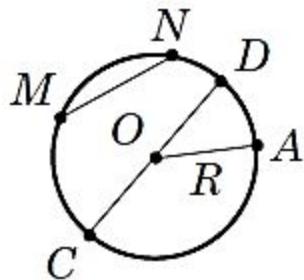


Окружность и круг

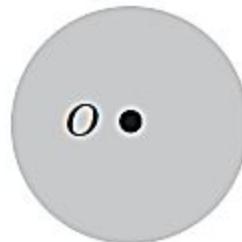


Окружность — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки (центра окружности) одинаково.
 O — центр окружности.

Радиус окружности — расстояние от центра до точки на окружности.
 OA, OC, OD — радиусы.
Обозначается R или r .

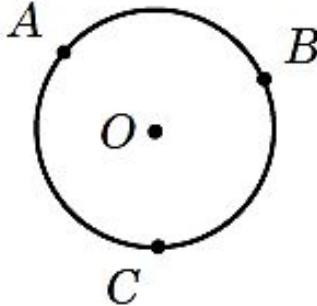
Хорда — отрезок, соединяющий две точки на окружности.
 MN, CD — хорды.

Диаметр — хорда, проходящая через центр (обозначается D или d).
 $D = 2R, CD = 2OA$



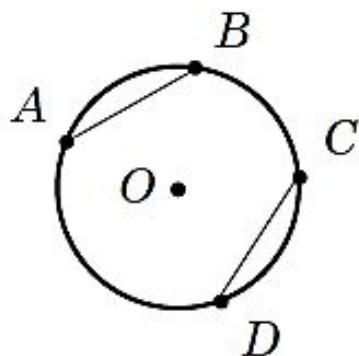
Круг — множество точек плоскости, расстояние до которых от данной точки (центра круга) не превышает данного расстояния (радиуса круга)

Окружность, хорды и дуги

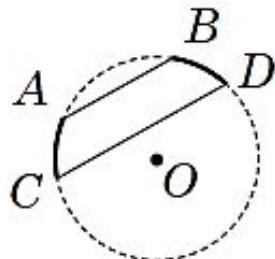


Дуга окружности — часть окружности, ограниченная двумя её точками.
 $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup AC$

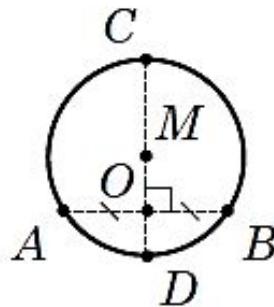
Свойства



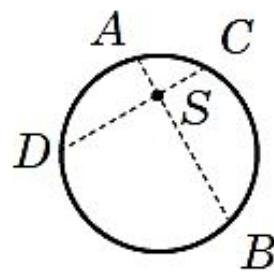
Равные дуги стягивают равные хорды.
Если $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$.
Равные хорды стягивают равные дуги.
Если $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$



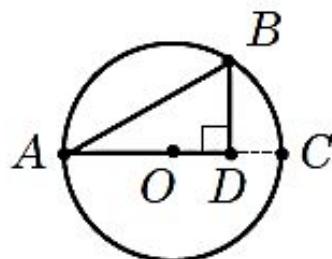
Параллельные хорды отсекают от окружности равные дуги.
Если $AB \parallel CD$, то $\cup AC = \cup BD$



CD — диаметр, AB — хорда.
Если $CD \perp AB$, то $AM = MB$;
если $AM = MB$, то $CD \perp AB$

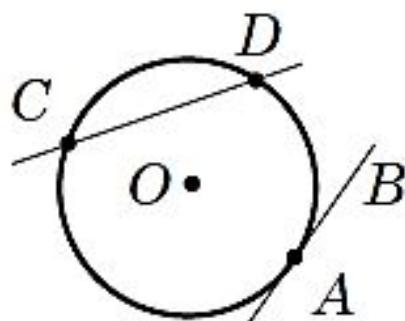


Если хорды AB и CD пересекаются
в точке S , то $AS \cdot SB = CS \cdot SD$



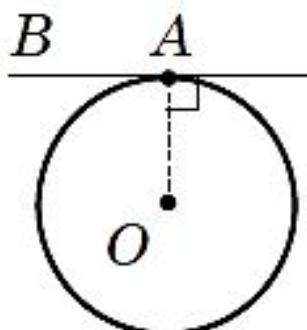
Если AB — хорда, AC — диаметр,
 $BD \perp AC$,
то $AB^2 = AD \cdot AC$; $BD^2 = AD \cdot DC$

Окружность, касательные и секущие

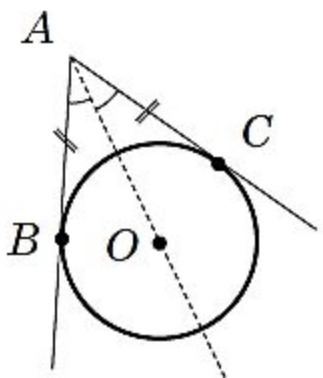


Касательная — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.
 AB — касательная.
Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.
 CD — секущая

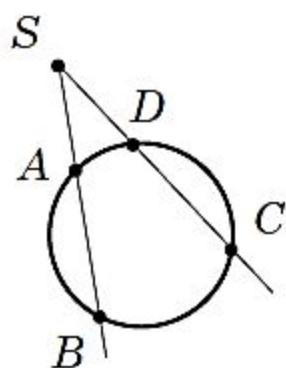
Свойства



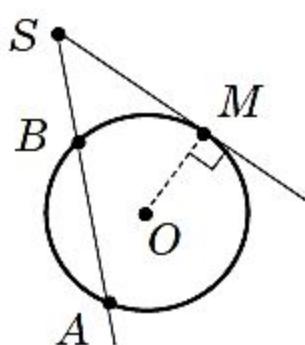
$OA \perp AB$
Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания



$AB = AC$
 OA — биссектриса $\angle BAC$.
 Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то:
 а) отрезки касательных равны;
 б) биссектриса угла между касательными проходит через центр окружности



Если SB и SC — секущие,
 то $SA \cdot SB = SD \cdot SC$

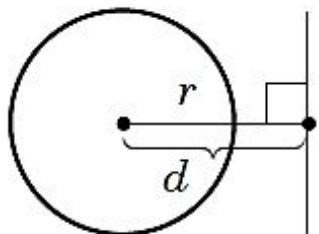


Если SM — касательная, SA — секущая,
 то $SM^2 = SB \cdot SA$

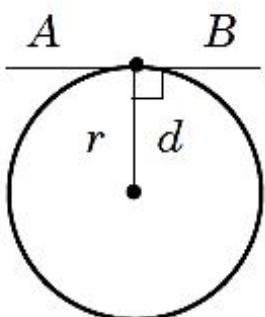
Взаимное расположение прямой и окружности

d — расстояние от центра окружности до прямой,

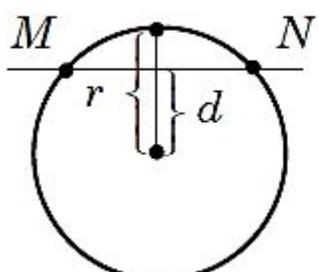
r — радиус окружности



$d > r$
Общих точек нет



$d = r$
Одна общая точка
 AB — касательная

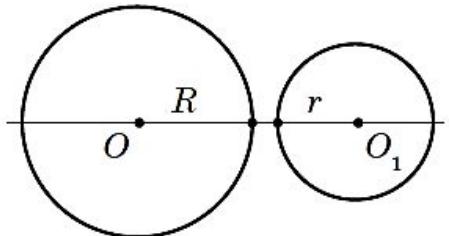


$d < r$
Две общие точки
 MN — секущая

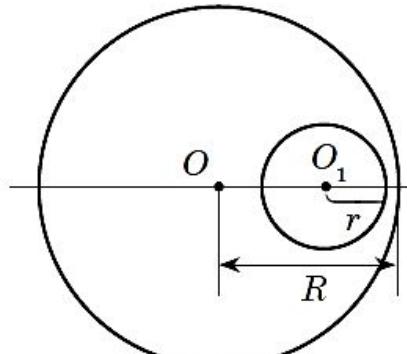
Взаимное расположение двух окружностей

OO_1 — расстояние между центрами, R и r — радиусы окружностей ($R > r$)

Окружности не имеют общих точек

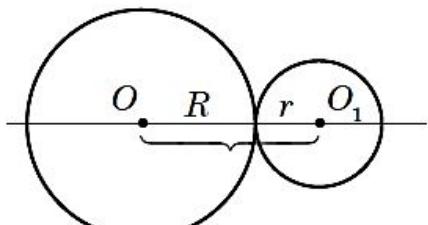


Окружности лежат одна вне другой
 $R+r < OO_1$

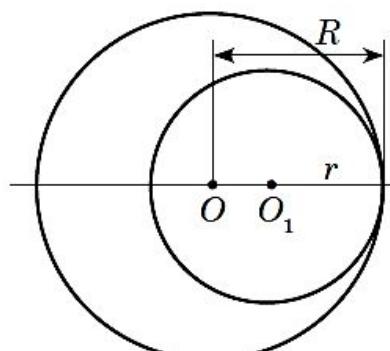


Одна окружность лежит внутри другой
 $OO_1 < R-r$

Окружности касаются (одна общая точка)



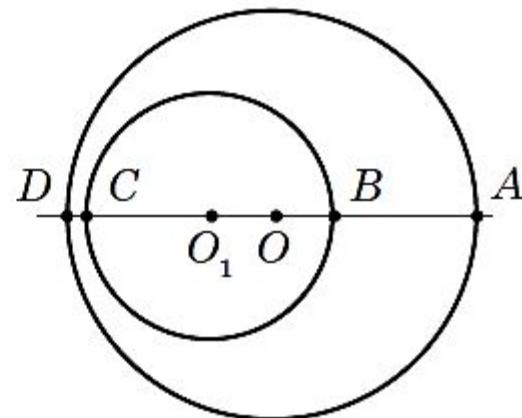
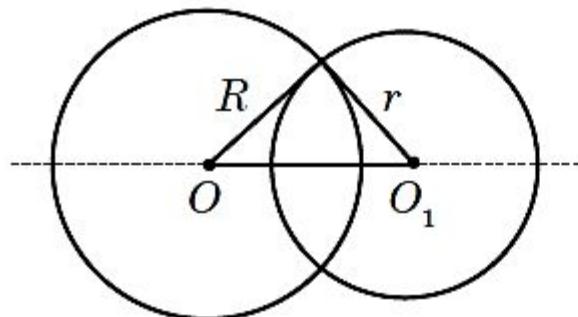
Касаются внешне
 $OO_1 = R+r$



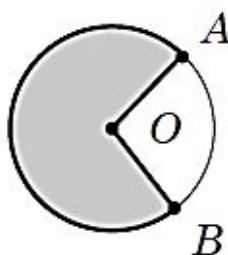
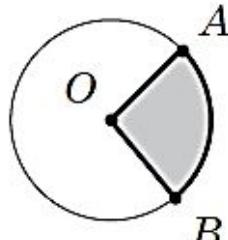
Касаются внутренне
 $OO_1 = R-r$

Окружности пересекаются (две общие точки)

$$R-r < OO_1 < R+r$$

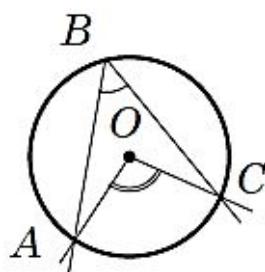


Углы в окружности



Центральный угол —
плоский угол с вершиной
в центре окружности.
 $\angle AOB$ — центральный угол.
 $\angle AOB = \cup AB$.

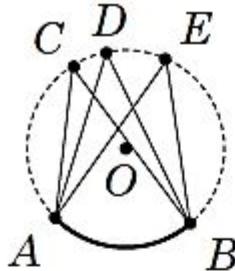
Центральный угол измеряется ду-
гой, на которую он опирается



Вписанный угол — угол, верши-
на которого лежит на окружности,
а стороны пересекают её.
 $\angle ABC$ — вписанный.
Вписанный угол равен половине
дуги, на которую он опирается,
и половине центрального угла, опи-
рающегося на ту же дугу:

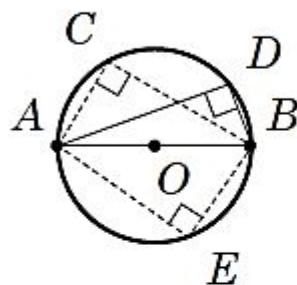
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$$



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

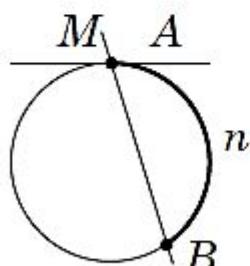
$$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$$



Вписанные углы, которые опираются на диаметр, прямые.

$$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$$

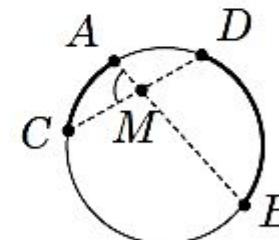
Угол между касательной и секущей



MA — касательная;
 MB — секущая

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$$

Угол между хордами

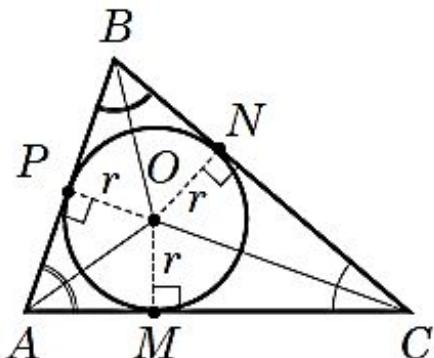


AB и CD — хорды

$$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$$

Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

Вписанная окружность

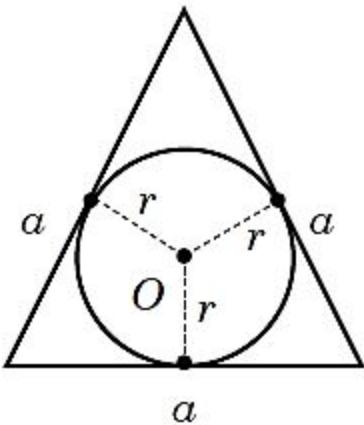
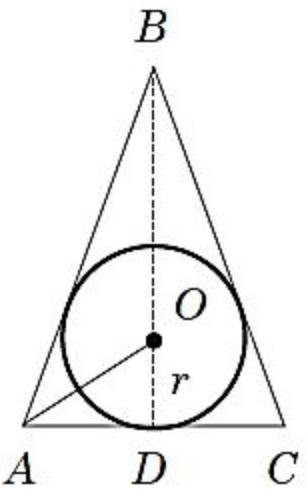
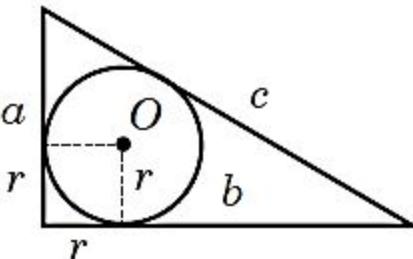


Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон.
Центр этой окружности — точка пересечения **биссектрис** углов треугольника.

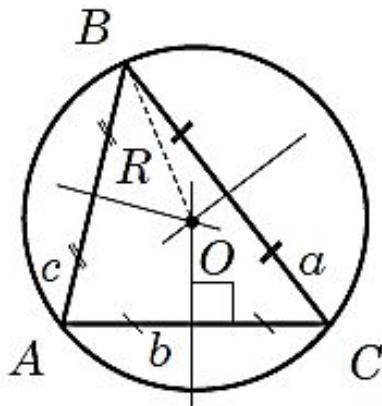
$$r = \frac{2S}{a+b+c} \text{ или } r = \frac{S}{p},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2},$$

S — площадь треугольника,
 p — полупериметр,
 a, b, c — длины сторон

Равно-сторонний треугольник	Равно-бедренный треугольник	Прямоугольный треугольник
 $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ <p>Точка O — центр вписанной и описанной окружности, точка пересечения биссектрис, медиан, высот</p>	 $AB = BC$ $BD \text{ — высота, медиана, биссектриса, высота.}$ $OD = r$	 <p>a и b — катеты, c — гипотенуза</p> $r = \frac{a+b-c}{2}$ $a+b = 2R+2r,$ R — радиус описанной окружности

Описанная окружность



Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все **его вершины**.

Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

$$OA = OB = OC = R$$

В произвольном треугольнике: $R = \frac{abc}{4S}$; $R = \frac{a}{2\sin A}$.

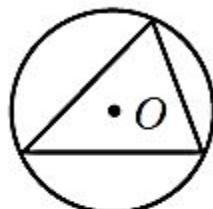
В равностороннем треугольнике: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

В прямоугольном треугольнике: $R = \frac{c}{2}$,

где c — гипотенуза треугольника

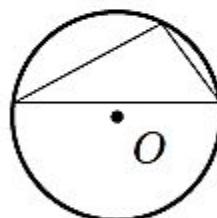
Положение точек описанной окружности в зависимости от вида треугольника

Остроугольный



Центр — во внутренней области
треугольника

Тупоугольный



Центр — вне области треугольника

Прямоугольный



$$R = \frac{c}{2} = m_c$$

Центр — совпадает
с серединой гипотенузы