Формула полной вероятности

Формула Байеса

Проверочное задание.

Вероятности того, что произвольная деталь окажется бракованной в результате предварительных механической и термической обработки, равны соответственно 0,25 и 0,2. Вероятности, что этот брак можно устранить путем дополнительной обработки, соответственно равны 0,6 и 0,5. Если событие A – деталь окажется бракованной в результате предварительной механической обработки, событие B – деталь окажется бракованной в результате предварительной термической обработки, а событие C – деталь после предварительной обработки имеет устранимый брак, то верным является соотношение …

1. $P(\overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(C/A) + P(\overline{B}) \cdot P(C/B)$
2. $P(\overline{C}) = P(A) \cdot P(\overline{C}/A) + P(B) \cdot P(\overline{C}/B)$
3. $P(C) = P(A) \cdot P(\overline{C}/A) + P(B) \cdot P(\overline{C}/B)$
4. $P(C) = P(A) \cdot P(C/\overline{A}) + P(B) \cdot P(C/\overline{B})$

Ответ: пункт 2

2. Задание.

Пусть p – вероятность того, что хотя бы одна из трех случайно взятых после предварительной обработки деталей будет иметь неустранимый брак, тогда значение выражения $1000\ p$ равно …

Ответ: 488,

так как $1 - (0.25 \times 0.6 + 0.2 \times 0.5 + 0.55)^3 = 1 -$

$- 0.512 = 0.488$

Формула полной вероятности

Часто при решении простых задач теории вероятностей формально не вводят вероятностное пространство, а сразу выделяют полную группу случайных событий (условий), вероятности которых легко определить из условий задачи и вероятность интересующего события находят по формуле полной вероятности.

Пусть имеется группа событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, обладающая следующими свойствами:

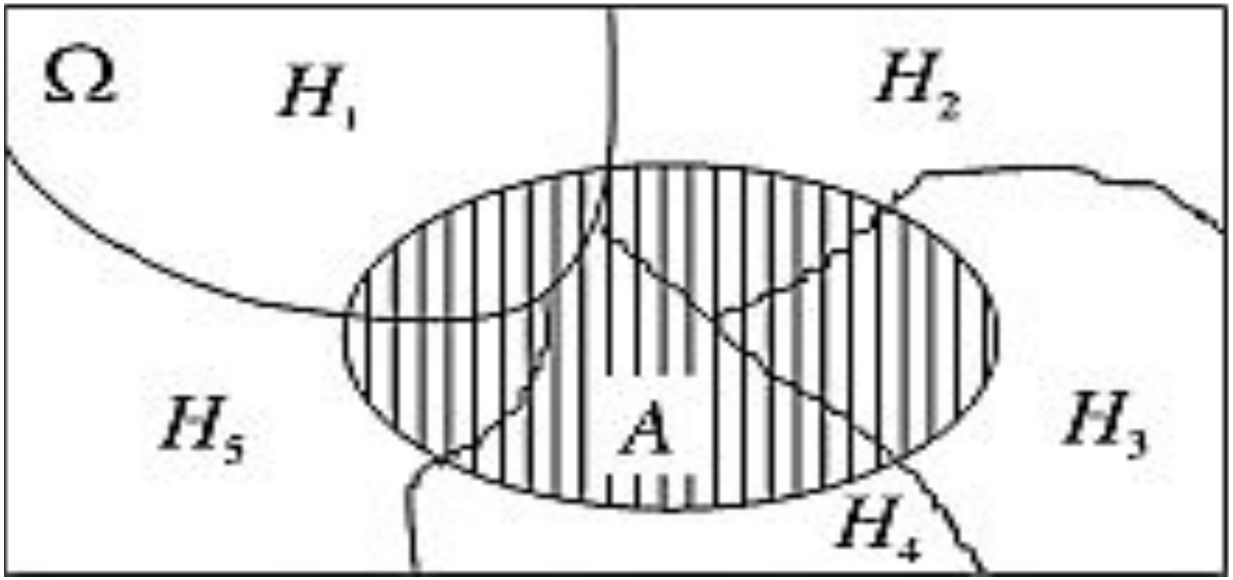
1) все события попарно несовместны: $H_i \cap H_j = \varnothing$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$;

2) их объединение образует пространство элементарных исходов Ω:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$$

В этом случае $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют **полную группу событий**.

- Пусть A – некоторое событие: $A \subset \Omega$



Тогда имеет место **формула полной вероятности:**

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots$$

$$\dots + P(A|H_n)P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

- **Доказательство:**

$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$
причем все события $A \cap H_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ попарно несовместны. По теореме сложения вероятностей:
$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n)$
По теореме умножения $P(A \cap H_i) = P(A|H_i)P(H_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, то отсюда получаем формулу полной вероятности.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots$$

$$\dots + P(A|H_n)P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Пример. В магазине продаются электролампы производства трех заводов, причем доля первого завода - 30%, второго - 50%, третьего - 20%. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 3% и 2%. Какова вероятность, что случайно выбранная в магазине лампа оказалась бракованной.

Решение: Пусть событие H_1 состоит в том, что выбранная лампа произведена на первом заводе, H_2 на втором, H_3 - на третьем заводе.

Очевидно:

- Пусть событие A в том, что выбранная лампа оказалась бракованной; $A|H_i$ - событие, состоящее в том, что выбрана бракованная из ламп, произведенных на i-ом заводе.

<u>Из условия задачи:</u>

$$P\,(A|H_1) = \frac{3}{100}; \quad P(A|H_2) = \frac{5}{100}; \quad P(A|H_3) = \frac{2}{100};$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{100} + \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{100} + \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{100} = \frac{17}{500}$$

Пример: В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара. После того, как шары во второй урне перемешались, из неё выкатился шар. Найти вероятность того, что выкатившийся из второй урны шар белый.

Решение: Пусть событие H_1 – из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие H_2 - два чёрных шара, событие H_3 - шары разного цвета. Вычислим вероятности:

- $$P(H_1)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15};\ P(H_2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15};$$

$$P(H_3)=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15};\ P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$$

Если реализовалась гипотеза H_1, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через A событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар.

$$P(A|H_1)=\frac{10}{12}$$

- Если реализовалась гипотеза H_2, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и

$$P(A|H_2) = \frac{8}{12};$$

Легко показать, что $P(A|H_3) = \frac{9}{12}$. Теперь по формуле полной вероятности:

$$P(A) =////$$

Пример:

Три экзаменатора принимают экзамен у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, третий — 21 студента (выбор студентов производят из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у 1-го преподавателя равны 40%, у 2-го — только 10%, у 3-го — 70%. Найти вероятность, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

Решение. Обозначим гипотезы H_1; H_2; H_3; состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал 1-му, 2-му и 3-му экзаменатору соответственно. По условию:

$$P(H_1) = 6/30 = 0{,}2 \qquad P(H_2) = 3/30 = 0{,}1 \qquad P(H_3) = 21/30 = 0{,}7$$

Пусть событие A={слабо подготовившийся студент сдал экзамен}. Тогда по условию задачи

$$P(A|H_1) = 0{,}4 \quad P(A|H_2) = 0{,}1 \quad P(A|H_3) = 0{,}7$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}58$$

Пример. В составе Думы представлены 3 партии (по 100, 150, 50 человек от 1-й, 2-й и 3-й партий соответственно). Кандидата на должность спикера Думы поддерживают 50% представителей первой партии, 70% - второй и 10% - третьей партии. Какова вероятность, что наудачу выбранный член Думы поддерживает выдвинутую кандидатуру на должность спикера?

Решение: Пусть событие A={наудачу выбранный представитель думы поддерживает выдвинутую кандидатуру}

С событием A тесно связаны гипотезы:

H_1 - {выбранное лицо представляет 1-ую партию};

H_2 - {выбранное лицо представляет 2-ую партию};

H_3 - {выбранное лицо представляет 3-ю партию}.

Вероятности гипотез определяются из условия:

$$P(H_1) = 100/(100 + 150 + 50) = 1/3$$

$$P(H_2) = 1/2, \qquad P(H_3) = 1/6.$$

Условные вероятности события A даны в условии:

$$P(A|H_1) = 0.5, \quad P(A|H_2) = 0.7, \quad P(A|H_3) = 0.1.$$

- Вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot\ 0{,}7 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}1 = 0{,}7$$

Ответ: P(A) = 0,7

В группе спортсменов лыжников в 2 раза больше, чем бегунов, а бегунов в 3 раза больше, чем велосипедистов.
Вероятность выполнить норму для лыжника 0,9, для бегуна 0,75, для велосипедиста - 0,8.
Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

Теорема Байеса — одна из основных теорем теории вероятностей, определяющая вероятность наступления события в условиях, когда на основе наблюдений известна лишь некоторая частичная информация о событиях.

По ф. Байеса можно более точно пересчитывать вероятность, беря в учёт как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений.

То́мас Ба́йес (Бейес) (1702 — 1761) — английский математик и священник, член Лондонского королевского общества.

Формула Байеса позволяет «переставить причину и следствие»: по известному факту события вычислить вероятность, что оно было вызвано данной причиной. События, отражающие действие «причин», наз. гипотезы — предполагаемые события, повлекшие данное. Безусловную вероятность справедливости гипотезы наз. **априорной** (насколько вероятна причина вообще), условную - с учетом факта произошедшего события — **апостериорной** (насколько вероятна

Формула Байеса

Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ - полная группа событий и $A \subset \Omega$ – некоторое событие.

Тогда по формуле условной вероятности:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)}$$

$P(H_k \mid A)$ – условная вероятность гипотезы H_k - вероятность, что H_k реализуется при условии, что событие A произошло. По т. умножения вероятностей числитель формулы:

$$P(H_k \cap A) = P(A \cap H_k) = P(A|H_k)\,P(H_k)$$

- Для знаменателя используем полную вероятность:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

получаем формулу для исчисления вероятности реализации гипотезы H_k при условии, что событие A произошло - **формулу Байеса**:

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)\,P(H_k)}{\sum P(A|H_i)P(H_i)}$$

Вероятность $P(H_k)$ называют **априорной** вероятностью гипотезы H_k, вероятность $P(H_k \mid A)$ – **апостериорной**.

- **Вывод формулы**

P(A) - вероятность наступления события *A*, зависящего от ряда гипотез H_1, H_2, ..., H_n, если известны степени достоверности этих гипотез (например, измерены экспериментально); Если событие *A* зависит только от причин H_1, H_2, ..., H_n, то если оно произошло, значит, обязательно произошла какая-то из причин, т.е. $\sum(H_i|A) = 1$

Тогда: $\sum \frac{P(H_i) \cdot P(H_i|A)}{P(A)} = 1$, переносом $P(A)$ вправо получаем искомое выражение.

Формула полной вероятности является просто следствием свойства счетной аддитивности вероятности и ее применение часто означает, что мы неявно строим вероятностное пространство. Формула Байеса действительно расчетная – для ее применения требуется , чтобы вероятностное пространство уже было определено.

Пример. Пусть известно- студент не сдал экзамен, получил «неуд». Кому из трех преподавателей вероятнее он отвечал?

Решение. Вероятность получить «неуд» равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,58 = 0,42$$

Требуется вычислить условные вероятности.

По формулам Байеса:

$$P\left(H_1\middle|\overline{A}\right) = \frac{P(H_1)\cdot P(\overline{A}|H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0,2\cdot 0,6}{0,42} = 0,285$$

И, аналогично

- $$P\left(H_2|\overline{A}\right) = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,42} = 0,214$$

$$P\left(H_3|\overline{A}\right) = \frac{0,7 \cdot 0,3}{0,42} = 0,5;$$

Отсюда следует, что, вероятнее всего, слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему экзаменатору.

Пример.

Найти вероятность, что бракованная лампа была изготовлена на 2-ом заводе.

$P(H_2) = 0,5$ - априорная вероятность этого события. Используем формулу Байеса для вычислим апостериорную вероятность события

$$P(H_2|A) = P(A|H_2)\frac{P(H_2)}{P(A)} = \frac{15}{34} \;-$$

вероятность интересующего нас события оказалась ниже его априорной вероятности.

Пример.

Бригада, работающая в дневную смену, производит изделий в 2 раза больше, чем работающая в ночную. Отсюда следует, что если выбрать случайным образом изделие, произведённое в цеху, то с вероятностью $2/3 \approx 0{,}66$ оно произведено бригадой, работающей днём. Это **априорная** вероятность.

Известно, что бригада, работающая днём, производит 3% некондиционных изделий, а работающая ночью, – 7% некондиции.

Пусть случайным образом отобранное изделие оказалось некондиционным. Тогда по формуле Байеса вычислим апостериорную вероятность, что это изделие произведено дневной бригадой

$$P(H_1/A) = (3/100)\cdot(2/3)/((3/100)\cdot(2/3) +$$

$$+ (7/100)\cdot(1/3)) \approx 0{,}632$$

Как видно, **апостериорная** вероятность интересующего нас события несколько ниже **априорной** вероятности.

Пример. В ящике содержатся 20 деталей, изготовленных на заводе № 1; 30 деталей, изготовленных на заводе № 2; 50 деталей, изготовленных на заводе № 3. Вероятность, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,8; на заводе № 2 – равна 0,7, на заводе № 3 – равна 0,9. Тогда вероятность, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества, равна …

Решение: Для вычисления вероятности события A (наудачу извлеченная деталь окажется отличного

качества) применим формулу полной вероятности:
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) +$
$+P(B_3) \cdot P\ (A|B_3)$, где $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_3)$ - вероятности, что деталь изготовлена на заводах № 1; №2 или №3 соответственно.

$P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$, $P\ (A|B_3)$ - условные вероятности, что деталь отличного качества, если она изготовлена на заводах № 1; №2 или №3.

Тогда:

$$P(A) = \frac{20}{100} \cdot 0{,}8 + \frac{30}{100} \cdot 0{,}7 + \frac{50}{100} \cdot 0{,}9 = 0{,}82$$

Задача. В первой урне 7 белых и 3 черных шара. Во второй урне 1 белый и 9 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался черным. Тогда вероятность того, что этот шар вынули из второй урны, равна …

Варианты ответов:

1) 3/4
2) 3/5
3) 1/4
4) 9/10

Решение: Обозначим событие А – «вынут чёрный шар». Равновероятностно шар может быть вынут как из первой (H_1), так и из второй (H_2) урны:

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

По формуле Байеса:

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{10} + \frac{9}{10}\right)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{12}{10}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Ответ: пункт 1.

Задание: Для проверки усвоения материала случайным образом выбран студент. В группе 6 отличников, 7 хорошистов и 3 средних студента. Отличник справляется с тестом с вероятностью 0,85, хорошист - 0,6, а средний студент 0,3.

Вычислить вероятность:

а) априорную вероятность, что был протестирован хороший студент;

в) что студент не справился с тестом;

с) что был выбран хороший студент, если известно,

Домашняя задача. На склад поступают телефоны трех заводов, причем доля телефонов 1-го завода составляет 25%, 2-го - 60%, 3-го - 15%.

Известно, что средний процент телефонов без брака для 1-ой фабрики составляет 2%, 2-ой - 4%, 3-ей - 1%.

Найти вероятность того, что:

а) наугад взят телефон окажется с браком;

б) телефон изготовлен на первом заводе, если он бракованный?