ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

ЧАСТЬ 2

Практическое занятие

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

I. Если под знаком предела стоит дробно-рациональная функция, то для того чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$, необходимо числитель и/или знаменатель дроби разложить на множители и упростить.

Вспомним формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Разложение на множители квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c$ =0, где

$$D = b^2 - 4ac, \; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to 11}\frac{x-11}{x^2-121}=$ подставляем $x = 11$ в числитель и знаменатель,

$$=\frac{11-11}{11^2-121}= \left|\frac{0}{0}\right|=$$

получили неопределенность $\frac{0}{0}$. Разложим выражение в знаменатели на множители и сократим:

$$=\lim_{x\to 11}\frac{x-11}{(x-11)(x+11)}=\lim_{x\to 11}\frac{1}{x+11}=\frac{1}{22}$$

2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x^2-5x-14}=\frac{49-56+7}{49-35-14}=\left|\frac{0}{0}\right|=$

получили неопределенность $\frac{0}{0}$. Разложим выражения в числителе и знаменателе на множители и сократим:

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-1)}{(x-7)(x+2)}=\lim_{x\to 7}\frac{x-1}{x+2}=$$

функция под знаком предела определена на всей числовой оси кроме $x=-2$, следовательно, предел равен значению функции в предельной точке

$$=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

3. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-2x-15}=\frac{125-125}{25-10-15}=\left|\frac{0}{0}\right|=$

Разложим выражения в числителе и знаменателе на множители и сократим:

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x-5)(x+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+5x+25}{x+3}=$$

функция под знаком предела определена на всей числовой оси кроме $x=-3$, следовательно, предел равен значению функции в предельной точке

$$=\frac{25+25+25}{5+3}=\frac{75}{8}=9{,}375$$

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

II. Если под знаком предела стоит иррациональная функция, то для того чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$, необходимо, числитель и знаменатель дроби домножить на выражение сопряженное иррациональному и упростить.

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x} =$ подставляем $x = 0$ в числитель и знаменатель, $=\frac{1-1}{0} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

получили неопределенность $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное знаменателю :

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2-\sqrt{x+4}}=\frac{0}{2-\sqrt{4}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$

получили неопределенность $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное знаменателю:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{\left(2-\sqrt{x+4}\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{2^2-\left(\sqrt{x+4}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{4-(x+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{4-x-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{-x}=\lim_{x\to 0}\left(-3\cdot\left(2+\sqrt{x+4}\right)\right)=-12$$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-x}{x-3} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

получили неопределенность $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю:

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{3x}-x)\cdot(\sqrt{3x}+x)}{(x-3)\cdot(\sqrt{3x}+x)} = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{3x})^2-x^2}{(x-3)\cdot(\sqrt{3x}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{3x-x^2}{(x-3)\cdot(\sqrt{3x}+x)} = \lim_{x\to 3}\frac{x\cdot(3-x)}{(x-3)\cdot(\sqrt{3x}+x)} =$$

$$= -\lim_{x\to 3}\frac{x\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{3x}+x)} = -\lim_{x\to 3}\frac{x}{(\sqrt{3x}+x)} = -\frac{3}{6} = -0{,}5$$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\left|\frac{0}{0}\right|=$

получили неопределенность $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю:

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{(x^2-49)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{4-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{(x^2-49)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}$$