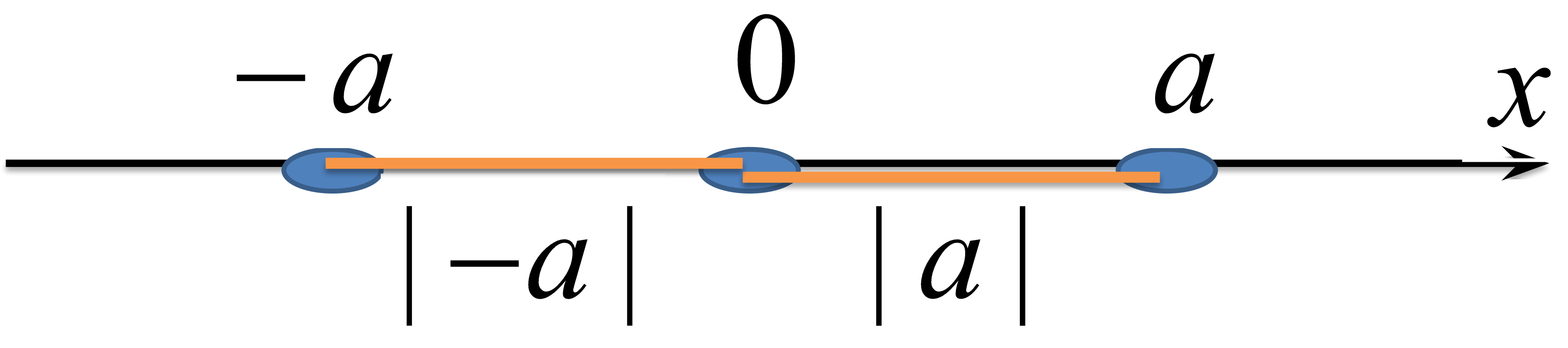
Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

Родионова Г. М., учитель математики МБУ «Школа №82»
г.о.Тольятти

Определение модуля

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$$



Определение модуля

$$|a - b|$$

Определение модуля

$$|a-b|$$

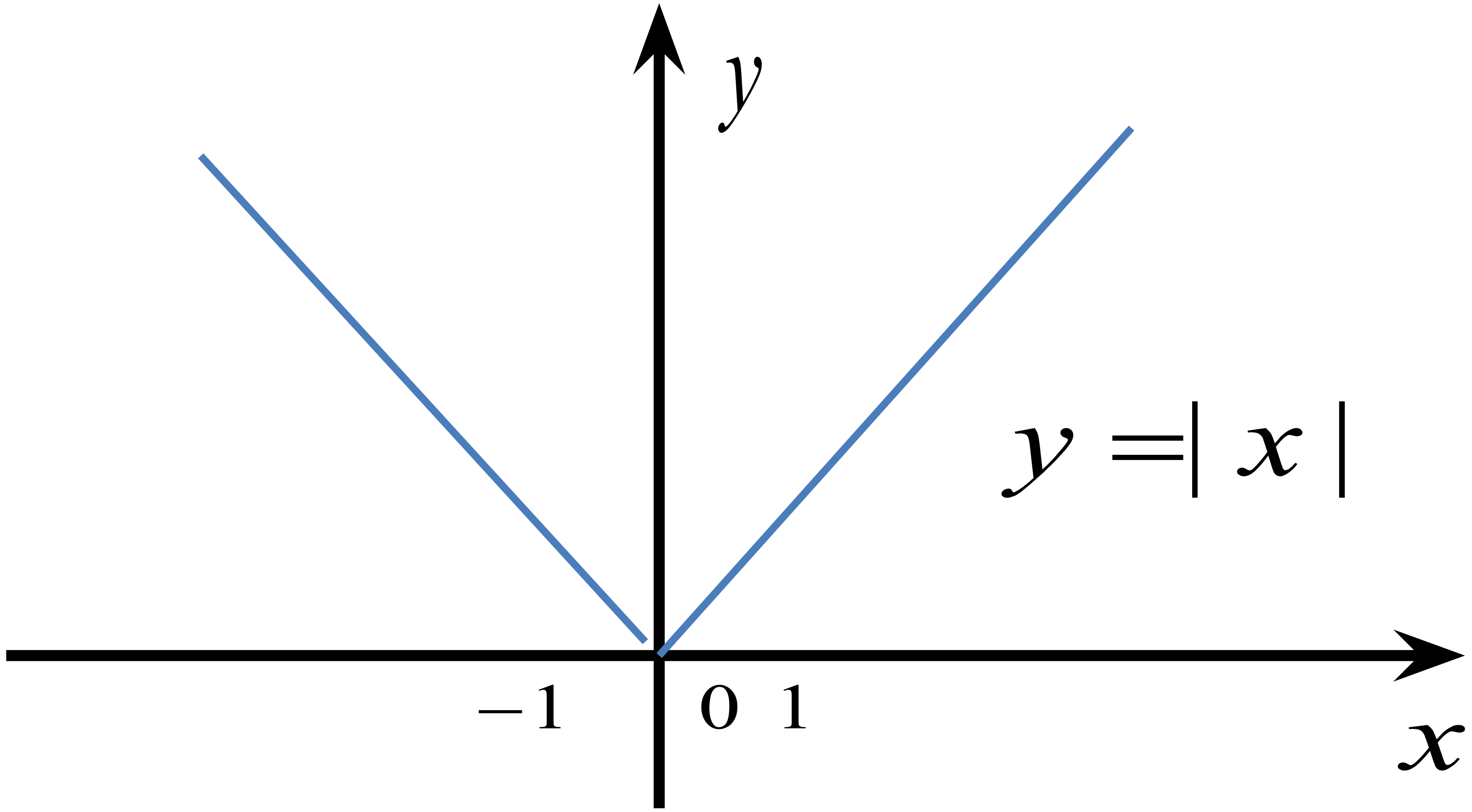


График функции $y = |x|$

Решение уравнений с модулем

$$1.\ |f(x)| = a, \qquad a \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$$

$$\textit{при}\ \ a < 0\ \ \textit{решений нет}$$

Решите уравнения:

1. $|2x - 3| = 5$

2. $|2x^2 + 5x| = 3$

Решение уравнений с модулем

$$2.\ |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} f(x) &= -g(x), \\ f(x) &= g(x). \end{aligned}\right.$$

Решите уравнения:

1. $|2x-3| = |6-x|$

2. $|2x^2+5x| = |x^2-4|$

Решение уравнений с модулем

$$3.\ |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

$$4.\ |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Решите уравнения:

1. $|2x-3|=5-x$

2. $|2x^2+5x|=3+x$

Решите уравнение:

$$x^2-4|x|+3=0$$

$$x^2-4|x|+3=0$$

$$|x|=t \Rightarrow x^2=|x|^2=t^2$$

$$t^2-4t+3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=3 \end{array}\right.$$

Обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} |x|=1, \\ |x|=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1, \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$$

$$x^2-4|x|+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+4x+3=0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Задание на дом

1). $|5x-2|=4$

2). $|3-7x|=-2$

3). $|3-4x|=|5-6x|$

4). $|14-2x|=3-5x$

5). $7x^2+2|x-1|+2=0$

6 способов решения одного уравнения

$$|x+1|+|x-3|=4$$

Уравнение с модулем

Решить уравнение

$$|x+1|+|x-3|=4$$

I способ. **Решение:**

Найдем нули подмодульных выражений

$$x+1=0, x=-1$$

$$x-3=0, x=3.$$

Для раскрытия двух модулей рассмотрим следующие 4 случая:

$$a)\begin{cases} x+1<0 \\ x-3<0 \\ -x-1-x+3=4; \end{cases}$$

ил
и

$$б)\begin{cases} x+1<0 \\ x-3\geq 0 \\ -x-1+x-3=4; \end{cases}$$

ил
и

$$в)\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-3<0 \\ x+1-x+3=4; \end{cases}$$

ил
и

$$г)\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ x+1+x-3=4; \end{cases}$$

$$а)\begin{cases} x < -1 \\ x < 3 \\ x = -1; \end{cases}$$

Решений нет

$$б)\begin{cases} x < -1 \\ x \geq 3 \\ 0 \cdot x = 8; \end{cases}$$

Решений нет

$$в)\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 3 \\ 0 \cdot x = 0; \end{cases}$$

$$-1 \leq x < 3.$$

$$г)\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 3 \\ x = 3; \end{cases}$$

$$x = 3.$$

Ответ: [-1;3]

Решите уравнение $|x+1|+|x-3|=4$

II способ.

Так как обе части уравнения неотрицательные, то при возведении их в квадрат получим уравнение равносильное данному.

$$(|x+1|+|x-3|)^2=4^2,$$

$$(x+1)^2+2|x+1|\cdot|x-3|+(x-3))^2=16,$$

$$|x^2-2x-3|=-x^2+2x+3.$$

Из определения модуля следует. Что последнее равенство выполнимо, если $x^2-2x-3\le 0,$

т.е. когда $x\in[-1;3].$

Ответ: [-1;3]

III способ - графический

Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$|x-3| = 4 - |x+1|.$$

Далее изобразим графики функций

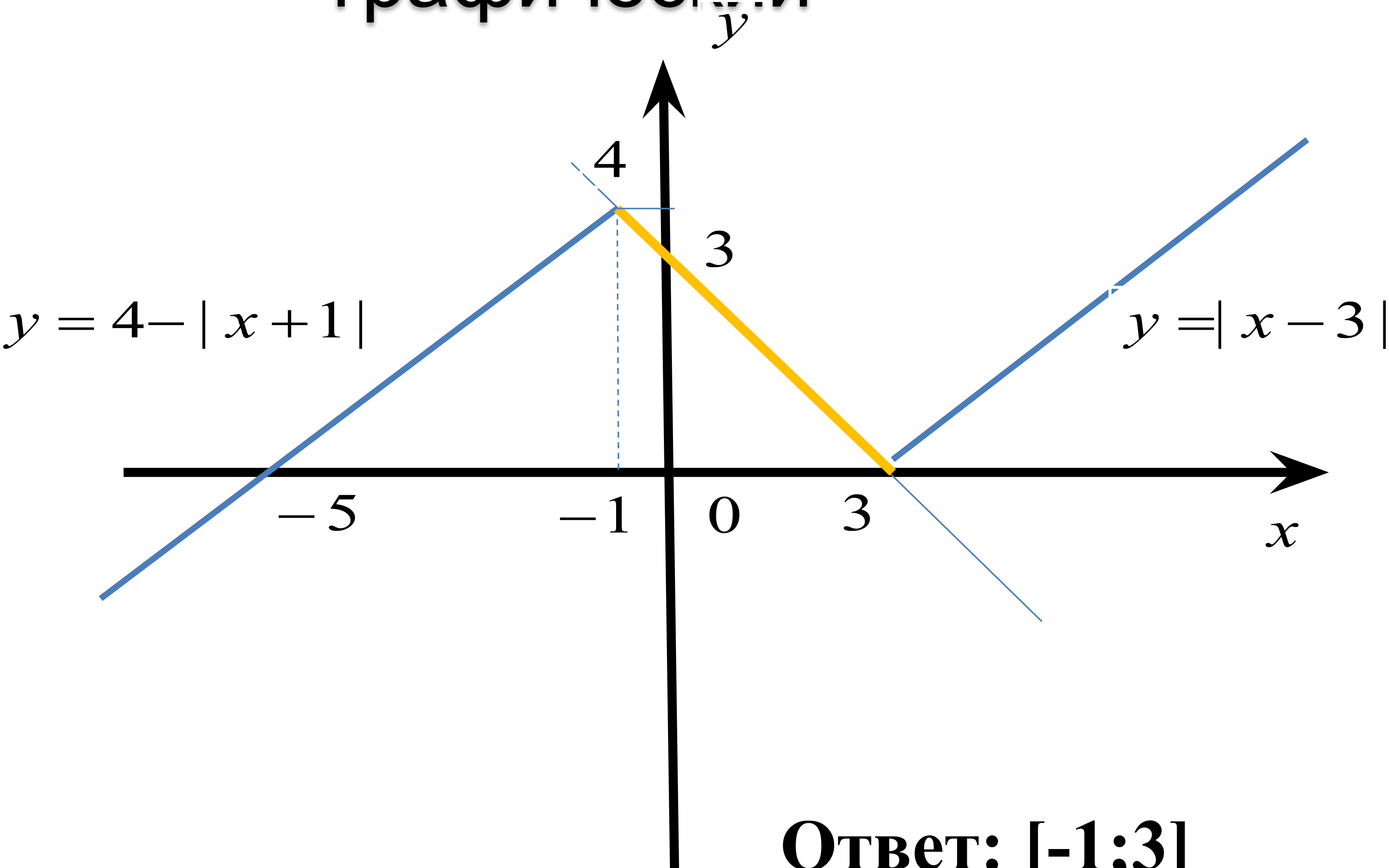
$$y = |x-3|, y = 4 - |x+1|$$

И укажем абсциссы их общих точек.

Графики совпадают при $x \in [-1;3]$.

Ответ: $x \in [-1;3]$.

III способ - графический

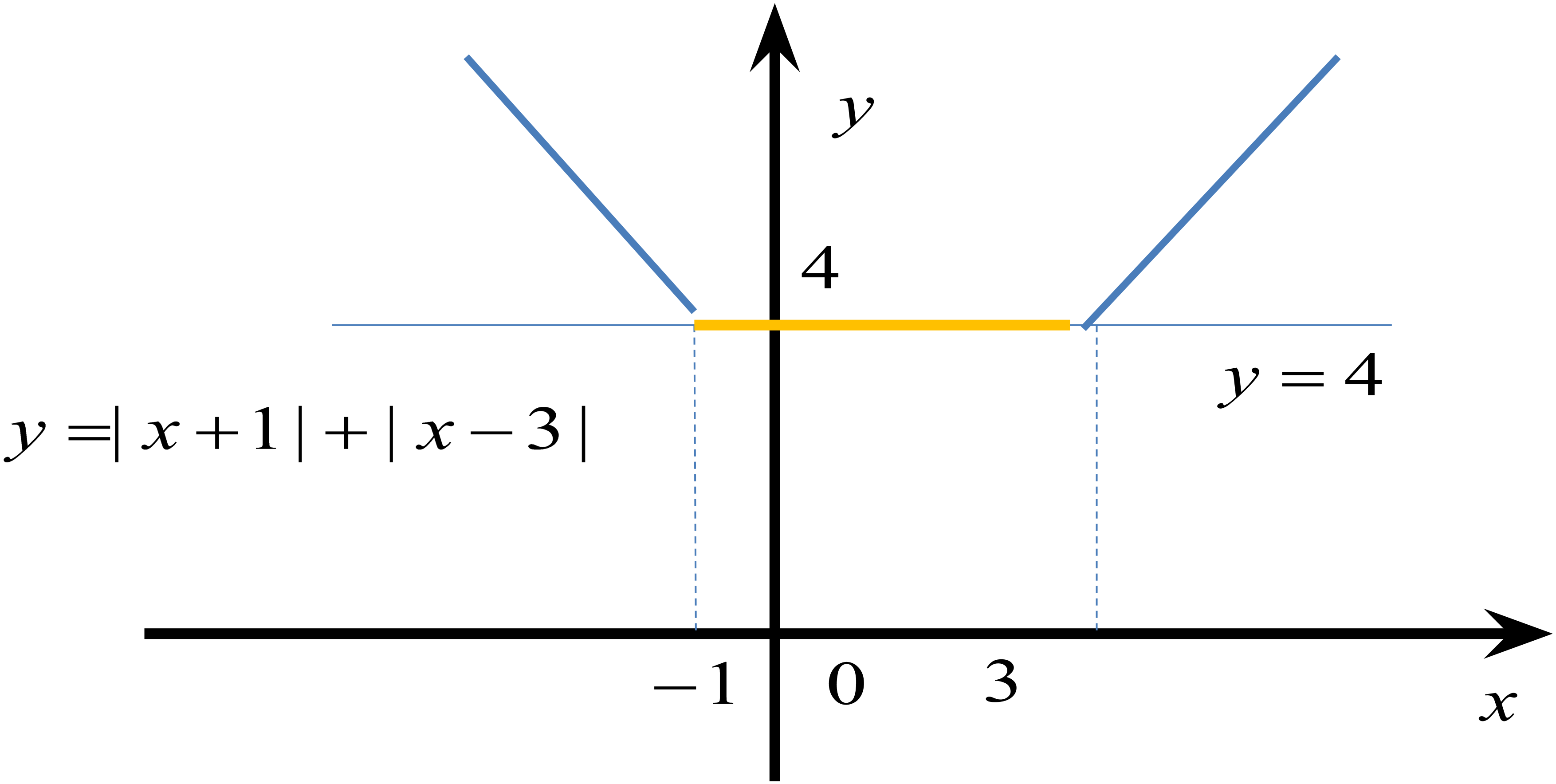


Ответ: [-1;3]

IVспособ - графический

Найдем абсциссы общих точек графика функции $y = |x+1| + |x-3|$
и прямой $y = 4.$

Для построения первого графика достаточно взять несколько точки
с абсциссами x < 1 и x > 3, после чего последовательно соединить их до получения ломаной.

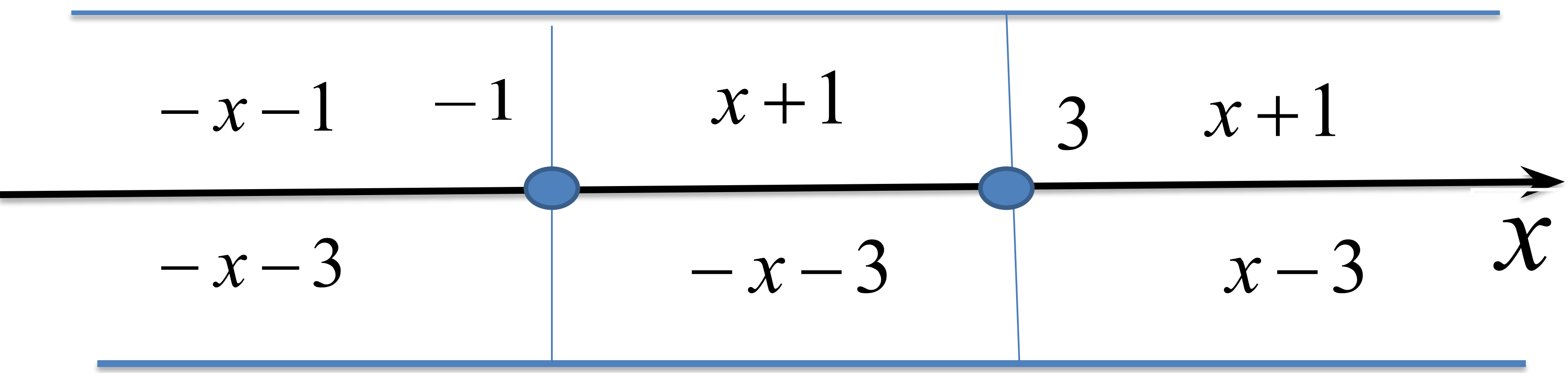


Ответ: [-1;3]

IVспособ - графический

V способ

Числа -1 и 3 разбивают числовую прямую на Три интервала, на каждом из которых подмодульные выражения имеют определенный знак.



Найдем решение уравнения в каждом из полученных промежутков:

$$a)\begin{cases} x \in (-\infty;-1) \\ -x-1-x+3=4; \end{cases}$$

ил
и

$$б)\begin{cases} x \in [-1;3] \\ x+1-x+3=4; \end{cases}$$

ил
и

$$в)\begin{cases} x \in (3;+\infty) \\ x+1+x-3=4; \end{cases}$$

$$a)\begin{cases} x \in (-\infty;-1) \\ x = -1; \end{cases}$$

Нет решения

$$б)\begin{cases} x \in [-1;3] \\ 0 \cdot x = 0; \end{cases}$$

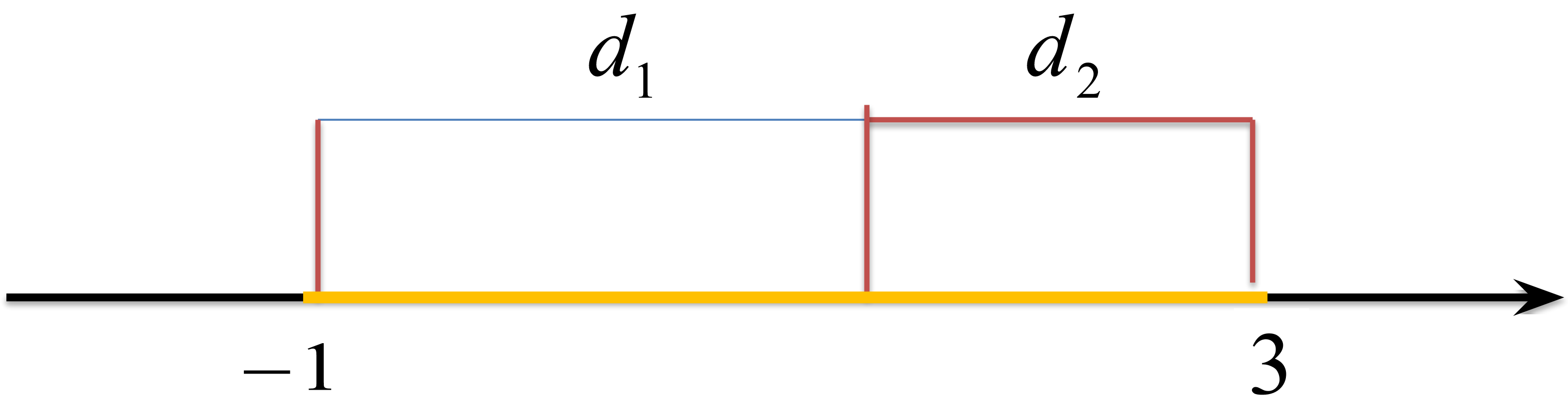
$$x \in [-1;3]$$

$$в)\begin{cases} x \in (3;+\infty) \\ x = 3; \end{cases}$$

Ответ: [-1;3]

VI способ

На числовой прямой найдем все точки с координатой (x) , сумма расстояний от которой до точек с координатами (-1) и (3) равна 4.



Литература:

- Алгебра 9кл: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Мордкович А.Г .– М.: Мнемозина, 2017.
- Журнал «Математика в школе» №3,2010 , стр.31.
- Алгебра: Нестандартные задачи: экспресс-репетитор для подготовки к ГИА: 9-й кл./Г.В. Сычева, Н.В. Гусева,В.А. Гусев,-М.:АСТ:Астрель ; Владимир: ВКТ, 2010