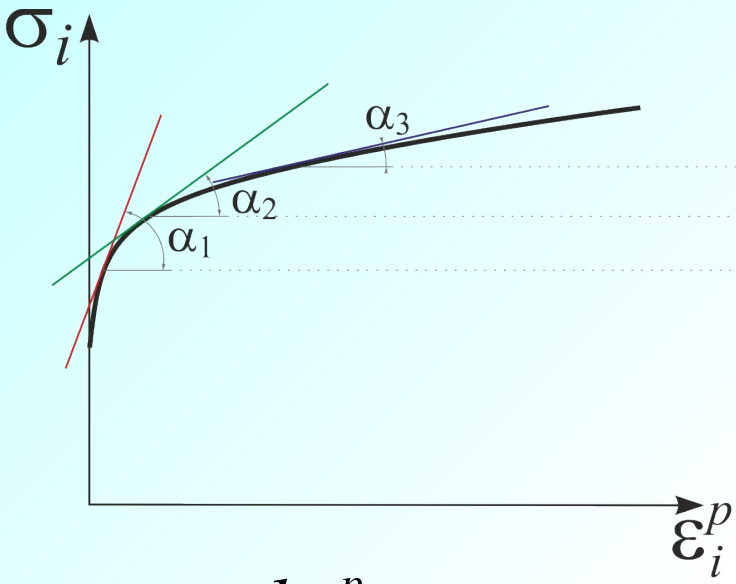
Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью

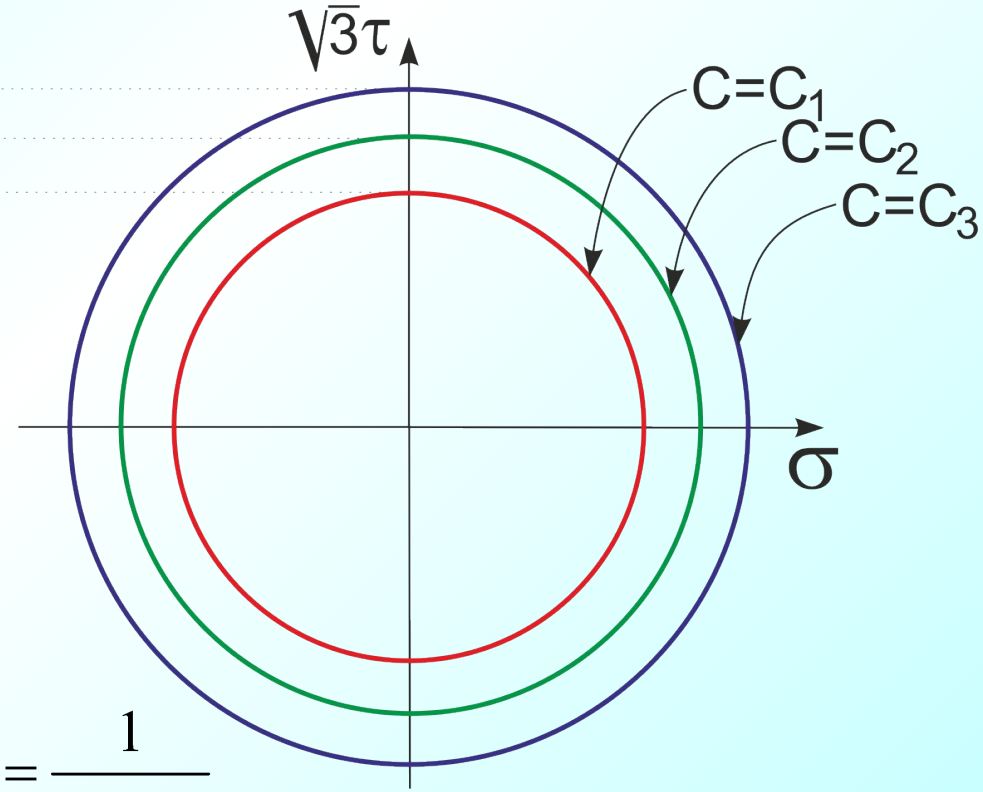
И.Н. Изотов, **Б.Е. Мельников**, **С.Г. Семенов**

План доклада

- Эксперименты на никелевых образцах
- Тензорная форма записи уравнений теории
- Термодинамический анализ
- Численная реализация
- Эксперименты на стальных образцах
- Расчеты элементов конструкций
- Заключение

Поверхность равных пластических податливостей



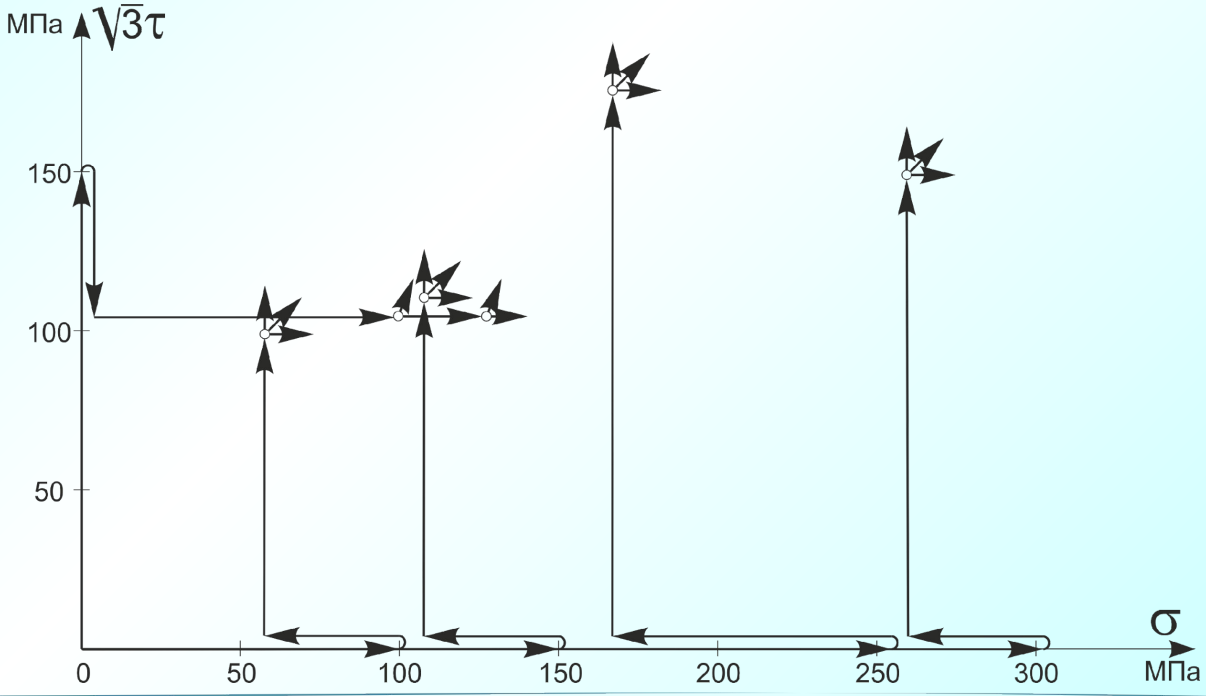


$$C = \frac{d\varepsilon_i^p}{d\sigma_i}$$

$$C_1 = \frac{1}{tg(\alpha_1)} < C_2 = \frac{1}{tg(\alpha_2)} < C_3 = \frac{1}{tg(\alpha_3)}$$

Эксперименты на никелевых образцах

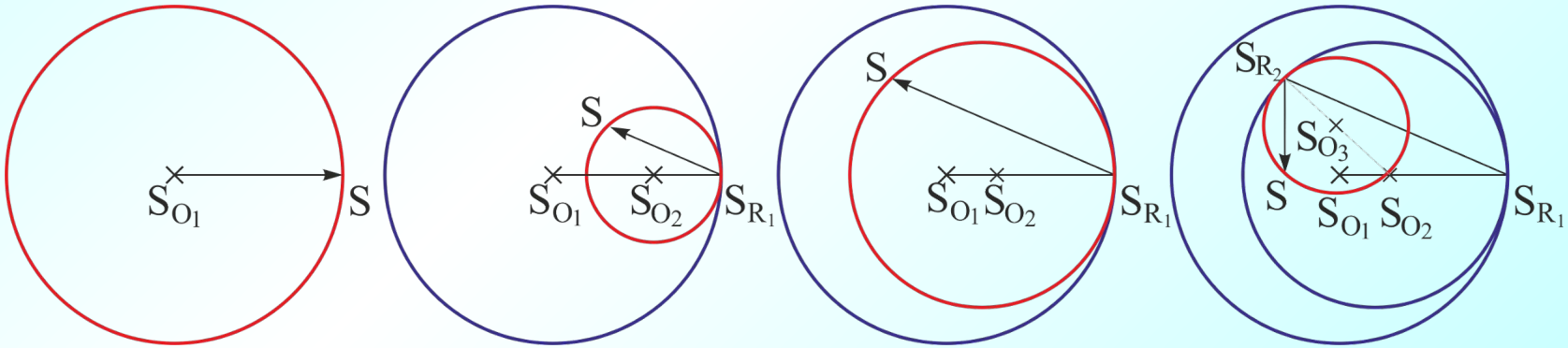
Образцы: тонкостенные трубки ∅8,1 мм, толщина стенки 0,19 мм (не менее 6-7 зерен), рабочая длина 150 мм из технически чистого никеля (примеси: Si – 0,068%; Fe – 0,025%; Cu – 0,02%). Допуск формы на цилиндрические поверхности не более ±0,01 мм (±0,1%); наибольшие отклонения в величинах площадей поперечных сечений одного и того же образца - ±0,03 мм^2 (±0,7%). Отжиг при 860° С с охлаждением в печи.



И.Н. Изотов, Ю.И. Ягн. Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения. ДАН СССР. 1961. Т. 139, №3. I Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике 1960 г.

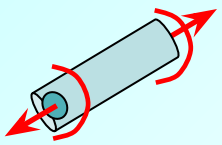
1. Уравнения эволюции поверхности нагружения сложны, что затрудняет их использование в инженерной практике.
2. Геометрические места равных пластических податливостей близки к окружностям

$$\rho_\sigma = \frac{A}{h}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{i0}} \qquad \rho_{\sqrt{3}\tau} = \frac{A}{h}\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\varepsilon_{i0}} \qquad h = ak\left[\frac{R+B}{\sigma_{i0}+B}D - B\right]^{k-1}$$



Эксперименты на никелевых образцах

(поле пластических податливостей)



$$E_1 = \varepsilon \qquad E_3 = \gamma / \sqrt{3} \qquad \Sigma_1 = \sigma \qquad \Sigma_3 = \sqrt{3}\tau \tag{1}$$

$$C = \frac{|\delta \mathbf{Э}|}{|\delta \mathbf{\Sigma}| \cos(\alpha - \beta)} \tag{2}$$

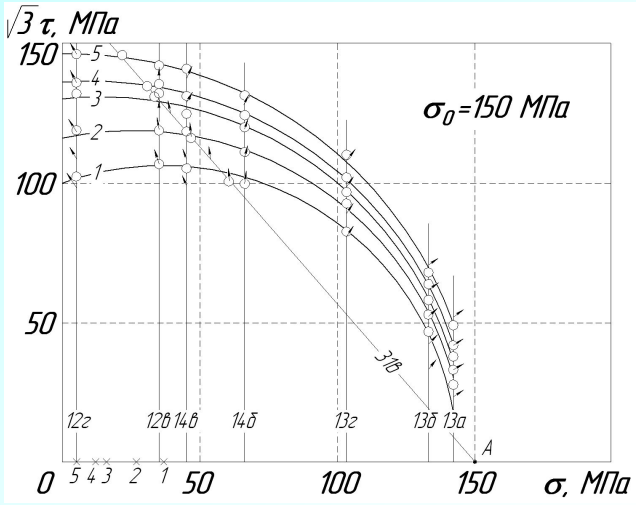
$$|\delta \mathbf{Э}| = \sqrt{\delta\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\delta\gamma^2} \qquad |\delta \mathbf{\Sigma}| = \sqrt{\delta\sigma^2 + 3\delta\tau^2} \tag{3}$$

$$\alpha = arctg \frac{\delta\gamma}{\sqrt{3}\delta\varepsilon} \qquad \beta = arctg \frac{\sqrt{3}\delta\tau}{\delta\sigma} \tag{4}$$

Погрешности эксперимента

Величина	Среднеквадратичная абсолютная погрешность υ	Среднеквадратичная относительная погрешность δ
δε	$0{,}0002\% < v_\varepsilon < 0{,}0003\%$	$\delta_\varepsilon < 0{,}3\%$
δγ	$0{,}00021\% < v_\gamma < 0{,}00038\%$	$\delta_\gamma < 0{,}3\%$
σ	max $v_\sigma \approx 0{,}8$МПа	max $\delta_\sigma \approx 0{,}25\%$
τ	max $v_\tau \approx 0{,}6$МПа	max $\delta_\tau \approx 0{,}28\%$
|δΣ|	$v_{\delta\boldsymbol{S}} = 0{,}08$МПа	$\delta_{\delta\boldsymbol{S}} = 0{,}8\%$
|δЭ|	$v_{\delta Э} \approx 0{,}0003\%$	max $\delta_{\delta Э} = 5\%$
α	$\frac{0{,}00026\%}{\lvert\delta Э\rvert} < V_2 < \frac{0{,}0003\%}{\lvert\delta Э\rvert}$	
β	Max $v_\beta \approx 0{,}4^\circ$	
C	При |δΣ|=10 МПа, $C=10^{-11}$Па$^{-1}$ (*C* наименьшее используемое)	
	$v_h = 0{,}6\cdot10^{-13}$Па	$\delta_h = 6\%$
	При $C=10^{-10}$Па$^{-1}$	
	$v_h = 1{,}25\cdot10^{-12}$ Па$^{-1}$	$\delta_h = 1{,}25\%$

Геометрические места равных пластических податливостей



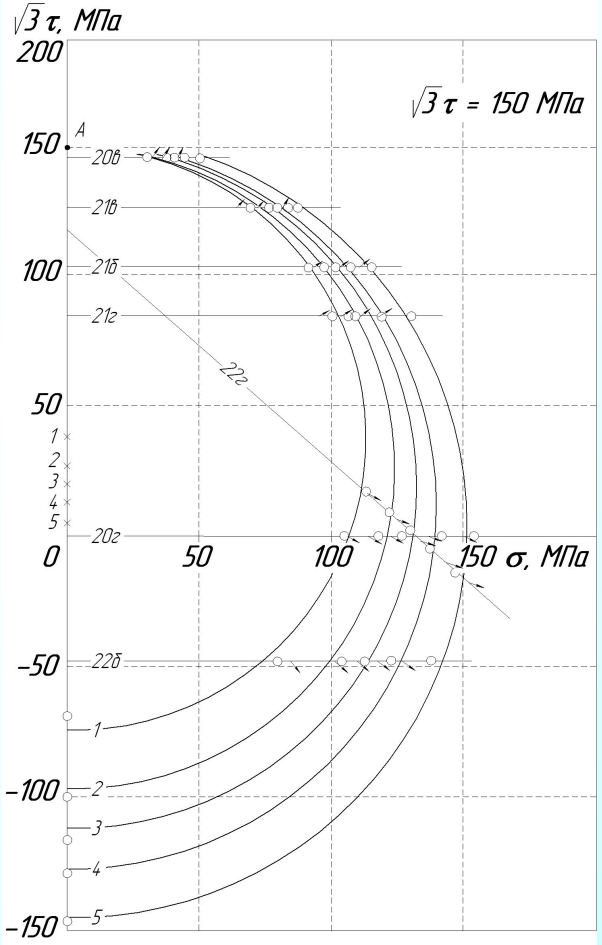
Нагружение осевой силой

$C_1=1\cdot10^{-11}$ $Па^{-1}$

$C_2=2\cdot10^{-11}$ $Па^{-1}$

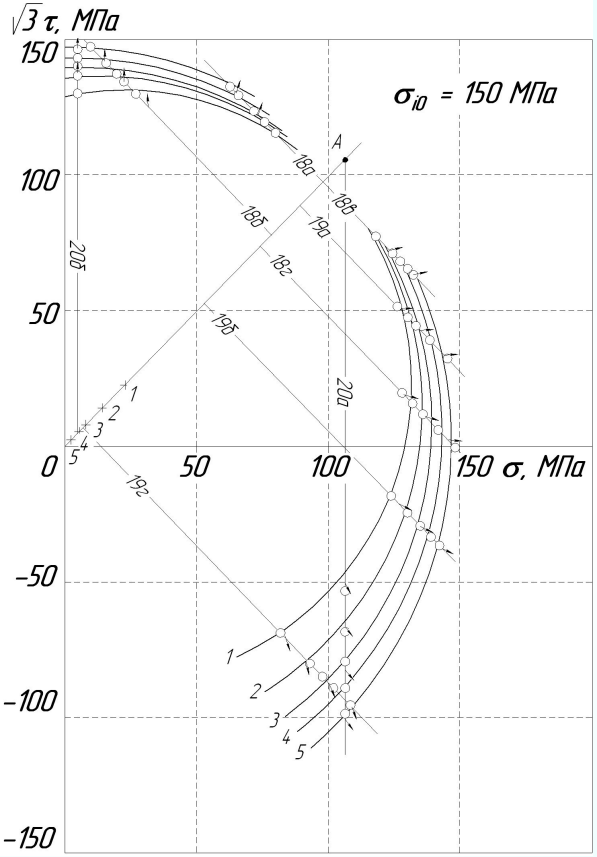
$C_3=3\cdot10^{-11}$ $Па^{-1}$

$C_4=5\cdot10^{-11}$

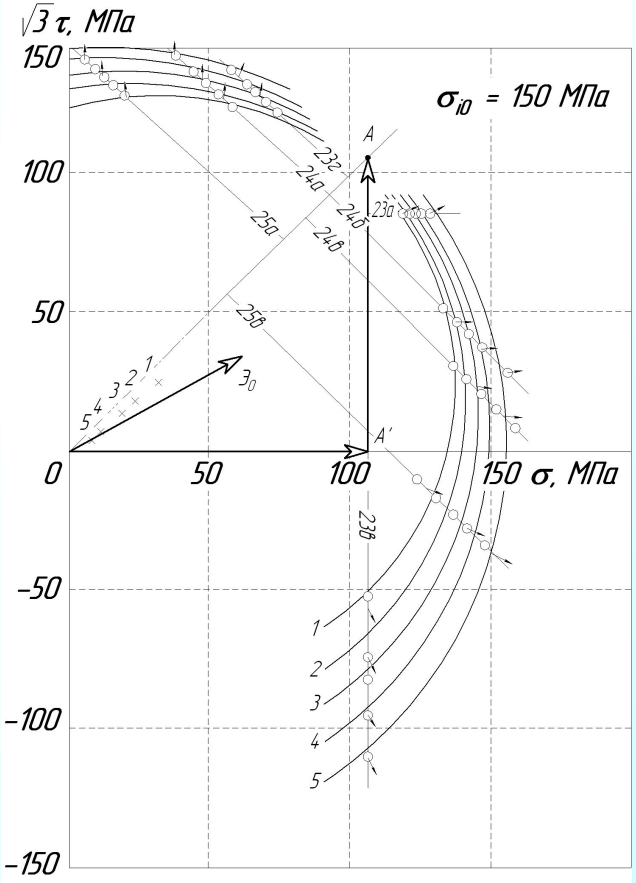


Нагружение крутящим моментом

Геометрические места равных пластических податливостей



Нагружение по пути $\sigma = \sqrt{3}\tau$



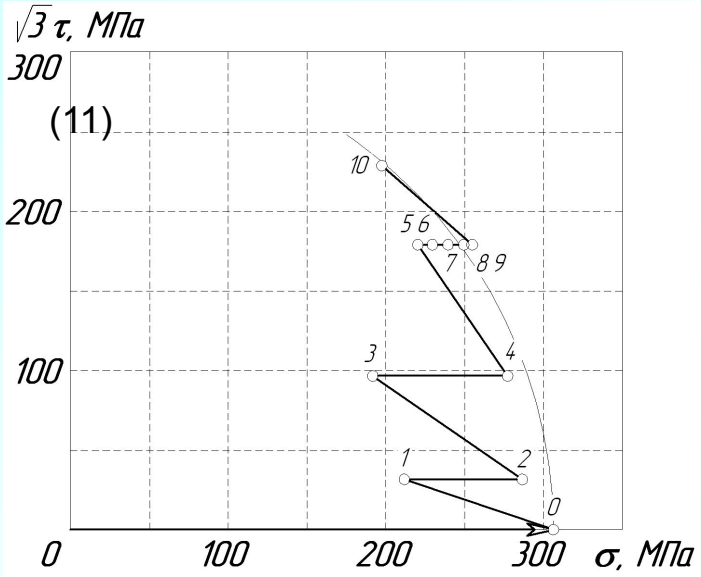
Нагружение по двухзвенному пути OA'A

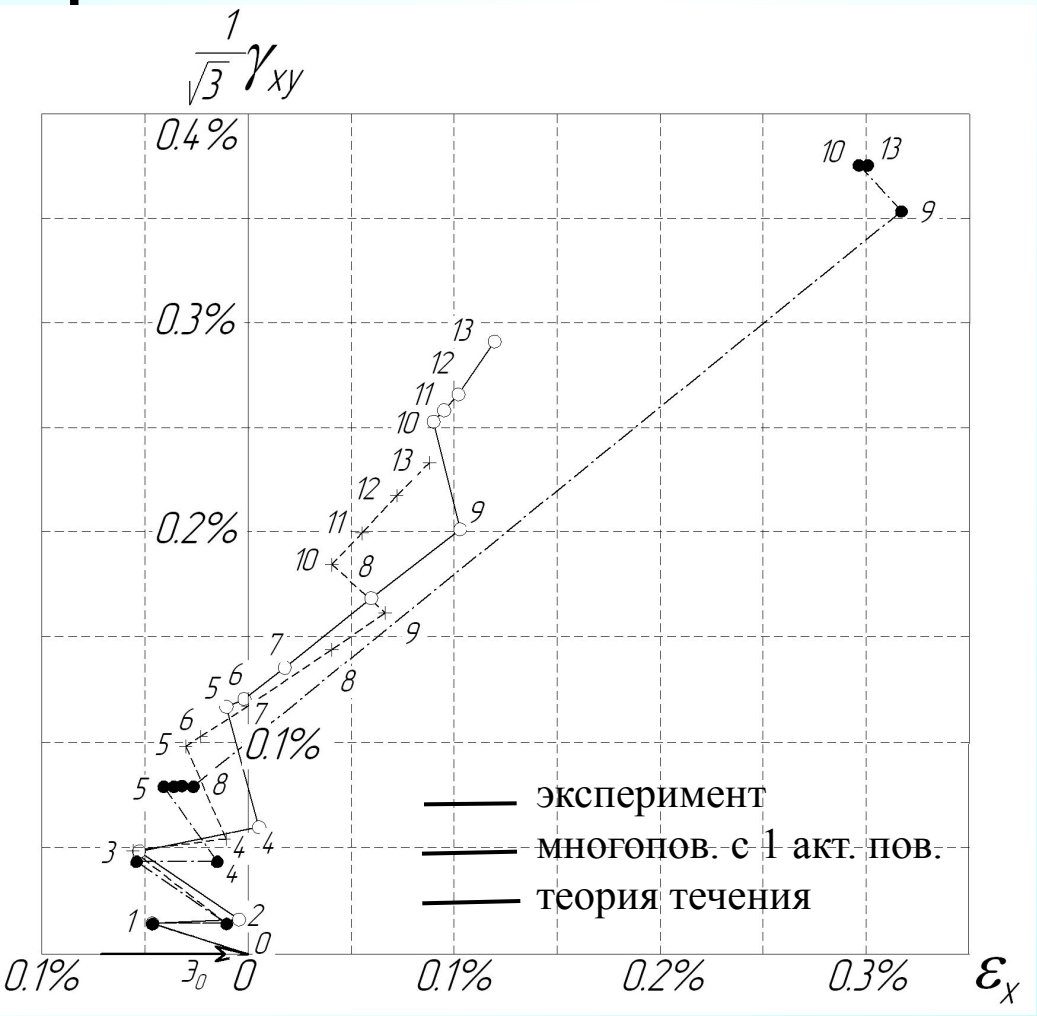
Сравнение результатов расчета и эксперимента

$$\rho_\sigma = \frac{A}{h}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{i0}} \qquad \rho_{\sqrt{3}\tau} = \frac{A}{h}\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\varepsilon_{i0}}$$

$$h = ak\left[\frac{R+B}{\sigma_{i0}+B}D - B\right]^{k-1} \quad *$$

,





* **Изотов И.Н., Ягн Ю.И.** Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения // ДАН СССР, 1961. т.139. №3. С. 576-579.

Тензорная форма записи

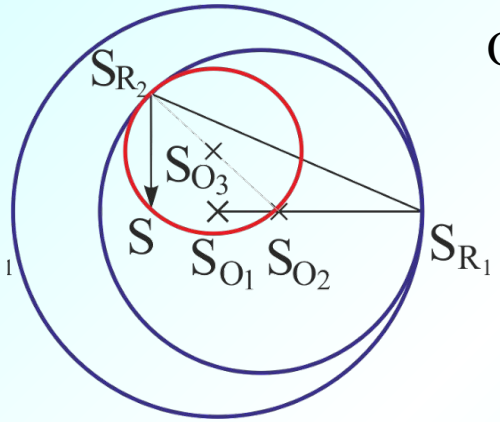
Условие возникновения нового k-го реверса $\dfrac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_{O_k})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\sigma} < 0,$ (1)

где $\boldsymbol{\sigma}_{O_k}$ - центр k-ой поверхности равных податливостей

Уравнение активной (k+1) поверхности равных пластических податливостей

$$F_{k+1}(\boldsymbol{\sigma}_A, \boldsymbol{\sigma}_{R_j}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = f_{k+1}(\boldsymbol{\sigma}_A) - Y_{k+1}(\boldsymbol{\sigma}_{R_j}, \varepsilon^p) = 0, \qquad j = \overline{1,k} \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{O_{k+1}}$ - тензор активных напряжений, $\boldsymbol{\sigma}_{R_j}$ - напряжение реверса

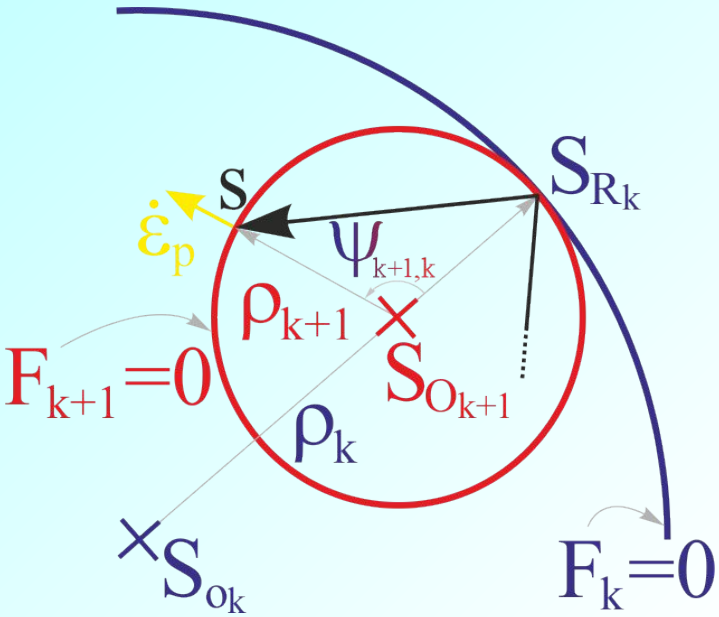


Определяющее уравнение для пластической деформации

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = C\,\frac{\partial f_{k+1}(\boldsymbol{\sigma}_A)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\,\frac{\partial f_{k+1}(\boldsymbol{\sigma}_A)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\sigma}, \qquad (3)$$

где C – модуль пластической податливости

При использовании гиперсферы Мизеса $f(\boldsymbol{\sigma}_A) = f(\mathbf{s}_A) = \sqrt{(3/2\mathbf{s}_A \cdot\cdot \mathbf{s}_A)}$: (1)



$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = 3/2\, C \frac{\mathbf{s}_A \mathbf{s}_A \cdot\cdot d\mathbf{s}}{\mathbf{s}_A \cdot\cdot \mathbf{s}_A} \quad (2)$$

$$\mathbf{s}_{O_{j+1}} = \mathbf{s}_{O_j} + a_j(\mathbf{s}_{R_j} - \mathbf{s}_{O_j}) \quad (3)$$

$$a_j = \frac{(\mathbf{s}_{R_{j+1}} + \mathbf{s}_{R_j} - 2\mathbf{s}_{O_j}) \cdot\cdot (\mathbf{s}_{R_{j+1}} - \mathbf{s}_{R_j})}{2(\mathbf{s}_{R_j} - \mathbf{s}_{O_j}) \cdot\cdot (\mathbf{s}_{R_{j+1}} - \mathbf{s}_{R_j})} \quad (4)$$

$$j = \overline{1,k}$$

Уравнение поверхности $F_{k+1} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s}_{A_{k+1}} \cdot\cdot \mathbf{s}_{A_{k+1}}} - Y_{k+1} = 0 \qquad Y_{k+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho_{k+1}$ (5)

Радиус j-ых поверхностей (пассивных) $\rho_j = \sqrt{\mathbf{s}_{P_j} \cdot\cdot \mathbf{s}_{P_j}} = \sqrt{\left(\mathbf{s}_{R_j} - \mathbf{s}_{O_j}\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{s}_{R_j} - \mathbf{s}_{O_j}\right)}$ (6)

Радиус k+1-ой поверхности (активной) $\rho_{k+1} = \sqrt{\mathbf{s}_{A_{k+1}} \cdot\cdot \mathbf{s}_{A_{k+1}}} = \sqrt{\left(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{O_{k+1}}\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{O_{k+1}}\right)}$ (7)

Условие вложенности $0 < \rho_{k+1} < \rho_k < \ldots < \rho_2 < \rho_1$ (8)

Модули пластической податливости

$$C_j = C_j(\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_{R_{j-1}}) \qquad C_1 = \frac{d\varepsilon_i^p}{d\sigma_i}, \quad C_{k+1} = C_1\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_1}\right)^N \qquad j = 2...k+1 \qquad (1)$$

Обращенная форма записи для МКЭ

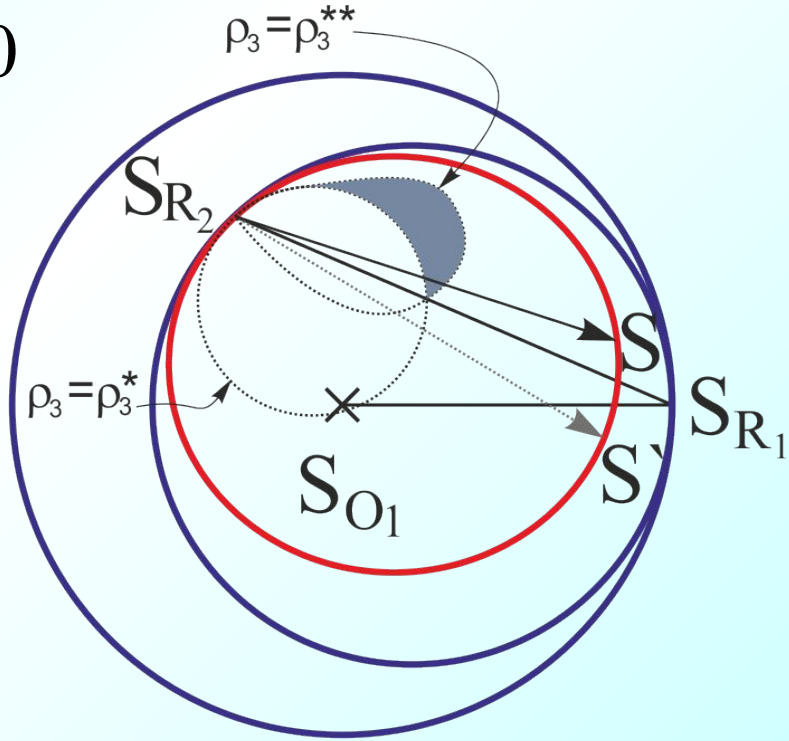
$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \cdot\cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_A)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_A)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, \mathbf{D}}{\frac{1}{C} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_A)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, \mathbf{D} \cdot\cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_A)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \qquad (2)$$

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \cdot\cdot\, \mathbf{s}_A\, \mathbf{s}_A \cdot\cdot\, \mathbf{D}}{\frac{2\mathbf{s}_A \cdot\cdot\, \mathbf{s}_A}{3C} + \mathbf{s}_A \cdot\cdot\, \mathbf{D} \cdot\cdot\, \mathbf{s}_A}$$

Анализ термодинамической состоятельности

Диссипативное неравенство $\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\dot{\psi} \geq 0$

$\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, ρ – плотность среды, ψ – удельная свободная энергия



Модификация аппроксимации для вычисления пластической податливости

$$C_{k+1} = \begin{cases} C_1 \left(\dfrac{\rho_{k+1}}{\rho_1} \right)^N & при \quad \overset{**}{\rho}_{k+1} \leq \rho_k \\ C_1 \dfrac{\rho_k - \rho_{k+1}}{\rho_1} \left(\dfrac{\rho_{k+1}}{\rho_1} \right)^N & при \quad \overset{**}{\rho}_{k+1} > \rho_k \end{cases}$$

где $$\overset{**}{\rho}_{k+1} = -\frac{1}{1 - cos\,\psi_{k+1,k}} \left[\rho_k \, cos\,\psi_{k+1,k} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\rho_j - \rho_{j+1} \right) cos\,\psi_{k+1,j} \right]$$

Численная реализация

При наличии k реверсной истории на текущем шаге возможны 2k+3 ситуации:

- отсутствие возникновения и вычеркивания реверсов;
- рождение нового k+1 реверса;
- k случаев одновременного вычеркивания от одного до k реверсов;
- k+1 случая возникновения k+1-го реверса с последующим вычеркиванием от одного до k+1 реверсов

Для учета этих особенностей шаги по напряжениям разбиваются на подшаги:

$$\mathbf{s}_{l+1}^{i} = \mathbf{s}_l + \alpha^i \Delta\mathbf{s},$$

$$\alpha^i = -\frac{(\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_{O_{k+1-i}}) \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}}{\Delta\mathbf{s} \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}} + \sqrt{\left[\frac{(\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_{O_{k+1-i}}) \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}}{\Delta\mathbf{s} \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}}\right]^2 + \frac{\rho_{R_{k+1-i}}{}^2 - \rho_l{}^2}{\Delta\mathbf{s} \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}}},$$

$$\rho_{R_{k+1-i}} = \sqrt{(\mathbf{s}_{R_{k+1-i}} - \mathbf{s}_{O_{k+1-i}}) \cdot\cdot (\mathbf{s}_{R_{k+1-i}} - \mathbf{s}_{O_{k+1-i}})},$$

где

$$\rho_l = \sqrt{(\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_{O_{k+1-i}}) \cdot\cdot (\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_{O_{k+1-i}})}.$$

Аналогичные выражения в пространстве деформаций для удобства реализации в МКЭ

$$\mathbf{e}_{l+1}^{i} = \mathbf{e}_{l} + \beta^{i}\Delta\mathbf{e},$$

$$\mathbf{s}_{l+1}^{i} = \mathbf{s}_{l+1}^{i-1} + \overline{\mathbf{D}_{i-1}^{ep}} \cdot\cdot (\mathbf{e}_{l+1}^{i} - \mathbf{e}_{l+1}^{i-1}),$$

$$\Delta\mathbf{s}^{i-1} = \overline{\mathbf{D}_{i-1}^{ep}} \cdot\cdot \Delta\mathbf{e},$$

$$\mathbf{s}_{l+1}^{i} = \mathbf{s}_{l+1}^{i-1} + (\beta^{i} - \beta^{i-1})\overline{\mathbf{D}_{i-1}^{ep}} \cdot\cdot \Delta\mathbf{e}.$$

$$\mathbf{s}_{l+1}^{i} = \mathbf{s}_{l}^{i-1} + \beta^{i}\Delta\mathbf{s}^{i-1},$$

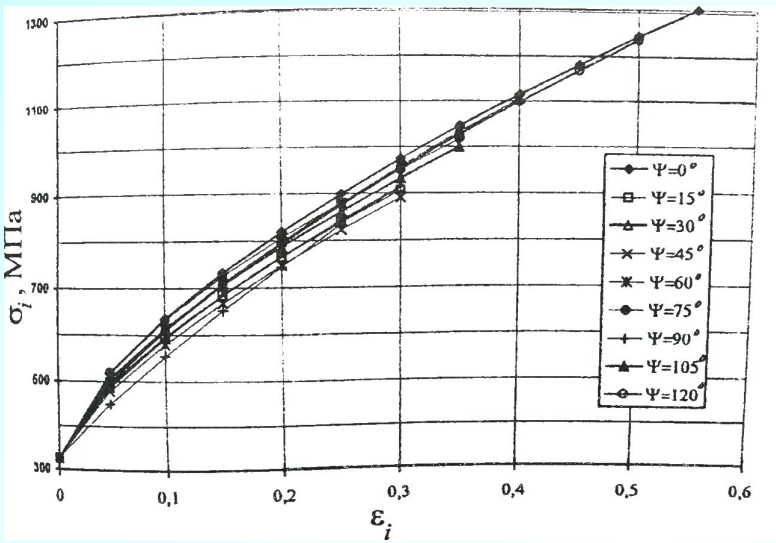
$$\beta^{i} = -\frac{(\mathbf{s}_{l}^{i-1} - \mathbf{s}_{O_{k+1-i}}) \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}^{i-1}}{\Delta\mathbf{s}^{i-1} \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}^{i-1}} + \sqrt{\left[\frac{(\mathbf{s}_{l}^{i-1} - \mathbf{s}_{O_{k+1-i}}) \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}^{i-1}}{\Delta\mathbf{s}^{i-1} \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}^{i-1}}\right]^{2} + \frac{\rho_{R_{k+1-i}}{}^{2} - \rho_{l}{}^{2}}{\Delta\mathbf{s}^{i-1} \cdot\cdot \Delta\mathbf{s}^{i-1}}},$$

$$\beta^{1} = 2\frac{(\mathbf{s}_{O_{k+1}} - \mathbf{s}_{l}) \cdot\cdot \overline{\mathbf{D}_{0}^{ep}} \cdot\cdot \Delta\mathbf{e}}{\Delta\mathbf{e} \cdot\cdot \overline{\mathbf{D}_{0}^{ep}} \cdot\cdot \overline{\mathbf{D}_{0}^{ep}} \cdot\cdot \Delta\mathbf{e}}.$$

Эксперименты на образцах из стали

1. Проверка гипотезы единой кривой

$$\Psi = \arctan(\Sigma_1 / \Sigma_2)$$



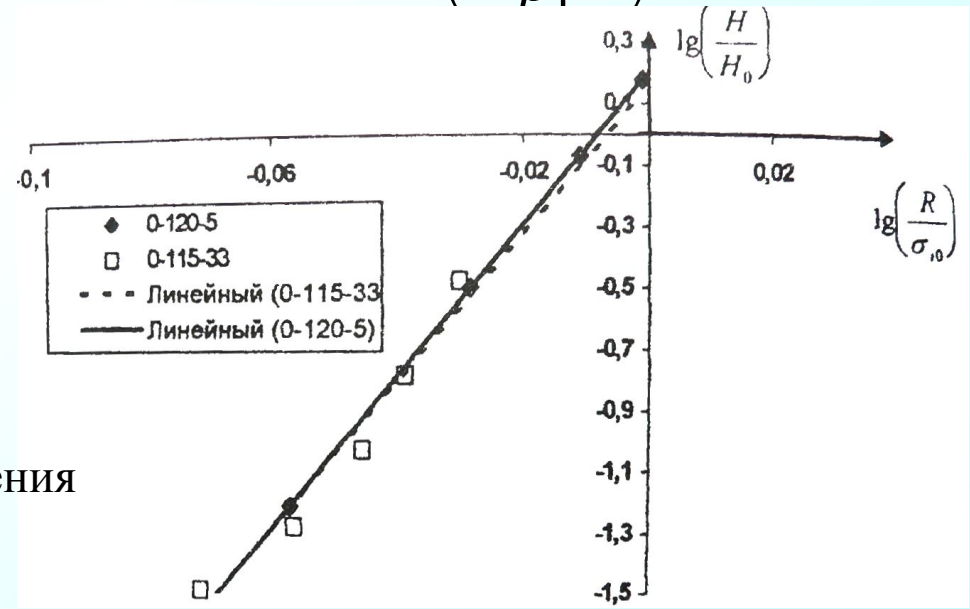
2. Стабильность диаграммы деформирования
3. Влияние гидростатического давления

$$\sigma_{cp} / \sigma_i = 0,33...0,466$$

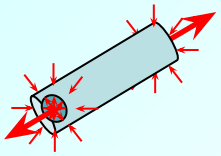
Сталь Х18Н10Т

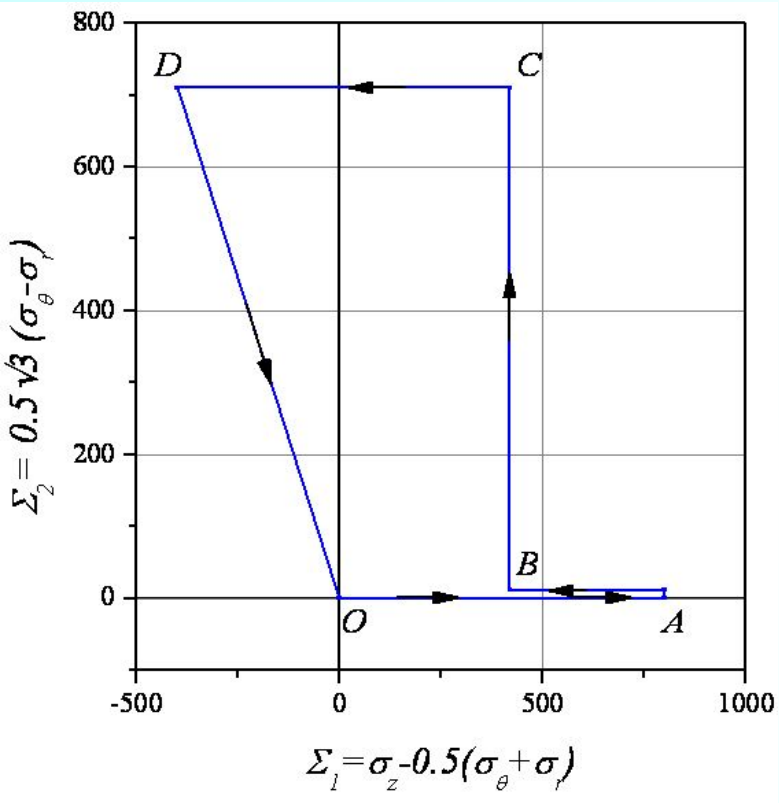
4. Проверка аппроксимации С

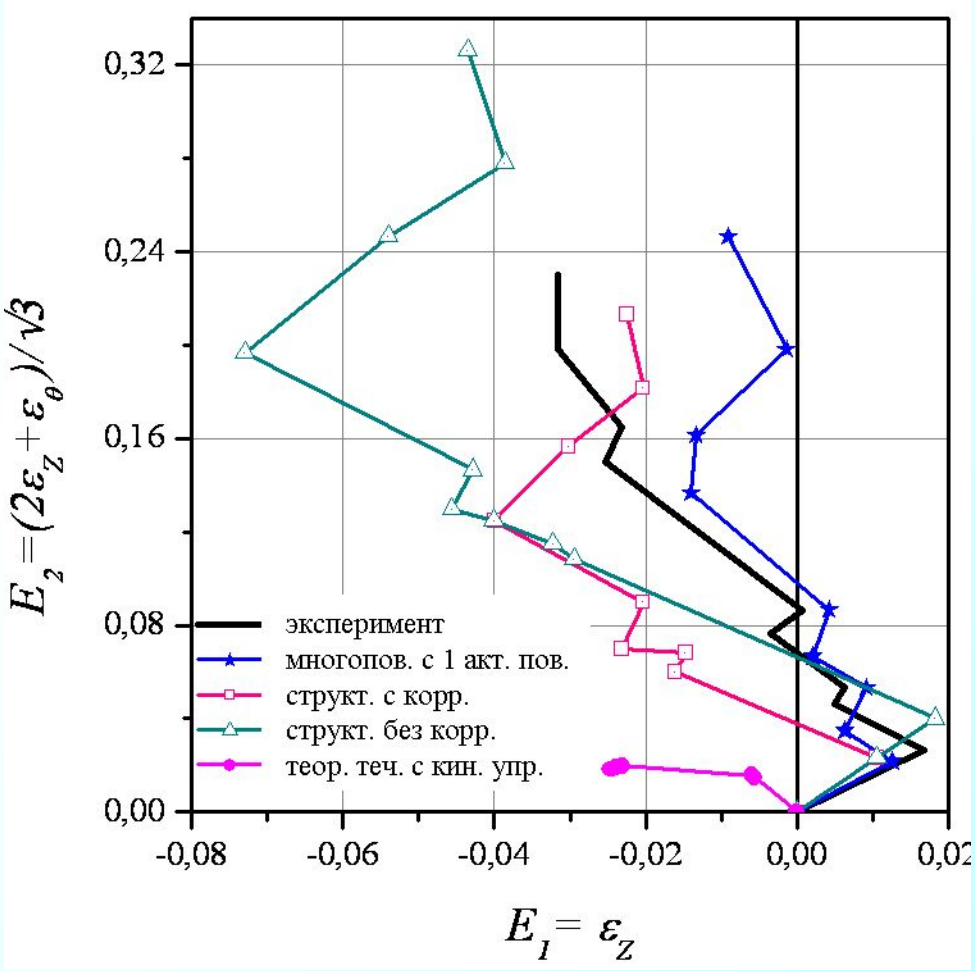
$$C_{k+1} = C_1 \left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_1} \right)^N$$



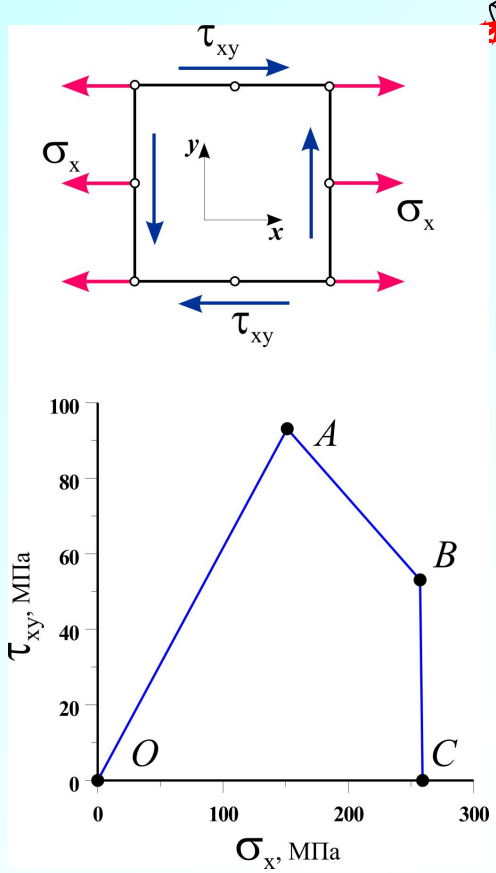
Эксперименты на образцах из стали

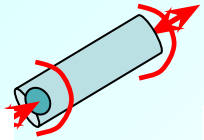




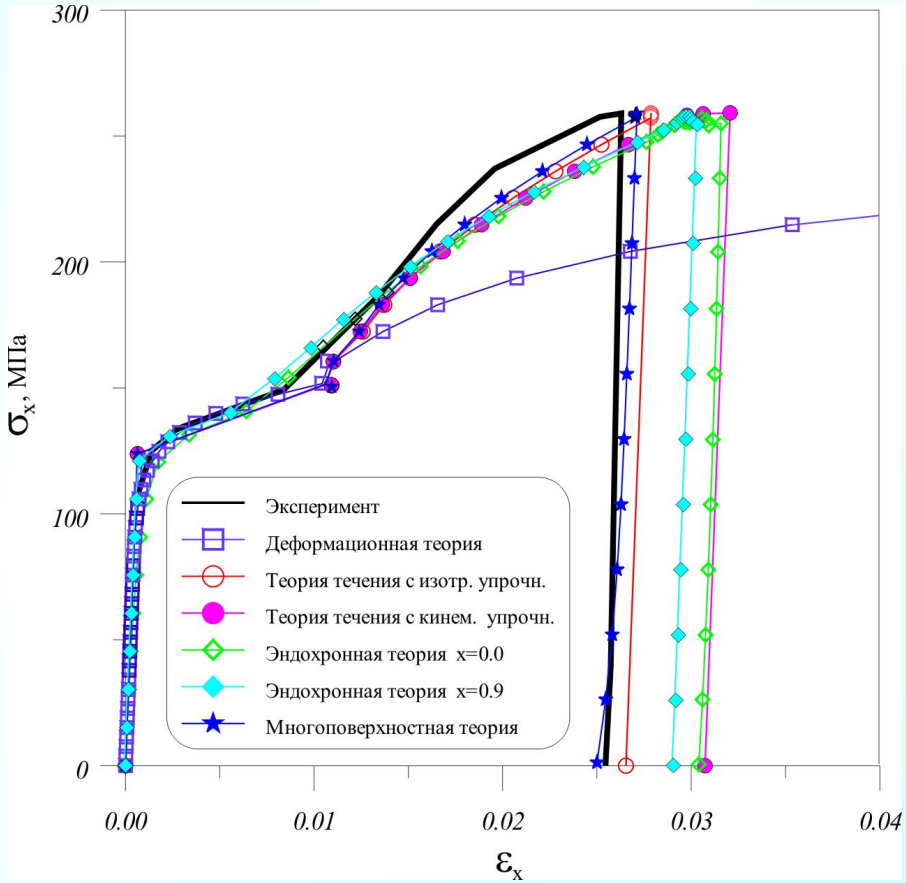


Эксперименты на образцах из стали





Сталь SS type 304



N. S. Ottosen. Nonlinear KinematicHardening under Non-Proportional Loading.
Risø National Laboratory, DK-4000 Roskilde, Denmark July 1979

L. Szabo 1984

Конечно-элементный анализ

Internet: www.pantocrator.narod.ru

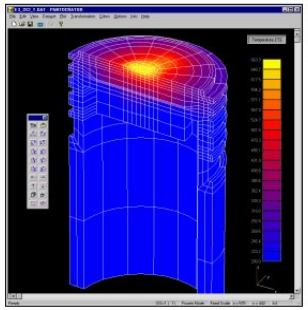
Finite element program PANTOCRATOR - Microsoft Internet Explorer - [Автономная работа]

Файл Правка Вид Избранное Сервис Справка

Назад Поиск Избранное Медиа Ссылки

Finite element program PANTOCRATOR

Program | Author | Links | Guestbook



PANTOCRATOR is a finite element program system especially designed for the simulation of solids and structures with complex physical and mechanical properties. PANTOCRATOR is focused on the analysis of geometrically and physically nonlinear problems of solid body mechanics (plasticity, visco-plasticity, nonlinear elasticity), coupled problems of electromecanics (ferroelectricity, piezoelectricity), problems of fracture mechanics (continuum damage mechanics, nonlocal failure criteria, growth of fatigue cracks). Efficiency and reliability of received results is provided with use of strategy of the multimodel analysis based on carrying out of automated multiple computing experiments with use of hierarchically ordered sequence of material models.

PANTOCRATOR's analysis capabilities include (2D & 3D):

- Linear and nonlinear elasticity
- Plasticity
- Viscoplasticity including thermal effects
- Fracture mechanics with crack propagation
- Linear and nonlinear, stationary and transient heat transfer problems
- Electrostatics (scalar and vector potential)
- Linear and nonlinear magnetostatics
- Fully coupled linear and nonlinear electromechanics

Search: in: Pantocrator.narod.ru Search!

Page created **147** days ago
Last update: 20 April 2004

PANTOCRATOR@inbox.ru

Готово

PANTOCRATOR v 5.7 - Microsoft Internet Explorer - [Автономная работа]

Файл Правка Вид Избранное Сервис Справка

Поиск Избранное Медиа Ссылки

PANTOCRATOR v 5.7

Finite element analysis of 2D & 3D problems of linear and nonlinear, stationary and transient heat transfer, elasticity, plasticity, continuum damage mechanics, electrostatics, fully coupled electromechanics

Package includes:

- Processor (nonlinear solver of wide range of problems)
- Postprocessor (visual analysis of results)
- Preprocessor (definition and analysis of material model - Constitutive Equation Studio v. 1.7)
- Documentation

Download:

Demo-version (Windows98) ~ 0.7 Mb
Complete version (DOS, Windows95/98/ME/2000/XP, UNIX/AIX) - please contact with author

Examples of computations:

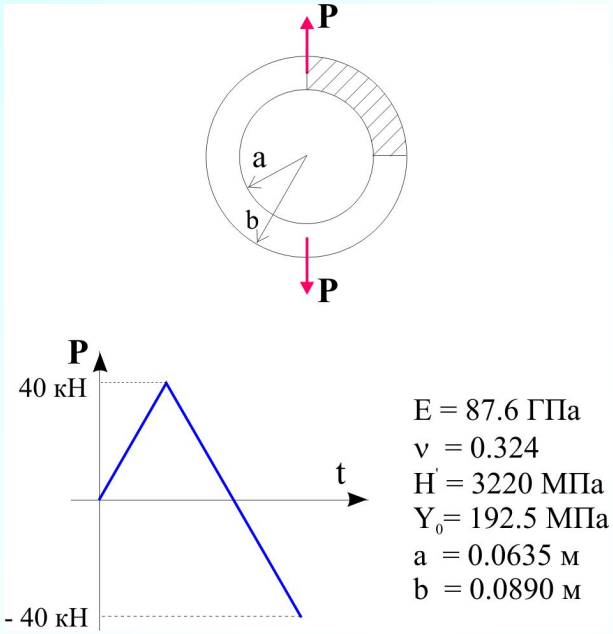
- Thermostress analysis of engine piston
- Modeling of zigzag-like fatigue crack propagation
- Computation of energy release rate for interface crack
- Analysis of stress-strain state of chair
- Comparison of various elastic and plastic models under large strain

Мой компьютер

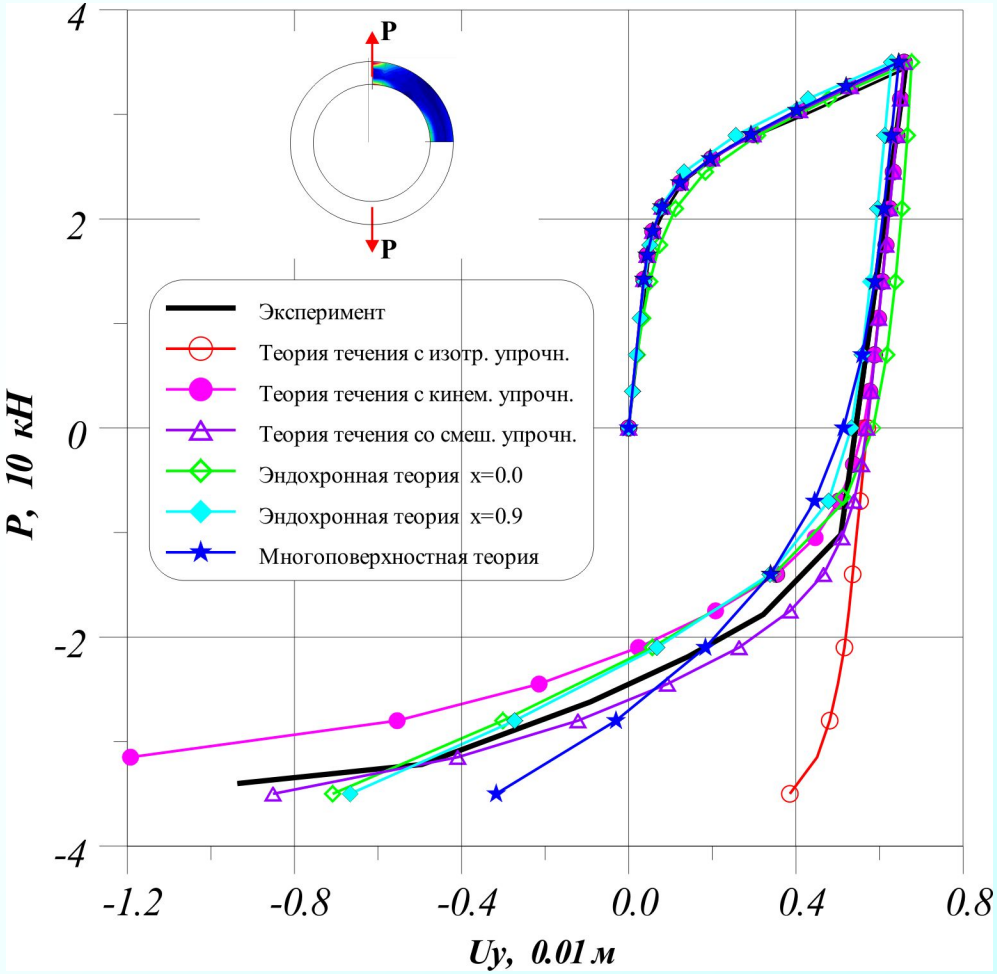
Конечно-элементные решения

(Кольцо под действием осевого растяжения-сжатия)

Алюминиевый сплав



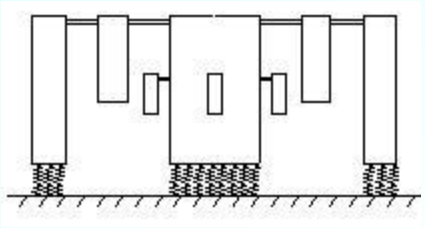
E = 87.6 ГПа
ν = 0.324
H' = 3220 МПа
Y_0 = 192.5 МПа
a = 0.0635 м
b = 0.0890 м

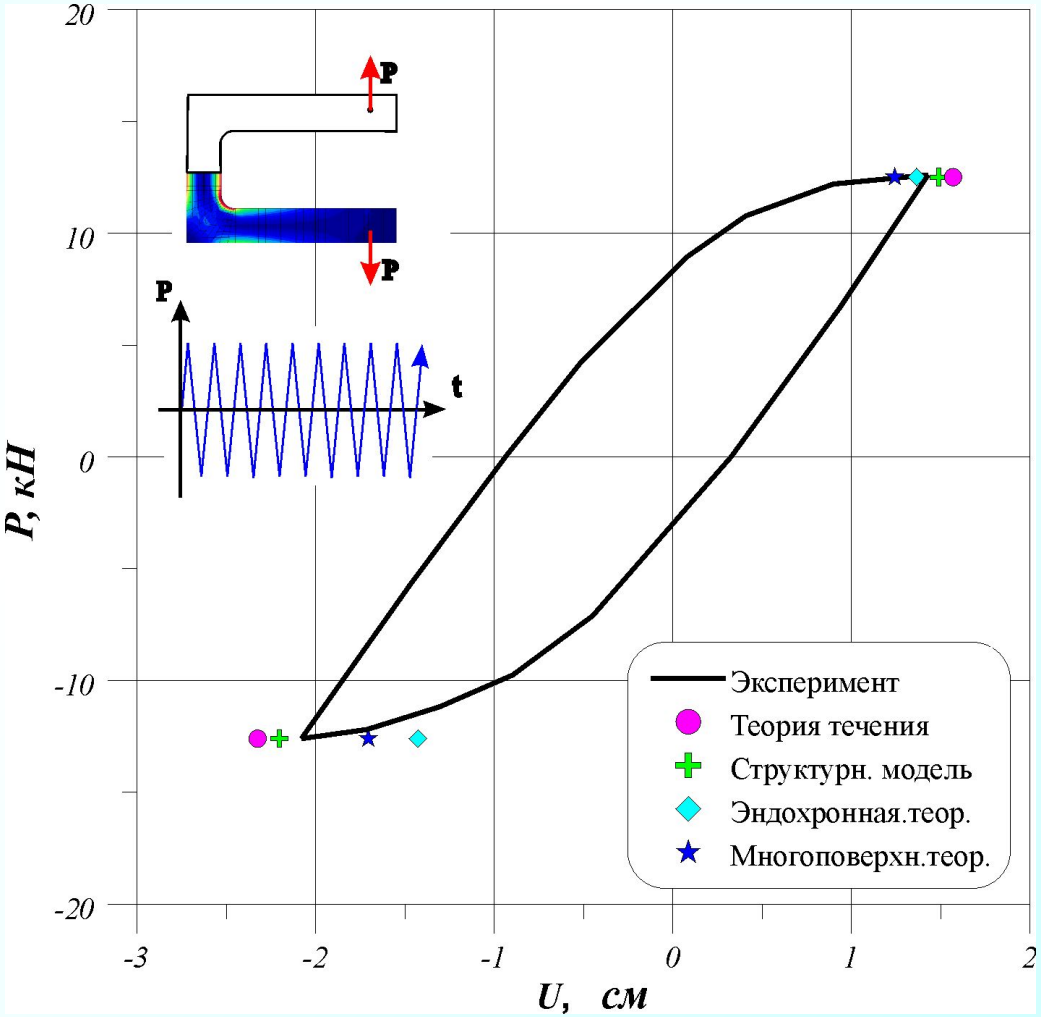


Конечно-элементные решения

(Узел крепления под циклической нагрузкой)

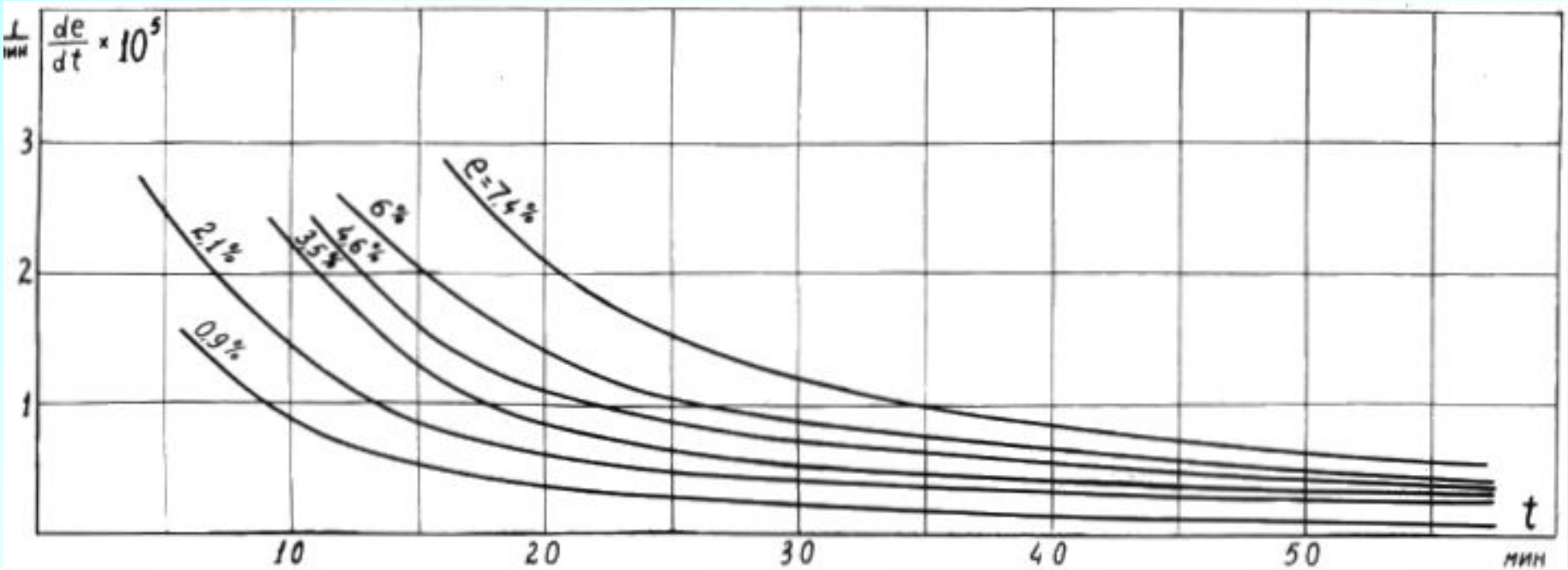
Сталь 09Г2С





Заключение

- Экспериментально получены поверхности равных пластических податливостей
- Разработаны определяющие соотношения теории
- Получен термодинамически корректный вариант соотношений теории
- Разработаны алгоритм и КЭ реализация теории
- Проиллюстрирована рациональность применения теории для однородного и неоднородного напряженных состояний в случае сложного пассивного нагружения

Благодарю за внимание!

Изменение скорости ползучести от времени