Равносильные уравнения и неравенства

* Два неравенства $f_1(x)>g_1(x)$ и $f_2(x)>g_2(x)$ или два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются равносильными, если каждое решение первого неравенства (уравнения), принадлежащее множеству X, является решением второго, и, наоборот.

* Неравенства (уравнения) называются **равносильными** на X, если множество решений этих неравенств (уравнений) совпадают

Определение 1.

Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются *равносильными*

Например:

1) *Уравнения $9x-5=5x+3$ и $4x=8$ равносильны, так как каждое из них имеет только один корень $x=2$.*
2) *Уравнения $(x-3)(x+7)=0$ и $x^2+4x-21=0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1=3$, $x_2=-7$.*
3) *Уравнения $2x=4$ и $3x^2=12$ не равносильны, так как первое имеет корень $x=2$, а второе – корни $x_1=2$, $x_2=-2$.*

Из определения равносильности уравнений следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, если каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Преобразования уравнений:

1) *Любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак на противоположный;*
2) *Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.*

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение.

Однако, не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное.

Например:

При возведении в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x}=x-2$ получается уравнение $x=(x-2)^2$, не равносильное исходному: первое уравнение имеет только один корень $x=4$, а второе – два корня $x_1=4$, $x_2=1$.

*В этом случае второе уравнение называют **следствием** первого уравнения.*

*Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют **следствием** первого уравнения.*

Определение 2.

*Если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется **следствием** первого уравнения.*

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует:

1) *Если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;*

2) *Если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.*

*Примеры равносильных уравнений и неравенств

* Перенос членов уравнения (неравенства) из одной части в другую

Уравнения	Неравенства
$4x - 3 = 2x + 5$	$x^2 > 1$
и	и
$4x - 2x = 5 + 3$	$x^2 - 1 > 0$

Умножение или деление обеих частей уравнения(неравенства) на одно и то же число , отличное от нуля.

Уравнения

$x^2/4 = 1$ и $x^2 = 4$

$(x^2-4)(x^2+4) = 0$

и

$x^2 - 4 = 0$

Неравенства

$(x-3)/(x^2+1) < 0$

и

$x - 3 < 0$

*Замена части уравнения (неравенства) тождественно равным ему выражением

Уравнения

$x^2 + 3x = 0$

и

$x (x+3) = 0$

Неравенства

$x^2 + 2x + 2 > 0$ и

$(x + 1)^2 + 1 >)$;

$\surd x^2 – 3 <= 2$

$|x| - 3 <= 2$

*Решить уравнение

$\sqrt{x} = x - 2$ (1)

$x = (x - 2)^2$ (2)

$x = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 4,\ x_2 = 1$

Уравнение (1) имеет только один корень $x = 4$, а (2) – два корня: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

Уравнение (2) называют следствием уравнения (1).

* Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1$$

$$(x-1)(x-2) = x - 1$$

$$x - 2 = 1$$

$$x = 3$$

* Корень x=1 второго уравнения не является корнем первого уравнения. Его называют **посторонним корнем**.
Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.