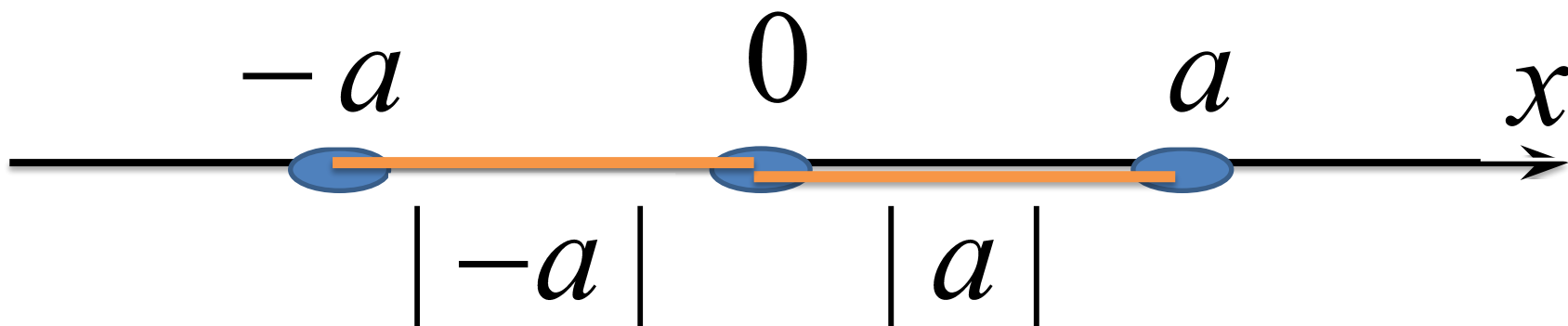


Решение уравнений,
содержащих переменную
под знаком модуля

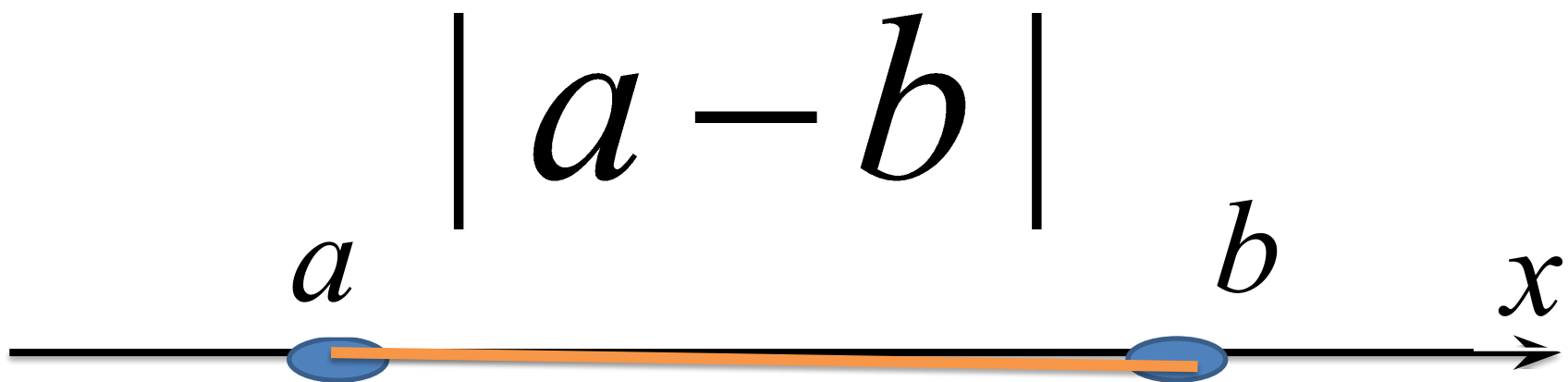
Родионова Г. М., учитель математики МБУ «Школа №82»
г.о.Тольятти

Определение модуля

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$



Определение модуля



Определение модуля

$$|a - b|$$



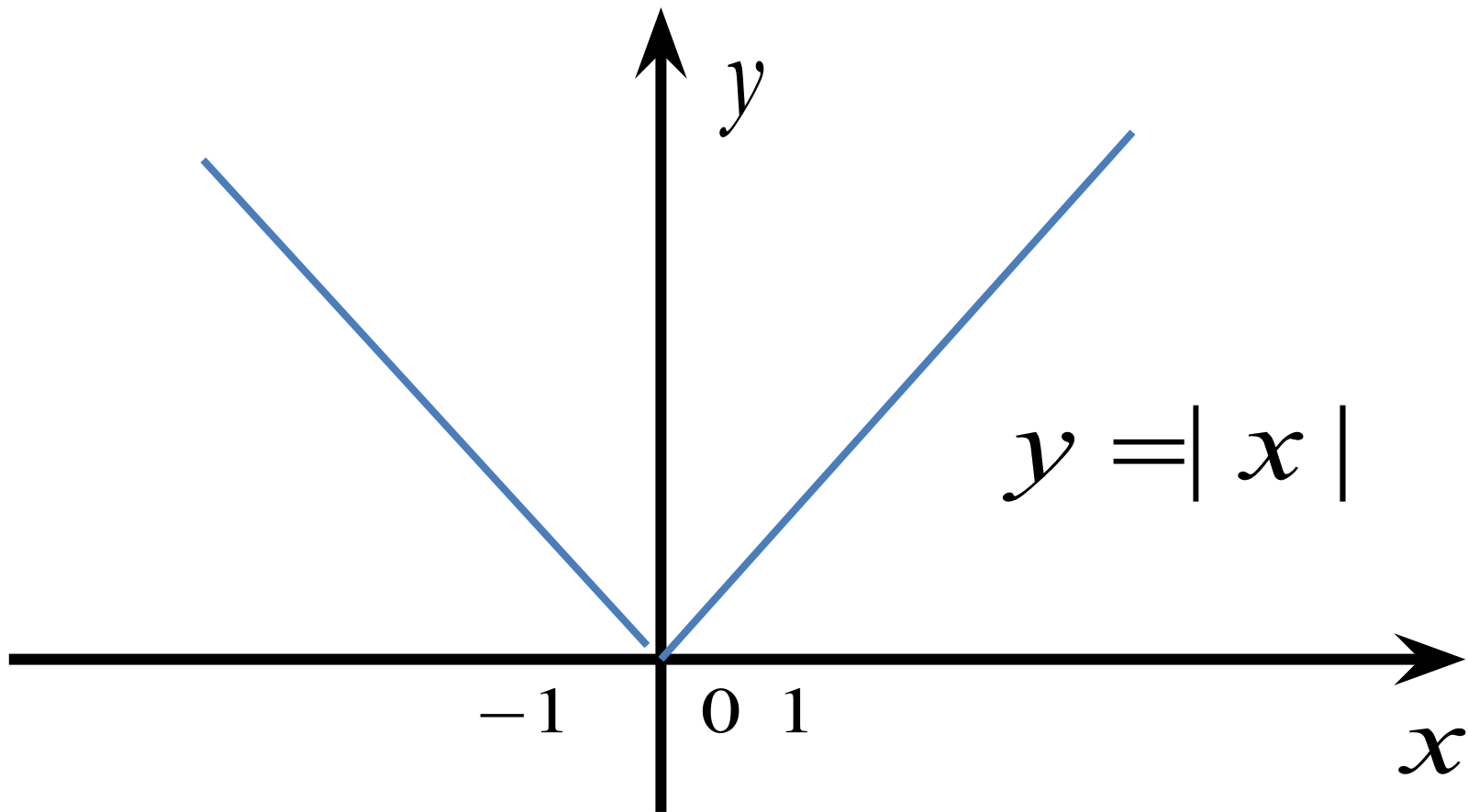


График функции

$$y = |x|$$

Решение уравнений с модулем

$$1. |f(x)| = a, \quad a \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

при $a < 0$ решений нет

Решите

уравнения:

1. $|2x - 3| = 5$

2. $|2x^2 + 5x| = 3$

Решение уравнений с модулем

$$2. |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

**Решите
уравнения:**

1. $|2x - 3| = |6 - x|$

2. $|2x^2 + 5x| = |x^2 - 4|$

Решение уравнений с модулем

$$3. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$4. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Решите

уравнения:

1. $|2x - 3| = 5 - x$

2. $|2x^2 + 5x| = 3 + x$

**Решите
уравнение:**

$$x^2 - 4|x| + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4|x| + 3 = 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \\ |x| = t \Rightarrow x^2 = |x|^2 = t^2 & \\ x^2 - 4|x| + 3 = 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \\ t^2 - 4t + 3 = 0 & \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Обратная замена

$$\begin{cases} |x| = 1, \\ |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Задание на дом

$$1). |5x - 2| = 4$$

$$2). |3 - 7x| = -2$$

$$3). |3 - 4x| = |5 - 6x|$$

$$4). |14 - 2x| = 3 - 5x$$

$$5). 7x^2 + 2|x - 1| + 2 = 0$$

6 способов решения одного уравнения

$$|x + 1| + |x - 3| = 4$$

Уравнение с модулем

Решить уравнение

$$|x + 1| + |x - 3| = 4$$

I способ.

Решение:

Найдем нули
подмодульн
ых
выражений

$$x + 1 = 0, x = -1$$

$$x - 3 = 0, x = 3.$$

Для раскрытия двух модулей рассмотрим следующие 4 случая:

$$a) \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \\ -x-1-x+3 = 4; \end{cases} \quad \text{ил}$$

$$б) \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-3 \geq 0 \\ -x-1+x-3 = 4; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \\ x+1-x+3 = 4; \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ил} \\ \text{и} \end{matrix}$$

$$г) \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x+1+x-3 = 4; \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x < -1 \\ x < 3 \\ x = -1; \end{cases}$$

Решений

нет

$$в) \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 3 \\ 0 \cdot x = 0; \end{cases}$$

$$-1 \leq x < 3.$$

$$б) \begin{cases} x < -1 \\ x \geq 3 \\ 0 \cdot x = 8; \end{cases}$$

Решений

нет

$$г) \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 3 \\ x = 3; \end{cases}$$

$$x = 3.$$

Ответ: $[-1; 3]$

Решите уравнение

$$|x + 1| + |x - 3| = 4$$

||

Решение. Поскольку обе части уравнения неотрицательные, то при возведении их в квадрат получим уравнение равносильное данному.

$$(|x + 1| + |x - 3|)^2 = 4^2,$$

$$(x + 1)^2 + 2|x + 1| \cdot |x - 3| + (x - 3)^2 = 16,$$

$$|x^2 - 2x - 3| = -x^2 + 2x + 3.$$

Из определения модуля следует. Что последнее равенство выполнимо, если $x^2 - 2x - 3 \leq 0$,

т.е. когда $x \in [-1; 3]$.

Ответ: [-1;3]

III способ - графический

Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$|x - 3| = 4 - |x + 1|.$$

Далее изобразим графики функций

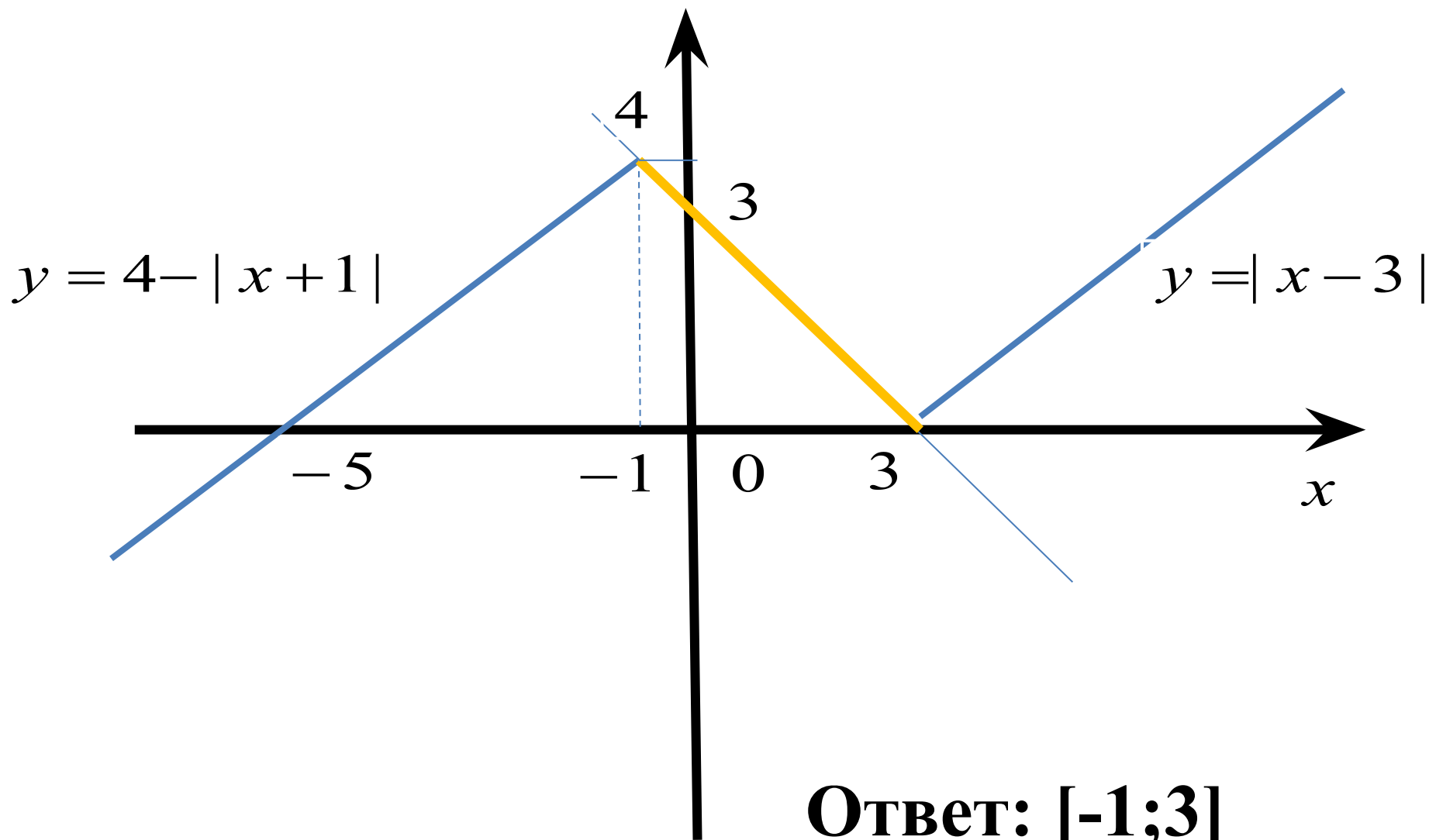
$$y = |x - 3|, y = 4 - |x + 1|$$

И укажем абсциссы их общих точек.

Графики совпадают при $x \in [-1; 3]$.

Ответ: $x \in [-1; 3]$.

III способ -
графический

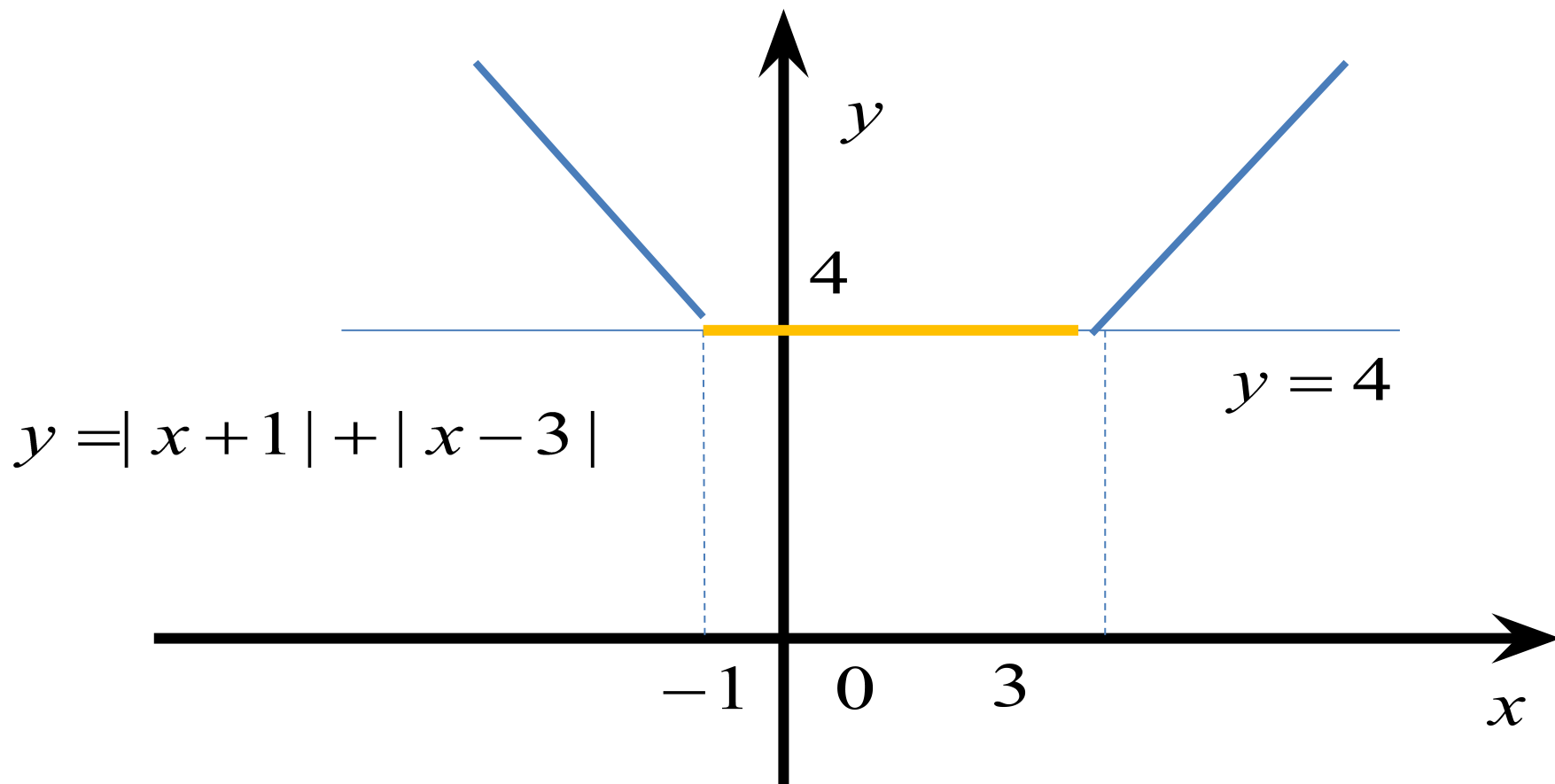


Ответ: [-1;3]

IV способ - графический

Найдем абсциссы общих точек графика функции $y = |x + 1| + |x - 3|$ и прямой $y = 4$.

Для построения первого графика достаточно взять несколько точек с абсциссами $x < 1$ и $x > 3$, после чего последовательно соединить их до получения ломаной.

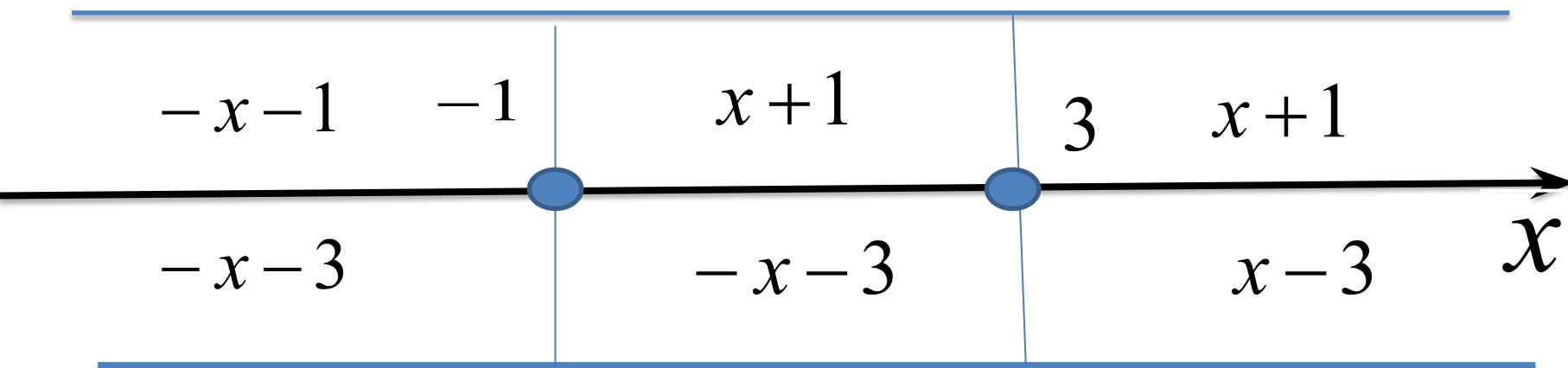


Ответ: $[-1;3]$

IV способ - графический

V способ

Числа -1 и 3 разбивают числовую прямую на Три интервала, на каждом из которых подмодульные выражения имеют определенный знак.



Найдем решение уравнения в каждом из полученных промежутков:

$$a) \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \\ -x - 1 - x + 3 = 4; \end{cases}$$

**ИЛ
И**

$$б) \begin{cases} x \in [-1; 3] \\ x + 1 - x + 3 = 4; \end{cases}$$

**ИЛ
И**

$$в) \begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ x + 1 + x - 3 = 4; \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \\ x = -1; \end{cases} \quad \text{Нет решения}$$

$$б) \begin{cases} x \in [-1; 3] \\ 0 \cdot x = 0; \end{cases}$$

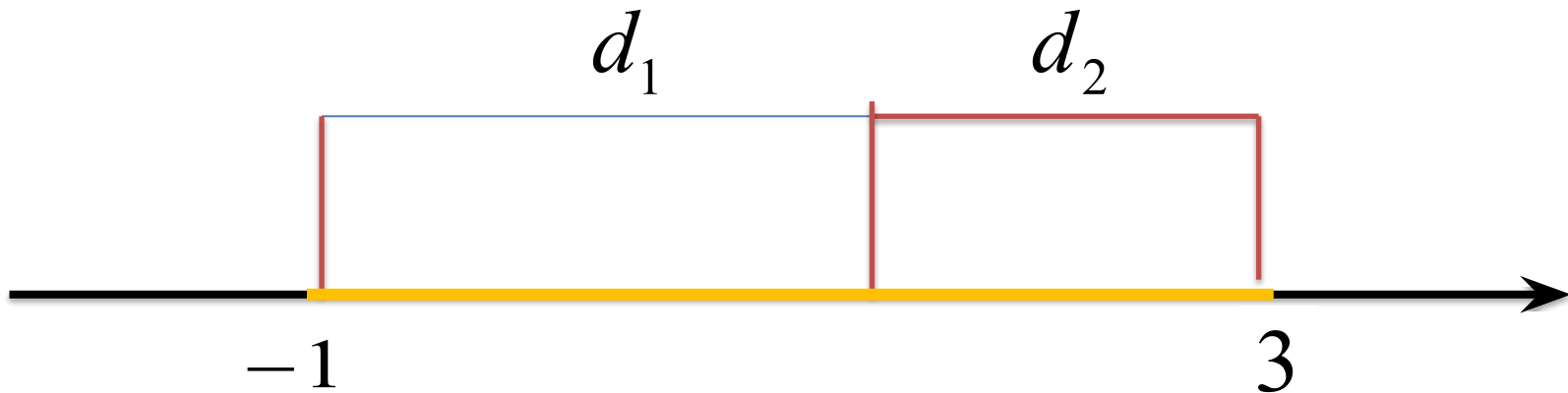
$$x \in [-1; 3]$$

$$в) \begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ x = 3; \end{cases}$$

Ответ: [-1; 3]

VI способ

На числовой прямой найдем все точки с координатой (x) , сумма расстояний от которой до точек с координатами (-1) и (3) равна 4.



Литература:

- Алгебра 9кл: учеб. для общеобразоват. учреждений/
Мордкович А.Г .– М.: Мнемозина, 2017.
- Журнал «Математика в школе» №3,2010 , стр.31.
- Алгебра: Нестандартные задачи: экспресс-
репетитор для подготовки к ГИА: 9-й кл./Г.В.
Сычева, Н.В. Гусева,В.А. Гусев,-М.:АСТ:Астрель
; Владимир: ВКТ, 2010