

The background features a complex geometric pattern. On the left, there are concentric circles composed of many small, multi-colored segments (green, blue, red, yellow, purple). On the right, these segments are scattered and appear to be breaking apart, creating a sense of motion and disintegration.

# ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

## ЧАСТЬ 2

Практическое занятие

## Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

I. Если под знаком предела стоит дробно-рациональная функция, то для того чтобы раскрыть неопределенность  $\frac{0}{0}$ , необходимо числитель и/или знаменатель дроби разложить на множители и упростить.

Вспомним формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Разложение на множители квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  - корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , где

$$D = b^2 - 4ac, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

## Примеры

1.  $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{x-11}{x^2-121} =$  подставляем  $x = 11$  в числитель и знаменатель,

$$= \frac{11-11}{11^2-121} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

получили неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Разложим выражение в

знаменатели на множители и сократим:

$$= \lim_{x \rightarrow 11} \frac{x-11}{(x-11)(x+11)} = \lim_{x \rightarrow 11} \frac{1}{x+11} = \frac{1}{22}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 5x - 14} = \frac{49 - 56 + 7}{49 - 35 - 14} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

получили неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Разложим выражения в

числителе и знаменателе на множители и сократим:

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x - 7)(x - 1)}{(x - 7)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 1}{x + 2} =$$

функция под знаком предела определена на всей числовой оси кроме  $x = -2$ , следовательно, предел равен значению функции в предельной точке

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 2x - 15} = \frac{125 - 125}{25 - 10 - 15} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

Разложим выражения в числителе и знаменателе на множители и сократим:

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x^2 + 5x + 25)}{(x - 5)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 5x + 25}{x + 3} =$$

функция под знаком предела определена на всей числовой оси кроме  $x = -3$ , следовательно, предел равен значению функции в предельной точке

$$= \frac{25 + 25 + 25}{5 + 3} = \frac{75}{8} = 9,375$$

## Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

II. Если под знаком предела стоит иррациональная функция, то для того чтобы раскрыть неопределенность  $\frac{0}{0}$ , необходимо, числитель и знаменатель дроби домножить на выражение сопряженное иррациональному и упростить.

## Примеры

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} =$  подставляем  $x = 0$  в числитель и знаменатель,  $= \frac{1-1}{0} = \left| \frac{0}{0} \right| =$

получили неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное знаменателю :

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1}) \cdot (1 + \sqrt{x+1})}{x \cdot (1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - (\sqrt{x+1})^2}{x \cdot (1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x \cdot (1 + \sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x \cdot (1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x \cdot (1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2 - \sqrt{x+4}} = \frac{0}{2 - \sqrt{4}} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

получили неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное знаменателю:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot (2 + \sqrt{x+4})}{(2 - \sqrt{x+4})(2 + \sqrt{x+4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot (2 + \sqrt{x+4})}{2^2 - (\sqrt{x+4})^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot (2 + \sqrt{x+4})}{4 - (x+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot (2 + \sqrt{x+4})}{4 - x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot (2 + \sqrt{x+4})}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -3 \cdot (2 + \sqrt{x+4}) \right) = -12$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - x}{x - 3} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

получили неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю:

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{3x} - x) \cdot (\sqrt{3x} + x)}{(x - 3) \cdot (\sqrt{3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{3x})^2 - x^2}{(x - 3) \cdot (\sqrt{3x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - x^2}{(x - 3) \cdot (\sqrt{3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \cdot (3 - x)}{(x - 3) \cdot (\sqrt{3x} + x)} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \cdot (x - 3)}{(x - 3) \cdot (\sqrt{3x} + x)} = - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(\sqrt{3x} + x)} = - \frac{3}{6} = -0,5$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

получили неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю:

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2 - \sqrt{x-3})(2 + \sqrt{x-3})}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - (\sqrt{x-3})^2}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - (x-3)}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7 - x}{(x - 7)(x + 7)(2 + \sqrt{x-3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}$$