Решение задачи 3 (задача 7.3, Векштей)

Условия задачи

7-3. В однородной среде с плотностью ρ_0 и равным нулю давлением (пыль) в некоторый момент времени создается неоднородное в пространстве поле скорости $v(x) = v_0 \sin \pi x / l$. Найти возникающее в результате движения распределение плотности пыли $\rho(x, t)$.

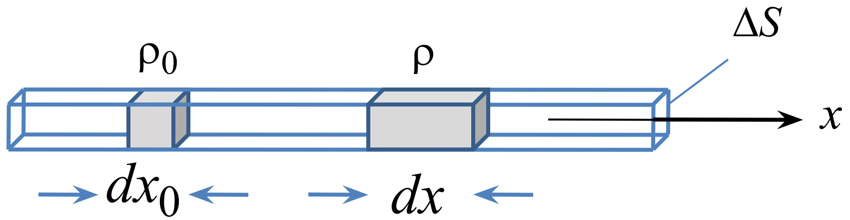
- Среда идеальная – нет диссипации энергии
- Частицы пыли не взаимодействуют между собой: «парциальное» давление пыли отсутствует
- Основания для использования лагранжева подхода

  - нужно отслеживать отдельные частицы пыли, что лежит в основе подхода Лагранжа

  - лагранжевы уравнения движения частиц жидкости (пыли) линейны в отличие от уравнения Эйлера

2) **Уравнение непрерывности по Лагранжу**

Уравнение непрерывности выражает закон сохранения вещества
Рассмотрим сохранение вещества для выделенного элемента жидкости



$$\rho_0 \cancel{\Delta S} dx_0 = \rho \cancel{\Delta S} dx$$

Длины элементов фиксируются мгновенно в соответственные моменты времени

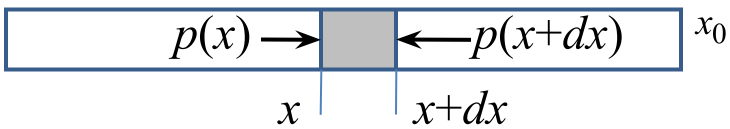
$$\frac{dx}{dx_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t = \frac{\rho_0(x_0)}{\rho(x_0, t)}}$$

3) **Уравнение движения по Лагранжу**

Выделенный элемент dx испытывает ускорение $dm\dfrac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow dm\left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0}$

Находится под действием разности сил давления $p(x)$ и $p(x+dx)$

$$p(x+dx) = p(x) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx + \ldots \Longrightarrow \boxed{\Delta S[p(x) - p(x+dx)] = -\Delta S\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_t dx}$$



С учетом действия еще и массовой силы $dm \cdot f(x,t)$ по 2-му закону Ньютона имеем, соотнося элементу значение координаты

$$dm\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_0}\right)_t dx_0 \Delta S + dmf(x_0, t)$$

Так как $dm = \rho\Delta S dx$, получаем

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_0}\right)_t \frac{dx_0 \cancel{\Delta S}}{\boxed{\rho \cancel{\Delta S} dx}} + f(x_0, t)$$

Из закона сохранения вещества $\boxed{\rho dx = \rho_0 dx_0}$

Поэтому

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_0}\right)_t \frac{1}{\rho_0} + f(x_0, t)}$$

4) **Решение задачи** По условиям задачи $\left(\frac{\partial p}{\partial x_0}\right)_t = 0 \quad f(x_0, t) = 0$

Уравнение движения дает $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0} = 0 \Longrightarrow x = x_0 + \mathrm{v}(x_0)t$

Величину начального распределения скорости $\mathrm{v}(x_0)$ Найдем из заданного поля скоростей $\mathrm{v}(x) = \mathrm{v}_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ заменой $x \to x_0$

$v(x_0) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x_0}{l}\right)$ Отсюда имеем связь лагранжевой координаты x с ее начальным значением x_0

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t \sin\left(\frac{\pi x_0}{l}\right)} \qquad (1)$$

Цель решения – нахождение распределения плотности частиц $\rho(x_0, t)$
Эта величина входит в закон сохранения вещества:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t = \frac{\rho_0(x_0)}{\rho(x_0, t)} \Longrightarrow \boxed{\rho(x_0, t) = \frac{\rho_0(x_0)}{\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t}} \qquad (2)$$

Из (1) дифференциированием получаем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t = 1 + v_0 t \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x_0}{l}\right) \Longrightarrow \rho(x_0, t) = \frac{\rho_0(x_0)}{1 + \frac{\pi}{l} v_0 t \cdot \cos\left(\frac{\pi x_0}{l}\right)}$$

Обозначая исходное распределение плотности $\rho_0(x_0) \to \rho_0$ имеем окончательно

$$\boxed{\rho(x_0,t) = \frac{\rho_0}{1+\frac{\pi}{l}\mathrm{v}_0 t \cdot \cos\left(\frac{\pi x_0}{l}\right)}}$$

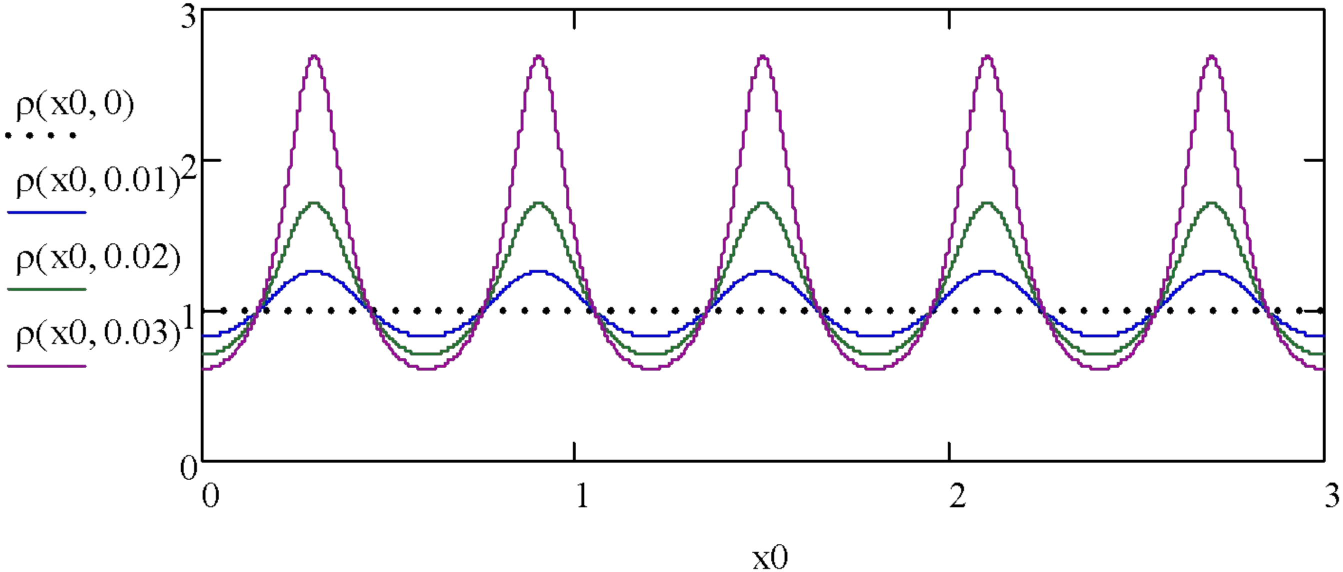
5) **Обсуждение и выводы**

- Вместо $\rho(x_0,t)$ можно рассмотреть используя (1) $\rho(x,t)$ Однако в этом случае вследствие зависимости x от t не удается установить распределения плотности в фиксированные моменты времени
- Формула показывает изменения распределения плотности частиц по координате начальных положений со временем, в частности предсказывает возникновение сингулярных особенностей при

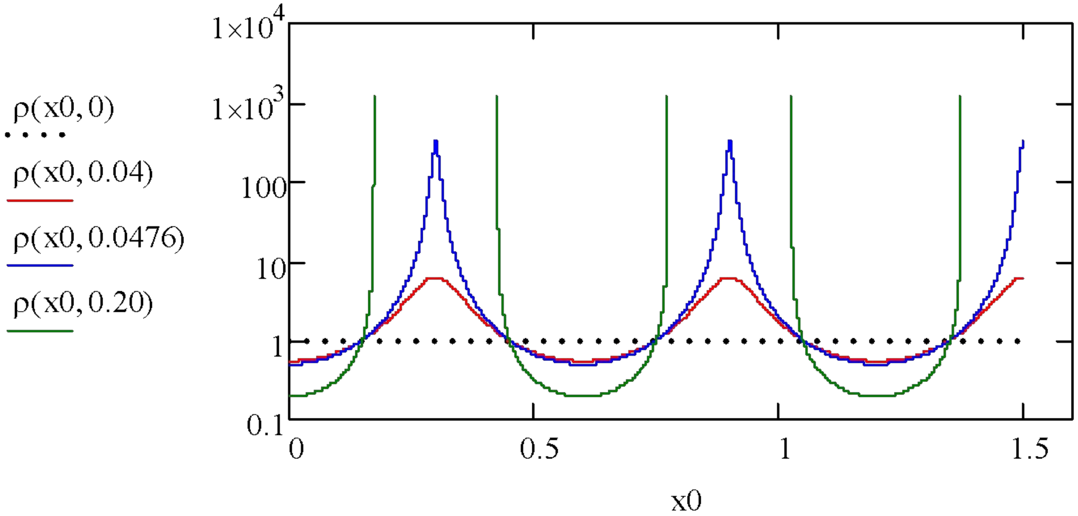
$$1+\frac{\pi}{l}\mathrm{v}_0 t \cdot \cos\left(\frac{\pi x_0}{l}\right) = 0$$

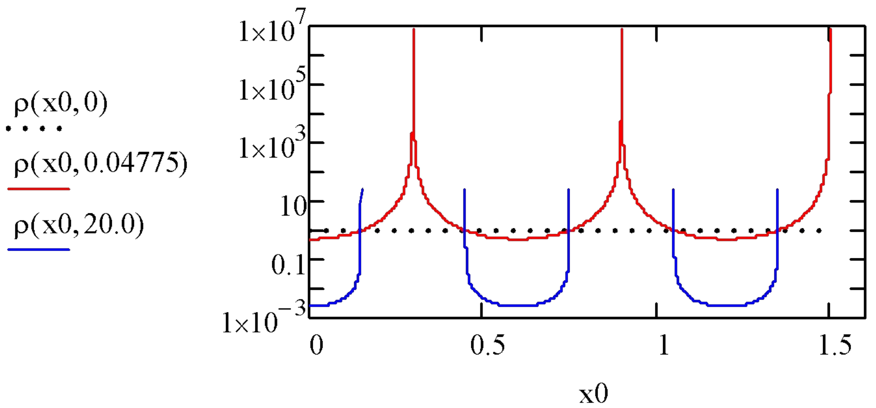
• Сингулярности плотности (с разрывом и появлением нефизических решений $\rho<0$) возникают в разные моменты времени в разных точках. Первый разрыв имеет место в точке $x_0 = l$ в момент времени

$$t^* = l/(\pi v_0)$$

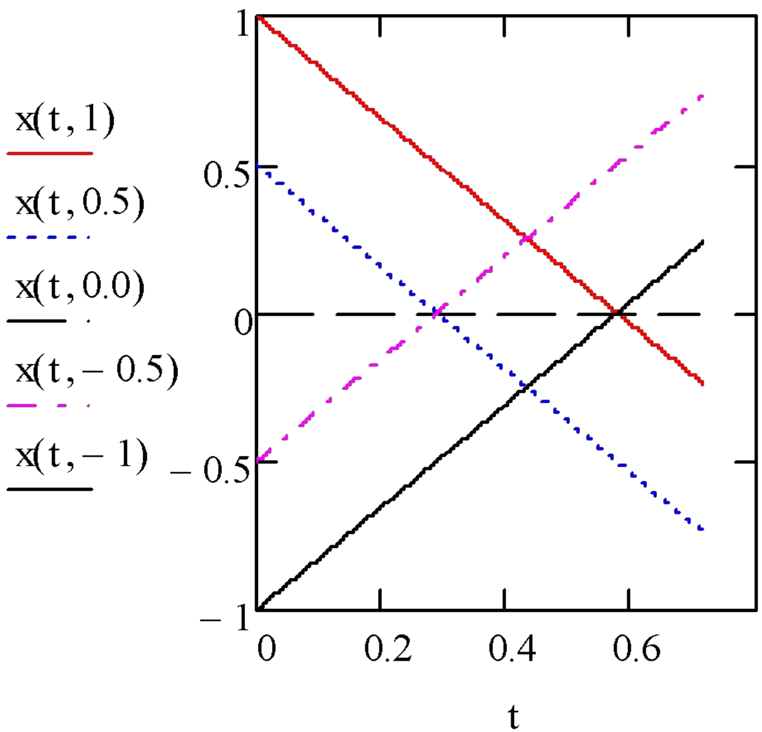


Распределение плотности в начальные моменты

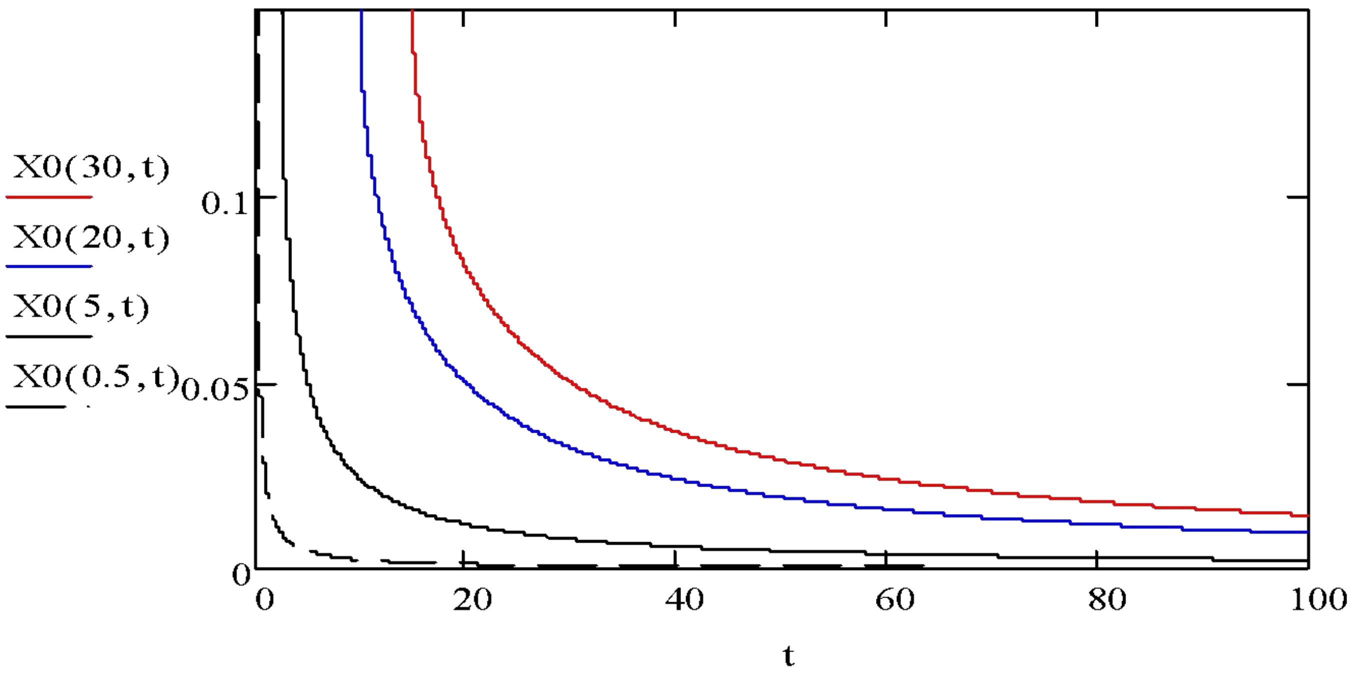




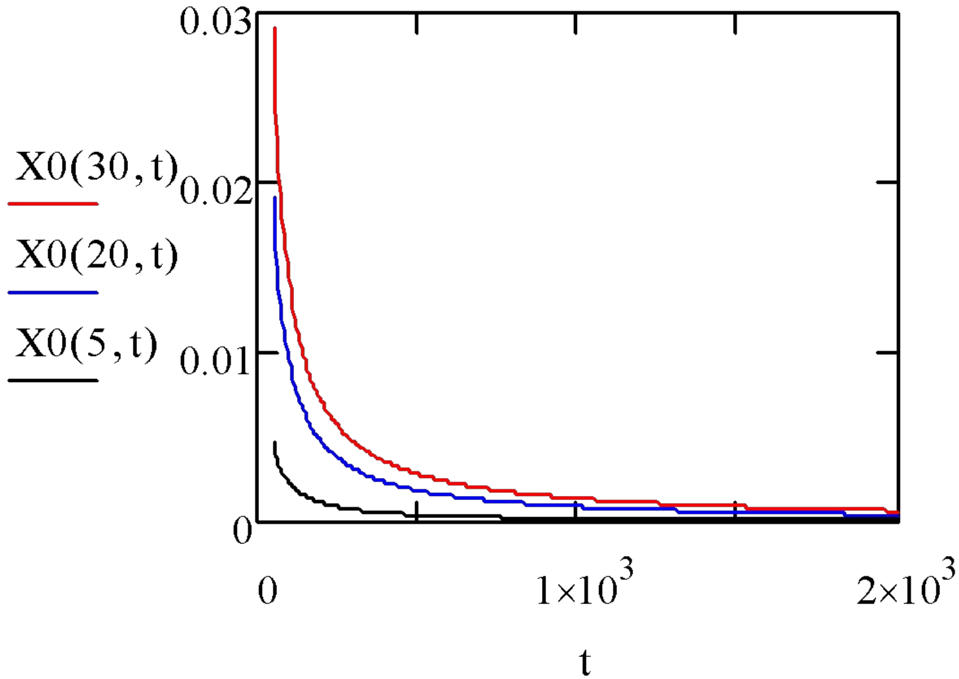
Типичные картины сингулярностей плотности



Пересечения лагранжевых траекторий частиц
в разных точках, в разное время



Изменение местоположения $x_0(x,t)$ частиц с разными лагранжевыми координатами x со временем. Явная демонстрация эффекта группирования.



Продолжение предыдущего рисунка

Основной вывод: жидкость (газ) представляют собой существенно нелинейную систему; сингулярности – следствие идеализации (необходим учет вязкости и диссипации энергии)