

# Функция нескольких действительных переменных

Условный экстремум  
Наибольшее и наименьшее  
значение ФНДП

# Условный экстремум

- В прикладных задачах достаточно часто необходимо отыскать экстремумы функции двух или более переменных, аргументы которых удовлетворяют дополнительным условиям.
- Дополнительные условия – **уравнения связи** (одно или несколько).
- В этом случае говорят об **условном экстремуме функции**.

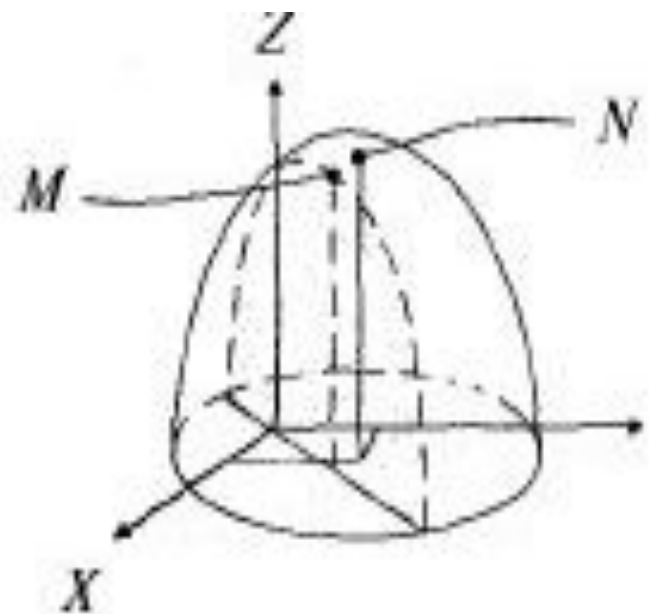
**Пример.** Найти точки экстремума функции  $z = 4 - x^2 + 2x - y^2 + 4y$ , если уравнение связи  $y - x = 0$ .

В самом простом случае уравнение связи позволяет выразить одну из переменных через другую. В рассмотренном выше примере:  $y = x$ . Это позволяет исследовать функцию  $z = f(x, y)$  как функцию одного переменного:

$$z = 4 - x^2 + 2x - y^2 + 4y = 4 - x^2 + 2x - x^2 + 4x = -2x^2 + 6x + 4.$$

Так как изначально область определения функции  $R^2$ , то исследуем полученную функцию  $z(x) = -2x^2 + 6x + 4$  на экстремум по переменной  $x \in R$ .

Найдем критическую точку  $z'(x) = -4x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1,5$ . Так как  $z''(x) = -4 < 0 \Rightarrow x = 1,5$  точка максимума. Следовательно, вдоль линии  $y = x$  функция имеет условный экстремум в точке  $M(1,5; 1,5)$  в виде максимума  $Z(M) = 8,5$ .



# Наибольшее и наименьшее значение функции в ограниченной замкнутой области

Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области аналогичны свойствам непрерывных на отрезке функций одной переменной.

**Теорема.** *Если функция  $z = f(x; y)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области:*

- 1) ограничена;*
- 2) имеет точки, в которых принимает наименьшее  $m$  и наибольшее  $M$  значения;*
- 3) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между  $m$  и  $M$ .*

# Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в ограниченной замкнутой области $D$

1. Найти область определения функции  $z = f(x, y)$  .
2. Определить, включена ли область  $D$  в область определения функции.
3. Найти критические точки функции  $z = f(x, y)$ , отобрать из них те, которые являются внутренними точками области  $D$ . Вычислить значение функции  $z = f(x, y)$  в этих точках.
4. Найти наибольшие и наименьшие значения функции  $z = f(x, y)$  на границе области  $D$  .
5. Сравнить все найденные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - 2y \text{ в области } D: \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

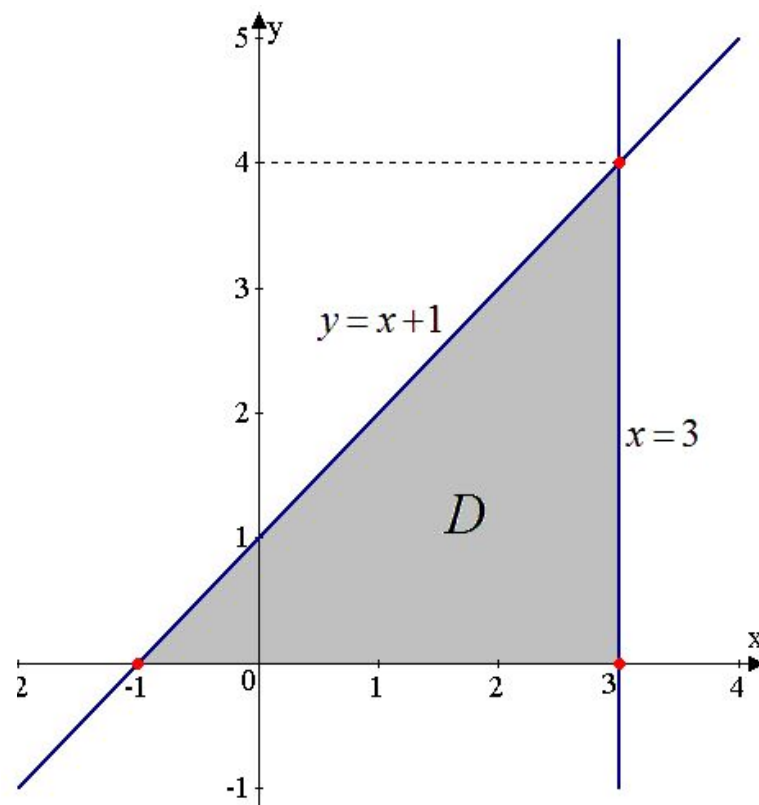
Область определения функции  $R^2$ .

Область  $D$  - замкнутая, ограниченная, входит в область определения функции.

Находим критические точки функции  $\begin{cases} z'_x = 2x + 1 = 0 \\ z'_y = 6y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$

. Критическая точка  $M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$  - внутренняя точка области  $D$ .

Значение  $z(M) = -\frac{7}{12}$ .



Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции

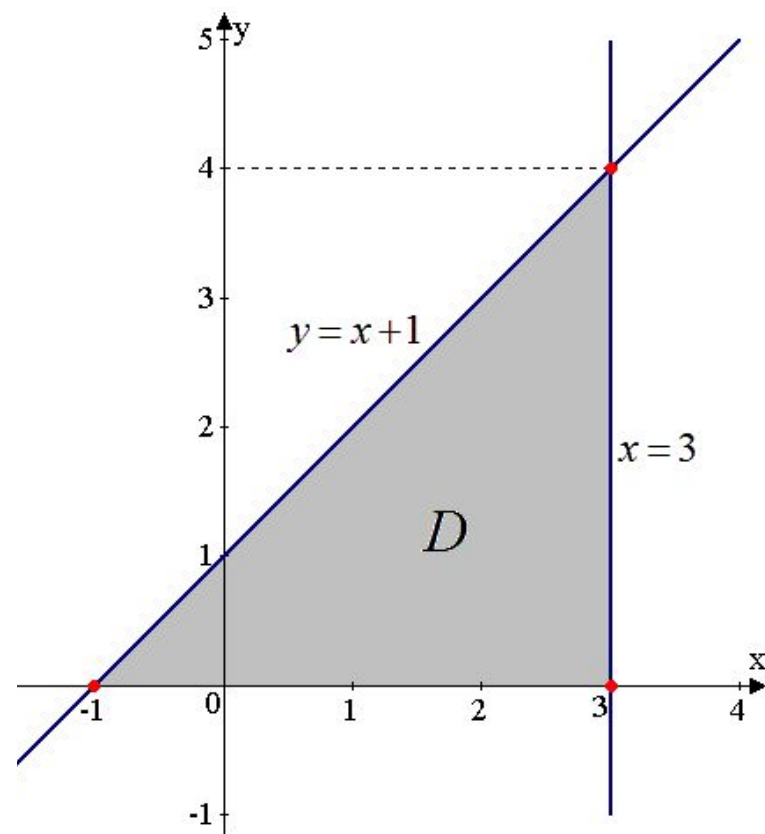
$$z = x^2 + 3y^2 + x - 2y \text{ в области } D: \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Граница области  $D$  – объединение трех отрезков. Исследуем поведение функции на каждом по отдельности.

При  $y = 0$  функция  $z = x^2 + 3y^2 + x - 2y$  является функцией одной переменной  $z(x) = x^2 + x (-1 \leq x \leq 3)$ . Критическая точка

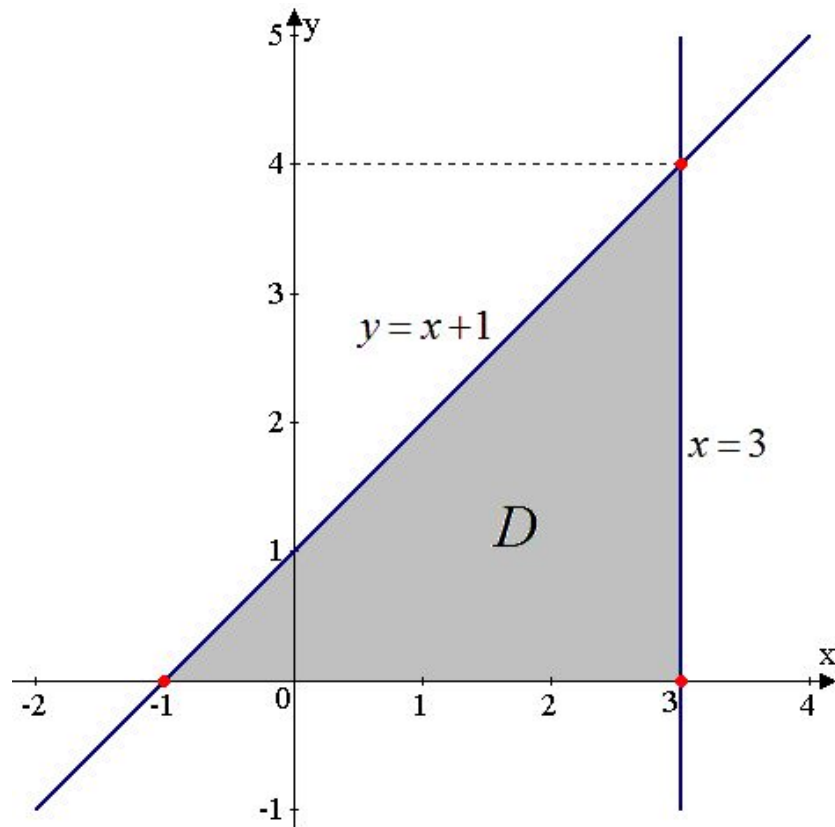
$x = -\frac{1}{2} \in [-1; 3]$ . Вычислим значение функции в ней и на концах отрезка  $[-1; 3]$ :

$$z(-1; 0) = 0; \quad z(3; 0) = 12; \quad z\left(-\frac{1}{2}; 0\right) = -\frac{1}{4}.$$



Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - 2y \text{ в области } D: \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



При  $x=3$  функция  $z = x^2 + 3y^2 + x - 2y$  является функцией одной переменной  $z(y) = 3y^2 - 2y + 12$  ( $0 \leq y \leq 4$ ). Критическая точка  $y = \frac{1}{3} \in [0; 4]$

. Вычислим значение функции в ней и на концах отрезка  $[0; 4]$ :

$$z\left(3; \frac{1}{3}\right) = 11\frac{2}{3}; \quad z(3; 0) = 12; \quad z(3; 4) = 52.$$



Задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - 2y \text{ в области } D: \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Вдоль прямой  $y = x + 1$  функция  $z = x^2 + 3y^2 + x - 2y$  является функцией одной переменной  $z(x) = 4x^2 + 5x + 1$  ( $-1 \leq x \leq 3$ ).

Критическая точка  $x = -\frac{5}{8} \in [-1; 3]$ .

Вычислим значение функции в ней и на концах отрезка

$$[-1; 3]: \quad z\left(-\frac{5}{8}; -\frac{3}{8}\right) = -\frac{9}{16}; \quad z(-1; 0) = 0; \quad z(3; 4) = 52.$$

**Ответ:**

Наибольшее значение функции достигается на границе области

$$z(3; 4) = 52; \text{ наименьшее - внутри области } z\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{12}.$$

