – наклонная.
Найти AH, BH.

Решение:
ΔAHB – прямоуг.
по св-ву $\angle B = 30^\circ$ $AH = \frac{1}{2} AB = 4$
по т. Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
Ответ: $AH = 4$; $BH = 4\sqrt{3}$



Дано:
AH $\perp \alpha$, AB – наклонная.
Найти AB.

Решение задач по готовым чертежам



Дано: $AH \perp \alpha$,
AB и AC – наклонные.
AB=12, HC= $6\sqrt{6}$.
Найти AC.

Решение:

ΔABH – прямоуг

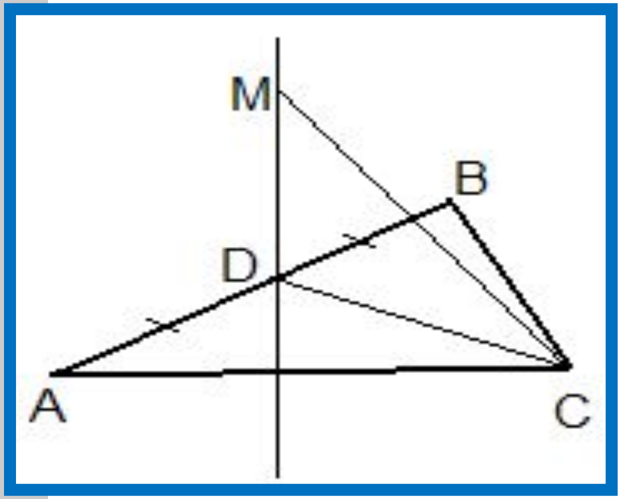
$\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle BAH = 30^\circ$ по св-ву $\angle 30^\circ$ $BH = \frac{1}{2} AB =$

$= 6$; по т. Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

ΔAHC – прямоуг.

по т. Пифагора $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{324} = 18$

*



Дано: прямая MD $\perp$ (ABC) ,

Δ ABC- равносторонний,

$AB = 2\sqrt{3}, MD = 4$

Найти MC.

Решение:

Δ ABC – равностор. $\Rightarrow \Delta$ ADC – прямоуг.

по т. Пифагора $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}^2} = 3$

Δ MDC – прямоуг ($MD \perp (ABC) \Rightarrow MD \perp DC$)

по т. Пифагора $MC = \sqrt{MD^2 + DC^2} = 5.$

Ответ: 5

*