

## Решение задачи 3 (задача 7.3, Векштейн)

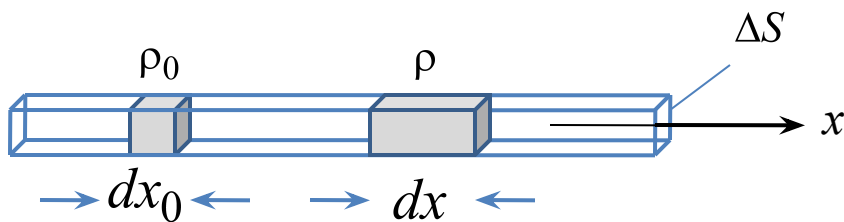
### Условия задачи

7-3. В однородной среде с плотностью  $\rho_0$  и равным нулю давлением (пыль) в некоторый момент времени создается неоднородное в пространстве поле скорости  $v(x) = v_0 \sin \pi x/l$ . Найти возникающее в результате движения распределение плотности пыли  $\rho(x, t)$ .

- Среда идеальная – нет диссипации энергии
- Частицы пыли не взаимодействуют между собой: «парциальное» давление пыли отсутствует
- Основания для использования лагранжева подхода
  - нужно отслеживать отдельные частицы пыли, что лежит в основе подхода Лагранжа
  - лагранжевы уравнения движения частиц жидкости (пыли) линейны в отличие от уравнения Эйлера

## 2) Уравнение непрерывности по Лагранжу

Уравнение непрерывности выражает закон сохранения вещества  
Рассмотрим сохранение вещества для выделенного элемента  
жидкости



$$\cancel{\rho_0 \Delta S dx_0} = \cancel{\rho \Delta S dx}$$

Длины элементов  
фиксируются мгновенно в  
соответственные моменты  
времени

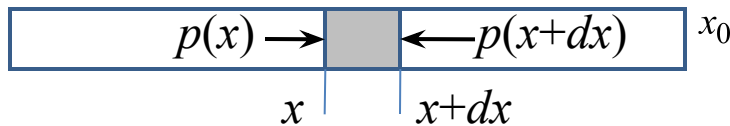
$$\frac{dx}{dx_0} \Rightarrow \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_t = \frac{\rho_0(x_0)}{\rho(x_0, t)}$$

### 3) Уравнение движения по Лагранжу

Выделенный элемент  $dx$  испытывает ускорение  $dm \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow dm \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)_{x_0}$

Находится под действием разности сил давления  $p(x)$  и  $p(x+dx)$

$$p(x+dx) = p(x) + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx + \dots \implies \Delta S [p(x) - p(x+dx)] = -\Delta S \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_t dx$$



С учетом действия еще и массовой силы  $dm \cdot f(x, t)$  по 2-му закону Ньютона имеем, соотнося элементу значение координаты

$$dm \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)_{x_0} = - \left( \frac{\partial p}{\partial x_0} \right)_t dx_0 \Delta S + dm f(x_0, t) \quad \text{Так как } dm = \rho \Delta S dx, \text{ получаем}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_0}\right)_t \frac{dx_0 \Delta S}{\rho \Delta S dx} + f(x_0, t)$$

Из закона сохранения вещества  $\rho dx = \rho_0 dx_0$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_0}\right)_t \frac{1}{\rho_0} + f(x_0, t)$$

4) **Решение задачи** По условиям задачи  $\left(\frac{\partial p}{\partial x_0}\right)_t = 0$   $f(x_0, t) = 0$

Уравнение движения дает  $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0} = 0 \implies x = x_0 + v(x_0)t$

Величину начального распределения скорости  $v(x_0)$  Найдем из заданного поля скоростей  $v(x) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$  заменой  $x \rightarrow x_0$

$v(x_0) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x_0}{l}\right)$  Отсюда имеем связь лагранжевой координаты  $x$  с ее начальным значением  $x_0$

$$x = x_0 + v_0 t \sin\left(\frac{\pi x_0}{l}\right) \quad (1)$$

Цель решения – нахождение распределения плотности частиц  $\rho(x_0, t)$   
Эта величина входит в закон сохранения вещества:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t = \frac{\rho_0(x_0)}{\rho(x_0, t)} \quad \Rightarrow \quad \rho(x_0, t) = \frac{\rho_0(x_0)}{\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t} \quad (2)$$

Из (1) дифференцированием  
получаем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t = 1 + v_0 t \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x_0}{l}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho(x_0, t) = \frac{\rho_0(x_0)}{1 + \frac{\pi}{l} v_0 t \cdot \cos\left(\frac{\pi x_0}{l}\right)}$$

Обозначая исходное распределение плотности  $\rho_0(x_0) \rightarrow \rho_0$  имеем окончательно

$$\rho(x_0, t) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\pi}{l} v_0 t \cdot \cos\left(\frac{\pi x_0}{l}\right)}$$

## 5) Обсуждение и выводы

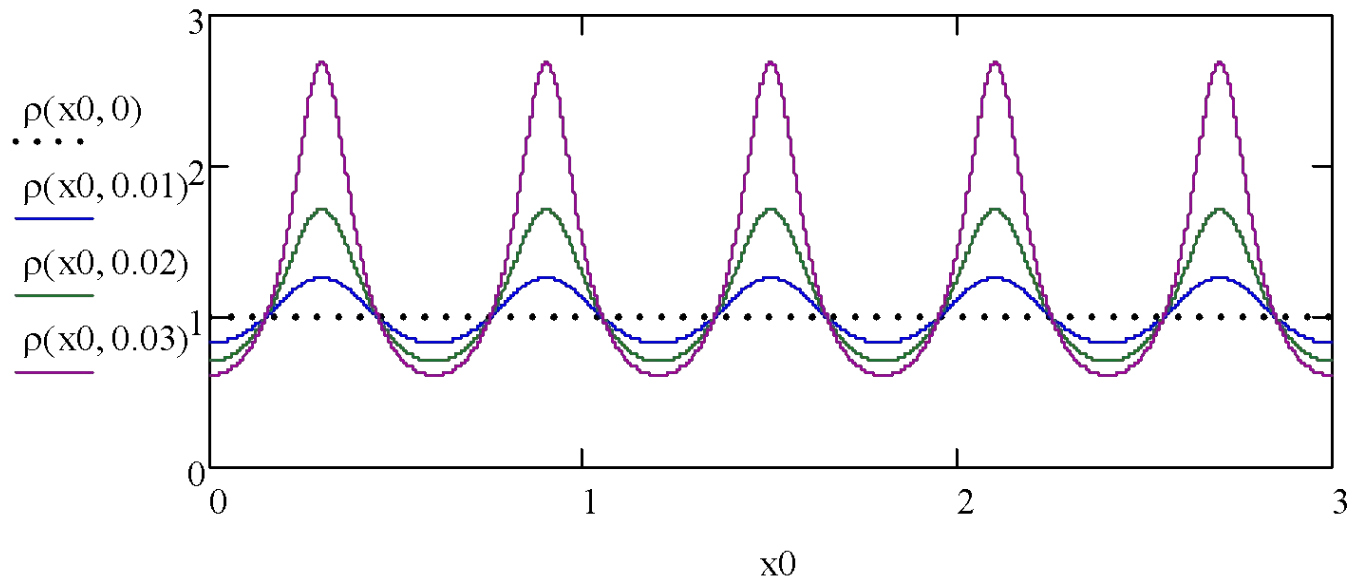
- Вместо  $\rho(x_0, t)$  можно рассмотреть используя (1)  $\rho(x, t)$   
Однако в этом случае вследствие зависимости  $x$  от  $t$  не удастся установить распределения плотности в фиксированные моменты времени
- Формула показывает изменения распределения плотности частиц по координате начальных положений со временем, в частности предсказывает возникновение сингулярных особенностей при

$$1 + \frac{\pi}{l} v_0 t \cdot \cos\left(\frac{\pi x_0}{l}\right) = 0$$

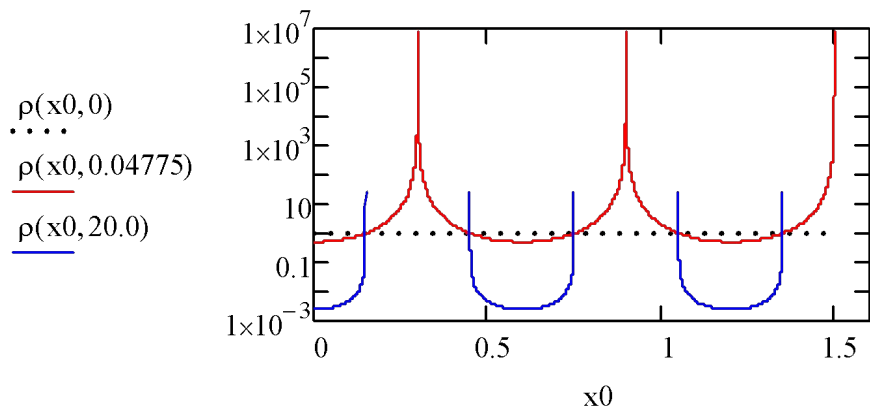
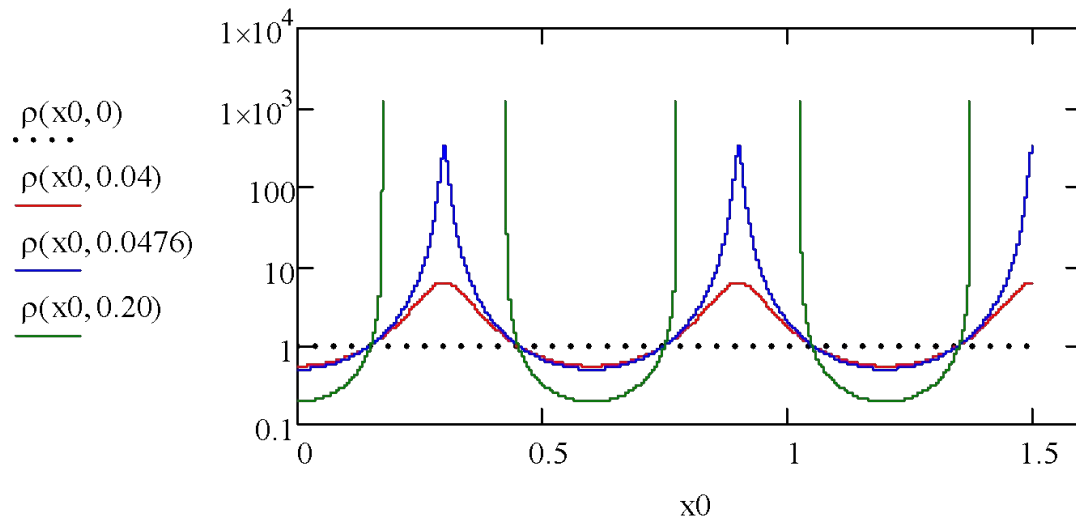
- Сингулярности плотности (с разрывом и появлением нефизических решений  $\rho < 0$ ) возникают в разные моменты времени в разных точках.

Первый разрыв имеет место в точке  $x_0 = l$  в момент времени

$$t^* = l / (\pi v_0)$$

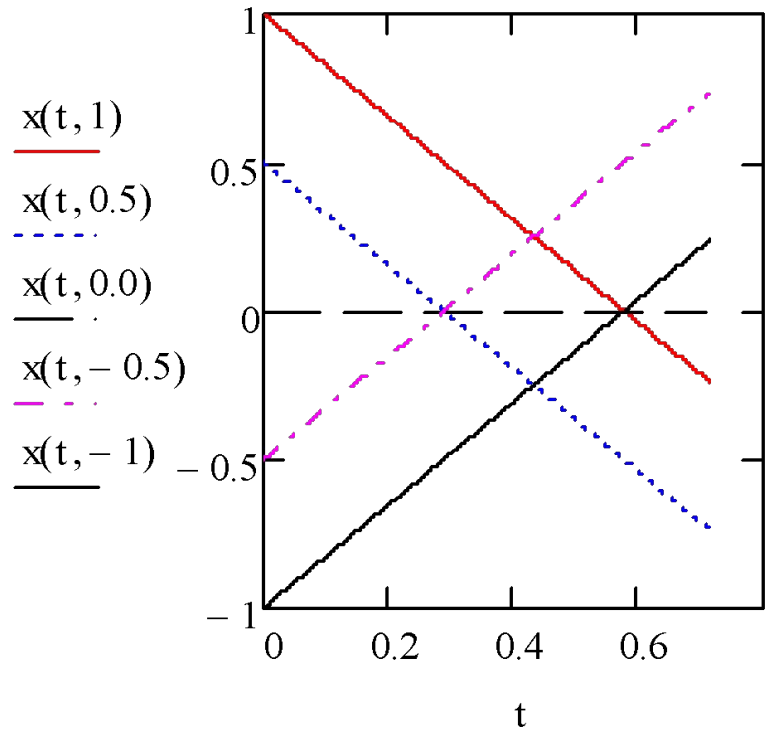


Распределение плотности в начальные моменты

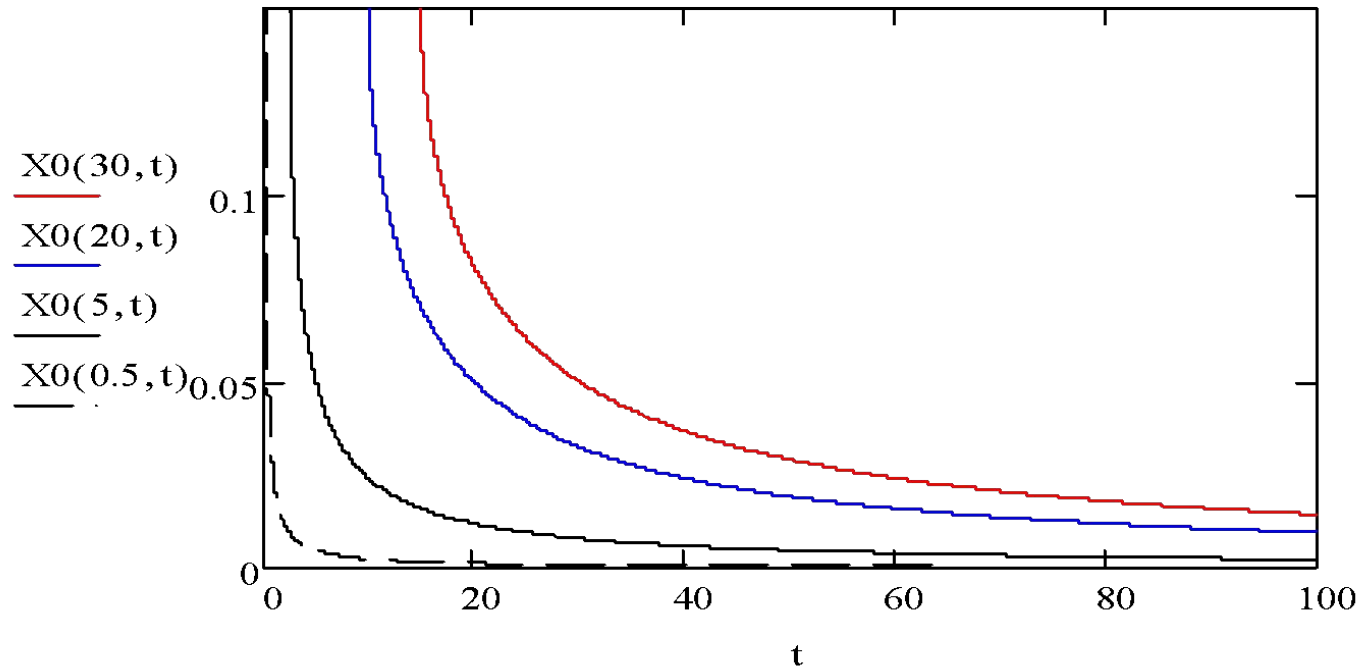


Типичные картины сингулярностей плотности

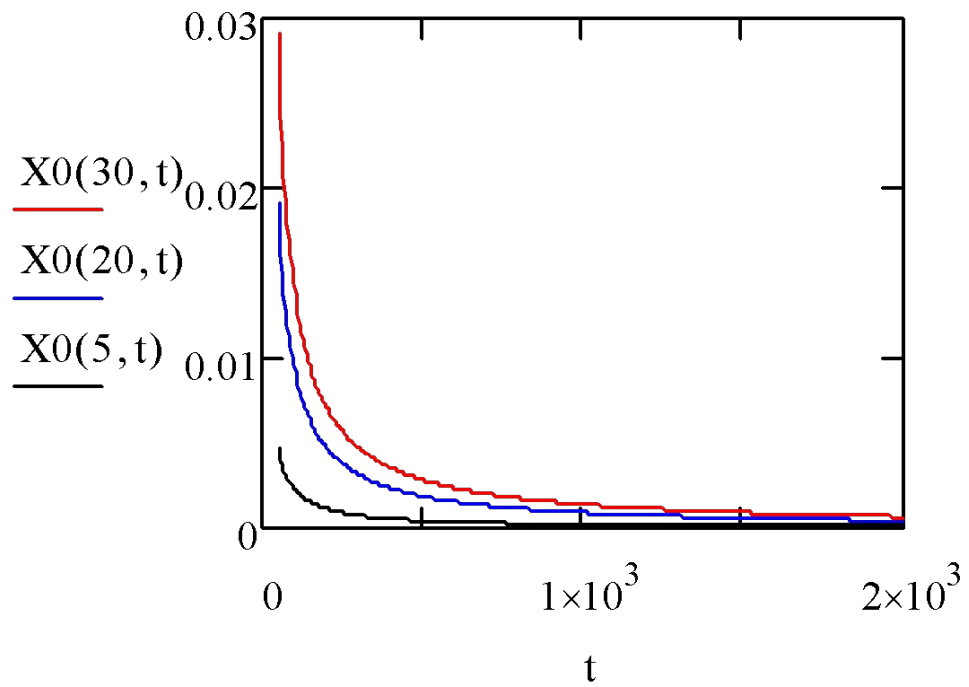




Пересечения лагранжевых траекторий частиц  
в разных точках, в разное время



Изменение местоположения  $x_0(x, t)$  частиц с разными лагранжевыми координатами  $x$  со временем. Явная демонстрация эффекта группирования.



Продолжение предыдущего рисунка

**Основной вывод:** жидкость (газ) представляют собой существенно нелинейную систему; сингулярности – следствие идеализации (необходим учет вязкости и диссипации энергии)