Лекция
Тема:
«Определители»

План

1. **Определение, порядок определителя**
2. **Миноры и алгебраические дополнения**
3. **Свойства определителей**
4. **Вычисление определителей: итоги**
5. **Понятие обратной матрицы. Алгоритм построения (нахождения) обратной матрицы**
6. **Матричные выражения и матричные уравнения**

Из истории науки

- Швейцарский математик ***Крамер*** (G. Cramer, 1704–1752) заложил основы теории определителей, хотя и не предложил для них удобного обозначения (это сделал в 1841 году ***А. Кэли***).
- В 1772 году ***Вандермонд*** (A.T. Vandermonde, 1735–1796) опубликовал обширное исследование определителей, один из которых носит теперь его имя.
- Систематическое изложение этой теории принадлежит ***Бине*** (J.F.M. Binet, 1786–1856) и ***Коши*** (A.L. Cauchy, 1789–1857). Их труды по теории определителей относятся к периоду 1812–1815гг.

Габриэль Крамер

Gabriel Cramer

1704–1752

- **Швейцарский математик, ученик и друг Иоганна Бернулли,**

один из создателей линейной алгебры.

- **Определитель** (или **детерминант**) — одно из основных понятий линейной алгебры
- Это многочлен, комбинирующий элементы квадратной матрицы таким образом, что его значение сохраняется при транспонировании и линейных комбинациях строк или столбцов.
  ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ХАРАКТЕРИЗУЕТ СОДЕРЖАНИЕ МАТРИЦЫ.
- В частности, если в матрице есть линейно-зависимые строки или столбцы, то определитель равен нулю.
- Определитель играет ключевую роль в решении в общем виде систем линейных уравнений, на его основе вводятся базовые понятия.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

- Определитель Вронского (Вронскиан)
- Определитель Вандермонда
- Определитель Грама
- Определитель Якоби (Якобиан)
- Циркулянт

1. Определение. порядок определителя

- **Определение. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ (детерминант) n-го порядка, составленный из элементов квадратной матрицы (n*n) есть алгебраическая сумма n! («эн факториал») слагаемых или число, которое находится по определённым правилам.**

- ***Замечание.*** **Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется *выржденной* (или *особенной*)**

- **Для обозначения определителя квадратной матрицы используется символ:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

т.е. элементы матрицы заключаются в прямые вертикальные чёрточки.

- Определитель ***матрицы*** *A* также может обозначаться как: ***det(A)***, **|*A*|** **или** ***Δ(A)***.
- Этот символ был введён в ***19 веке английским математиком Кэли***

- **Определители второго порядка.**

Определение: *Определителем* или *детерминантом* второго порядка называется **ЧИСЛО**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Числа (элементы определителя) a_{11} и a_{22} образуют главную диагональ,

элементы определителя a_{12} и a_{21} образуют побочную диагональ.

- **Правило:** Чтобы вычислить определитель второго порядка, надо из произведения элементов главной диагонали вычесть произведения элементов побочной диагонали.
- Пример: Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 1$$

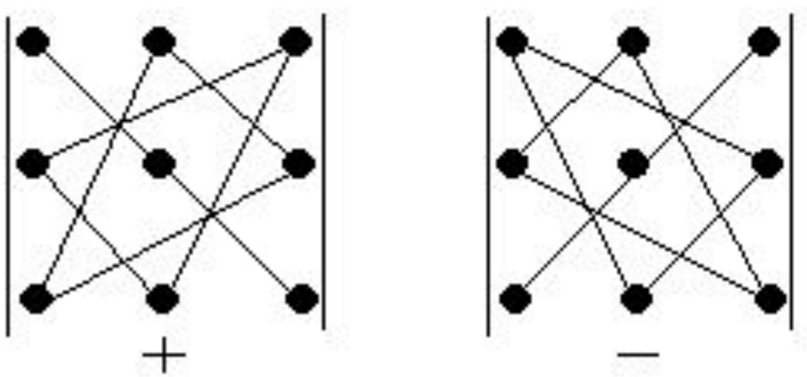
- **Определители третьего порядка.**
  Определение: *Определителем* или *детерминантом* третьего порядка называется **ЧИСЛО**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Замечания

1) Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства берутся со знаком «+», а какие со знаком «-», полезно использовать следующее правило треугольников:



2) Второй способ вычисления определителя фактически совпадает с первым и

называется способом ***Саррюса***

Суть его состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком «плюс»,

а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком «минус»

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

3) Определитель 4-го порядка есть алгебраическая сумма 4!=4*3*2*1=24 слагаемых!

Как вычисляются определители, имеющие порядок выше 3-го?

УДОБНЫМ И ЭФФЕКТИВНЫМ способом вычисления определителей и третьего и более высокого порядков является метод

РАЗЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

- **Пример.** Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

с помощью правила (способа)Саррюса.

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-2) \cdot 6 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 0 \cdot (-7) - 1 \cdot 6 \cdot 8 - (-2) \cdot 4 \cdot 9 = 204$$

2. Миноры и алгебраические дополнения

- **Определение:** *Минором* M_{ij} некоторого элемента a_{ij} называется определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием $\boldsymbol{i}$-ой строки и $\mathbf{j}$ -ого столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.
- Пример.

1) Составить миноры M_{11} и M_{23} определителя 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Минор элемента a_{11} есть ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ 2-ГО ПОРЯДКА, который получается путём зачёркивания 1-й строки и 1-го столбца исходного ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ 3-ГО ПОРЯДКА

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

- Аналогично находим минор элемента a_{23}

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

2) Вычислить миноры M_{11} и M_{23} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Решение

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-3)(-2) = -10$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) - 0 \cdot 4 = 3$$

- **<u>Определение:</u>** *Алгебраическим дополнением* A_{ij} какого-либо элемента a_{ij} определителя есть минор этого элемента M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- ***Пример***. Для приведенного выше определителя 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

записать и вычислить алгебраические дополнения A_{11} и A_{23}

Решение

Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix}$

Согласно определению находим

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-3)(-2) = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -\big((-1) \cdot (-3) - 0 \cdot 4\big) = -3$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -10 = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot 3 = -3$$

Замечание

- Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} совпадает с его минором , если сумма его индексов $i+j$ чётна, и является противоположным числом к минору, если сумма его индексов нечётна
- Алгебраическое дополнение используется для вычисления определителей

3. Свойства определителей

- Определитель обладает рядом свойств, которые лежат в основе практических способов их вычислений
- Время, которое затрачивается на вычисление определителя, зависит не только от вашего опыта, но и ОТ ЗНАНИЙ СВОЙСТВ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ: процесс решения вполне реально сократить до считанных секунд, а иногда и сразу увидеть результат!
- **Свойства определителей в**ыполняются для определителей любого порядка. Для экономии времени и места рассмотрим эти свойства на определителях второго порядка

1. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства используем определение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на (–1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число λ равносильно умножению определителя на это число λ:

Пример. $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (5-6) = -6.$$

4. Если определитель имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0, \quad \text{или} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21} = 0.$$

5. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21}, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - 0 \cdot a_{21}.$$

6. Если элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю

Пример. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0.$$

- 7. Если каждый элемент некоторого столбца (строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в данном столбце (строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые. Элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же.

$$\begin{vmatrix} a_{11}' + a_{11}'' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' + a_{21}'' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}' + a_{31}'' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}'' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}'' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- 8. Если к элементам некоторого столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженный на любой общий множитель λ, то величина определителя не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- **9. Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца или строки на их алгебраические дополнения**

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \qquad \Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23},$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}, \qquad \Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

- 10. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца или строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца или строки равна нулю

Какие свойства определителей полезно знать?

- **1) Величина определителя не меняется при транспонировании**. Свойство запоминаем.
- **2) Любая парная перестановка строк (столбцов) меняет знак определителя на противоположный**. На практике лучше не использовать
- **3) Из строки (столбца) определителя можно вынести множитель (и внести его обратно)**. Используем там, где это выгодно.
- **4) Если строки (столбцы) определителя пропорциональны, то он равен нулю. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.**

Пример. Вычислить определитель, используя свойство 9.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО ВЫЧИСЛЕНИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Определитель выгоднее раскрывать по ТОЙ строке (столбцу), где:

1) нулей побольше

2) числа поменьше

3) использовать

$$\text{правило}\quad\text{знаков}\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Решение

1. **Выбираем строку или столбец: это третий столбец**
2. **Записываем формулу вычисления определителя**

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (35+12) + (30-6) + (24+14) = 47 + 24 + 38 = 109$$

- **Замечание**

Можно упростить запись, если использовать правило знаков:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (35 + 12) + (30 - 6) + (24 + 14) = 47 + 24 + 38 = 109$$

4. Вычисление определителей (итоги)

1. Значение определителя второго порядка находим по определению:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. Определитель третьего порядка вычисляем, используя свойство 9, разложив данный определитель по строке или столбцу

3. Для вычисления определителей высоких порядков (выше третьего) используют метод ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА

4. Если в определителе *все* числа, расположенные ниже или выше *главной диагонали*, или все числа кроме элементов главной диагонали равны нулю, то он равен произведению элементов главной диагонали.

Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

5. **ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ РАВЕН НУЛЮ,**

если две строки (столбца) определителя пропорциональны (как частный случай – одинаковы)

Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

6. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю

5. Понятие обратной матрицы

- **<u>Определение:</u>** Если A – ***КВАДРАТНАЯ НЕВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА***, то *обратной* для нее называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

- Матрицы A и A^{-1} называются *взаимообратными*

- Обратная матрица определяется единственным образом по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^T = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- Здесь $A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ транспонированная

матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов исходной матрицы

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Алгоритм построения (нахождения) обратной матрицы

1. Убедиться, что исходная матрицы не является вырожденной, т.е. убедиться, что $\det A \neq 0$

2. Найти алгебраические дополнения исходной матрицы

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

3. Составить **ПРИСОЕДИНЁННУЮ** матрицу, элементами которой являются найденные алгебраические дополнения

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- 4. Записать обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- 5. Проверить правильность решения, т.е. убедиться, что выполняется равенство:

$$A^{-1} \cdot A = E$$

или

$$A \cdot A^{-1} = E$$

6. Матричные выражения

- Матричное выражение состоит из матриц, связанных операциями сложения, умножения, возведения в степень, транспонирования и др.
- Пример матричного выражения:

$$2A \cdot B^T + (C \cdot D)^{-1} - 5F^3$$

Продумайте и запишите порядок действий над матрицами A, B, C, D, F для нахождения значения этого выражения

Замечание. Если матричное выражение имеет смысл, то результат его вычисления является матрицей.

Матричные уравнения

- Матричное равенство, содержащее неизвестную матрицу, называется матричным уравнением
- Например, простейшие из них вида

$$A + 3X = B$$

$$A \cdot X = B$$

$$X \cdot A = B$$

$$A \cdot X + 2X = E$$

$$A \cdot X \cdot B = C$$

Замечание

- Выполнены все требования, предъявляемые к размерам матриц, входящих в матричные уравнения
- Решить матричное уравнение – это значит найти неизвестную матрицу

Рассмотрим решение матричного уравнения вида

$$A \cdot X = B$$

Решение

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Пример. Решить уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение

Задано уравнение вида $X \cdot A = B$

После умножения СПРАВА это уравнение на матрицу A^{-1} получаем, что

$$X = B \cdot A^{-1}$$

1. Найдём матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

- Вычислим определитель матрицы ***A***:

$$\det A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 1 = 7 \neq 0$$

- Найдём миноры и алгебраические дополнения матрицы ***A:***

$$\begin{matrix} M_{11} = 3 & M_{12} = 1 \\ M_{21} = -1 & M_{22} = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{11} = 3 & A_{12} = -1 \\ A_{21} = 1 & A_{22} = 2 \end{matrix}$$

- ***Составим обратную матрицу*** A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найдём неизвестную матрицу $X = B \cdot A^{-1}$

$$X = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Проверка

$$\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot(-1)+3\cdot 3 \\ 9\cdot 2+10\cdot 1 & 9\cdot(-1)+10\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 28 & 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}-\textit{верно}$$

Математики шутят

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \text{Петя} & \text{Маша} & 0 \\ 0 & \text{любит} & \text{не любит} \\ \text{математику} & 0 & \text{Машу} \end{vmatrix}$$