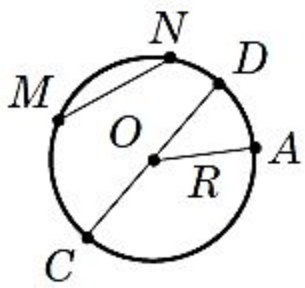
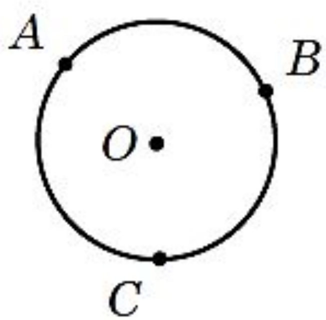
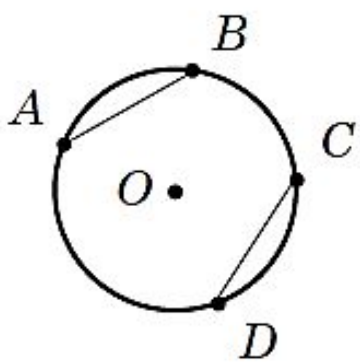
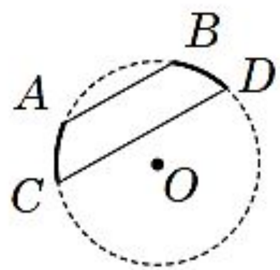
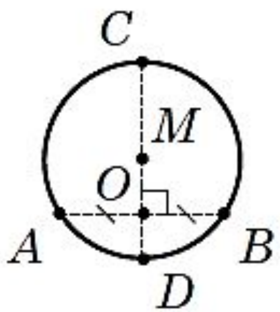
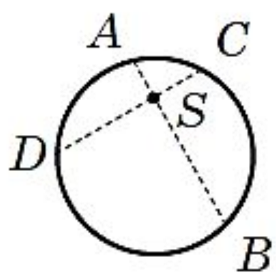
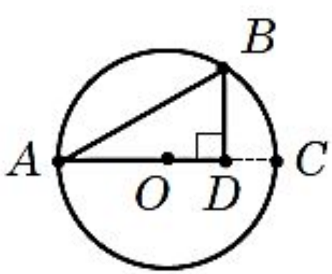
Окружность и круг

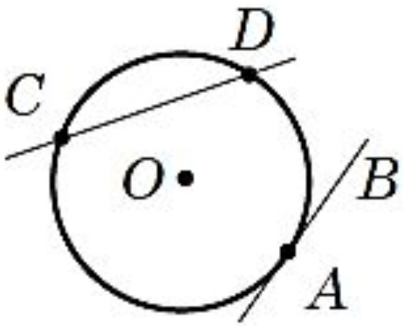
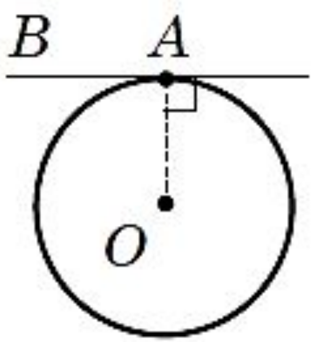
	**Окружность** — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки (центра окружности) одинаково. O — центр окружности. **Радиус окружности** — расстояние от центра до точки на окружности. OA, OC, OD — радиусы. Обозначается R или r. **Хорда** — отрезок, соединяющий две точки на окружности. MN, CD — хорды. **Диаметр** — хорда, проходящая через центр (обозначается D или d). $D = 2R$, $CD = 2OA$
	**Круг** — множество точек плоскости, расстояние до которых от данной точки (центра круга) не превышает данного расстояния (радиуса круга)

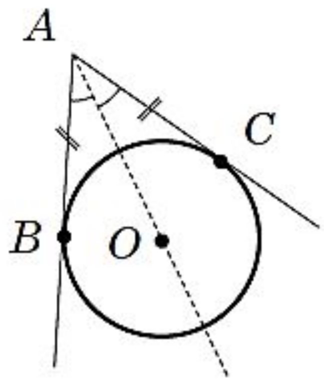
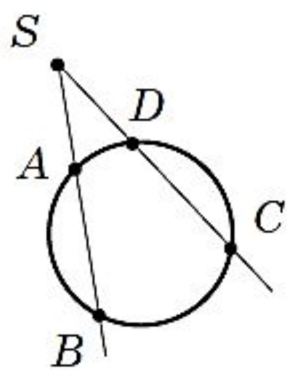
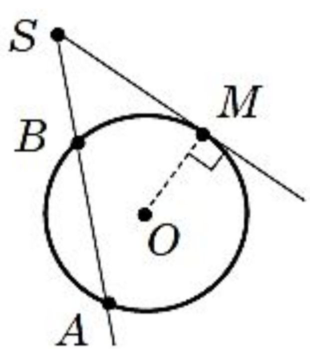
Окружность, хорды и дуги

	**Дуга окружности** — часть окружности, ограниченная двумя её точками. $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup AC$
Свойства	
	Равные дуги стягивают равные хорды. Если $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$. Равные хорды стягивают равные дуги. Если $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$

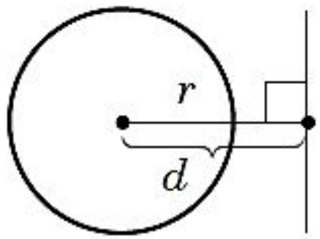
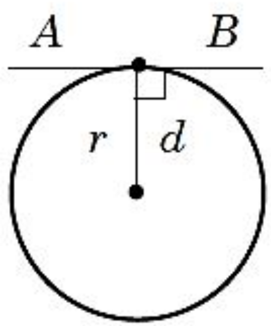
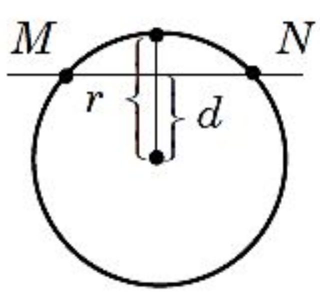
	Параллельные хорды отсекают от окружности равные дуги. Если $AB \parallel CD$, то $\cup AC = \cup BD$
	CD — диаметр, AB — хорда. Если $CD \perp AB$, то $AM = MB$; если $AM = MB$, то $CD \perp AB$
	Если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то $AS \cdot SB = CS \cdot SD$
	Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$, то $AB^2 = AD \cdot AC$; $BD^2 = AD \cdot DC$

Окружность, касательные и секущие

	**Касательная** — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. AB — касательная. **Секущая** — прямая, имеющая с окружностью две общие точки. CD — секущая
Свойства	
	$OA \perp AB$ Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

	$AB = AC$ OA — биссектриса $\angle BAC$. Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то: а) отрезки касательных равны; б) биссектриса угла между касательными проходит через центр окружности
	Если SB и SC — секущие, то $SA \cdot SB = SD \cdot SC$
	Если SM — касательная, SA — секущая, то $SM^2 = SB \cdot SA$

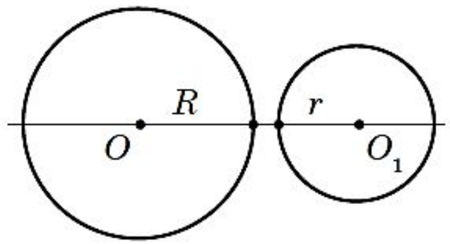
Взаимное расположение прямой и окружности

d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности	
	$d > r$ Общих точек нет
	$d = r$ Одна общая точка AB — касательная
	$d < r$ Две общие точки MN — секущая

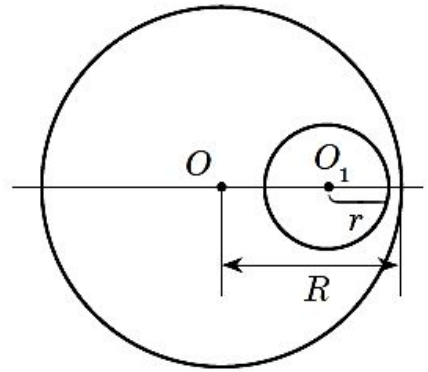
Взаимное расположение двух окружностей

OO_1 — расстояние между центрами, R и r — радиусы окружностей ($R > r$)

Окружности не имеют общих точек

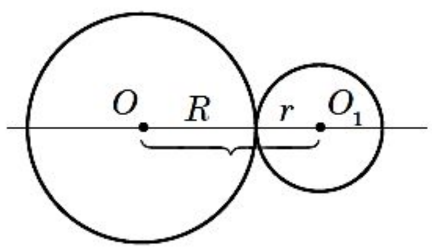


Окружности лежат одна вне другой
$R + r < OO_1$

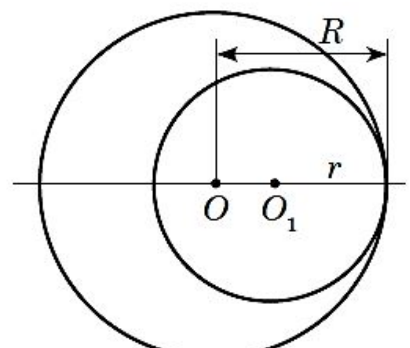


Одна окружность лежит внутри другой
$OO_1 < R - r$

Окружности касаются (одна общая точка)



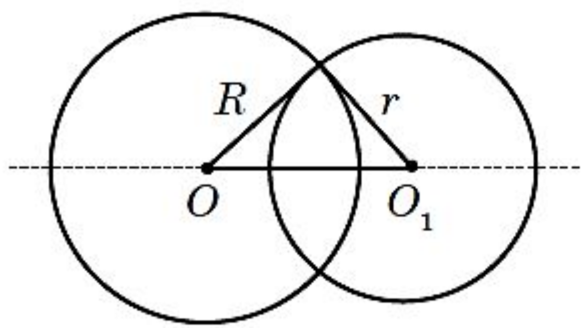
Касаются внешне
$OO_1 = R + r$

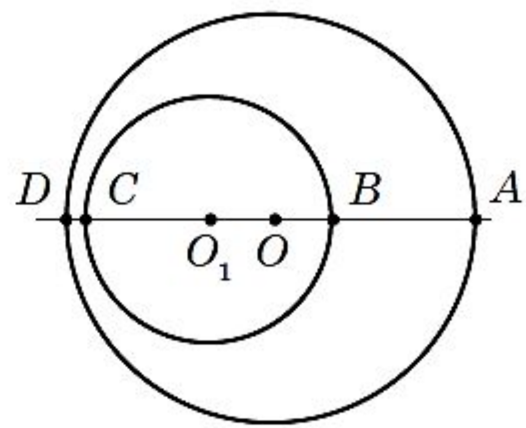


Касаются внутренне
$OO_1 = R - r$

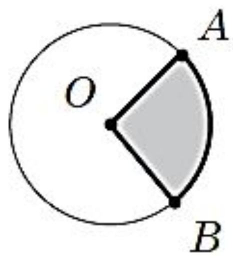
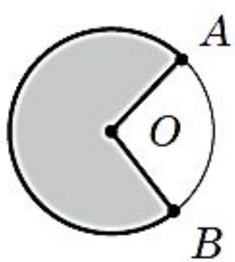
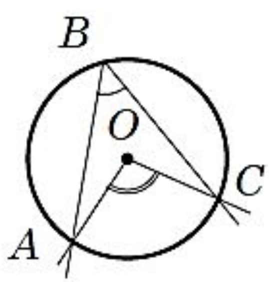
Окружности пересекаются (две общие точки)

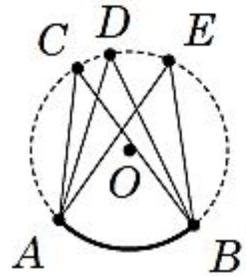
$R-r < OO_1 < R+r$





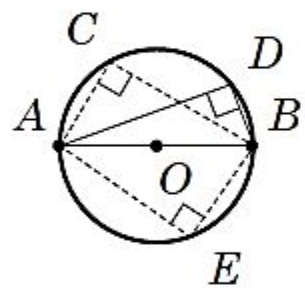
Углы в окружности

 	**Центральный угол** — плоский угол с вершиной в центре окружности. $\angle AOB$ — центральный угол. $\angle AOB = \cup AB$. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается
	**Вписанный угол** — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают её. $\angle ABC$ — вписанный. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, и половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу: $\angle ABC = \dfrac{1}{2} \cup AC$ $\angle ABC = \dfrac{1}{2} \angle AOC$



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

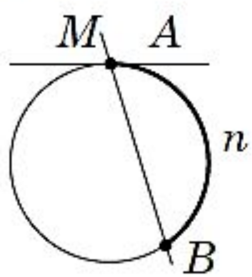
$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$



Вписанные углы, которые опираются на диаметр, прямые.

$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90°$

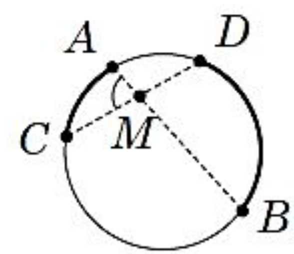
Угол между касательной и секущей



MA — касательная;
MB — секущая

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$$

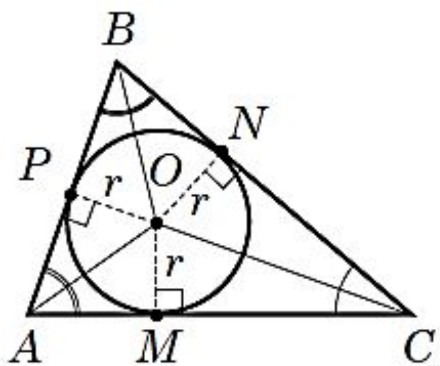
Угол между хордами

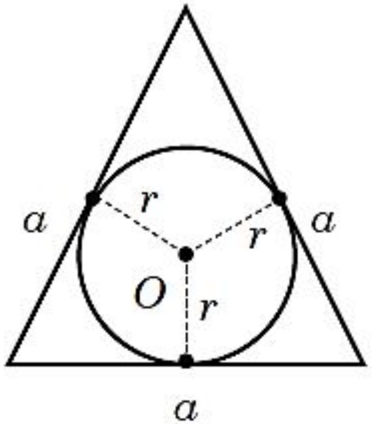
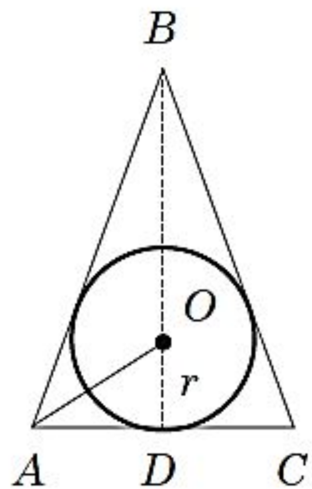
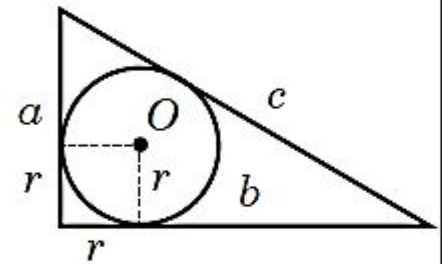


AB и CD — хорды

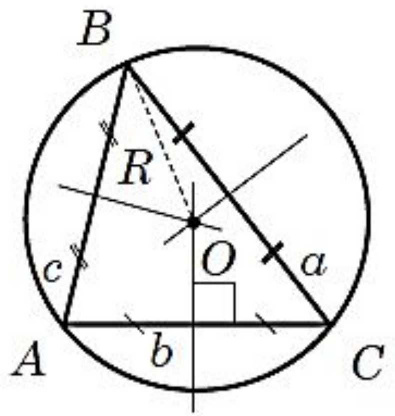
$$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$$

Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

Вписанная окружность	
	Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон. Центр этой окружности — точка пересечения **биссектрис** углов треугольника. $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$ или $r = \dfrac{S}{p}$,
	где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, S — площадь треугольника, p — полупериметр, a, b, c — длины сторон

Равно-сторонний треугольник	Равно-бедренный треугольник	Прямо-угольный треугольник
 $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ Точка O — центр вписанной и описанной окружности, точка пересечения биссектрис, медиан, высот	 $AB = BC$ BD — высота, медиана, биссектриса, высота. $OD = r$	 a и b — катеты, c — гипотенуза $r = \frac{a+b-c}{2}$ $a+b = 2R+2r$, R — радиус описанной окружности

Описанная окружность



Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все **его вершины.**

Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

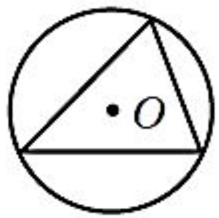
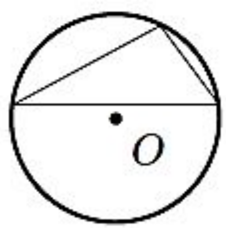
$OA = OB = OC = R$

В произвольном треугольнике: $R = \dfrac{abc}{4S}$; $R = \dfrac{a}{2\sin A}$.

В равностороннем треугольнике: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

В прямоугольном треугольнике: $R = \dfrac{c}{2}$,

где c — гипотенуза треугольника

<table>
<tr><th colspan="3">Положение точек описанной окружности
в зависимости от вида треугольника</th></tr>
<tr><td colspan="3">Остроугольный</td></tr>
<tr><td>
</td><td colspan="2">Центр — во внутренней области треугольника</td></tr>
<tr><td colspan="3">Тупоугольный</td></tr>
<tr><td>
</td><td colspan="2">Центр — вне области треугольника</td></tr>
<tr><td colspan="3">Прямоугольный</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$R = \frac{c}{2} = m_c$</td><td>Центр — совпадает с серединой гипотенузы</td></tr>
</table>