РУДН

УНИГК

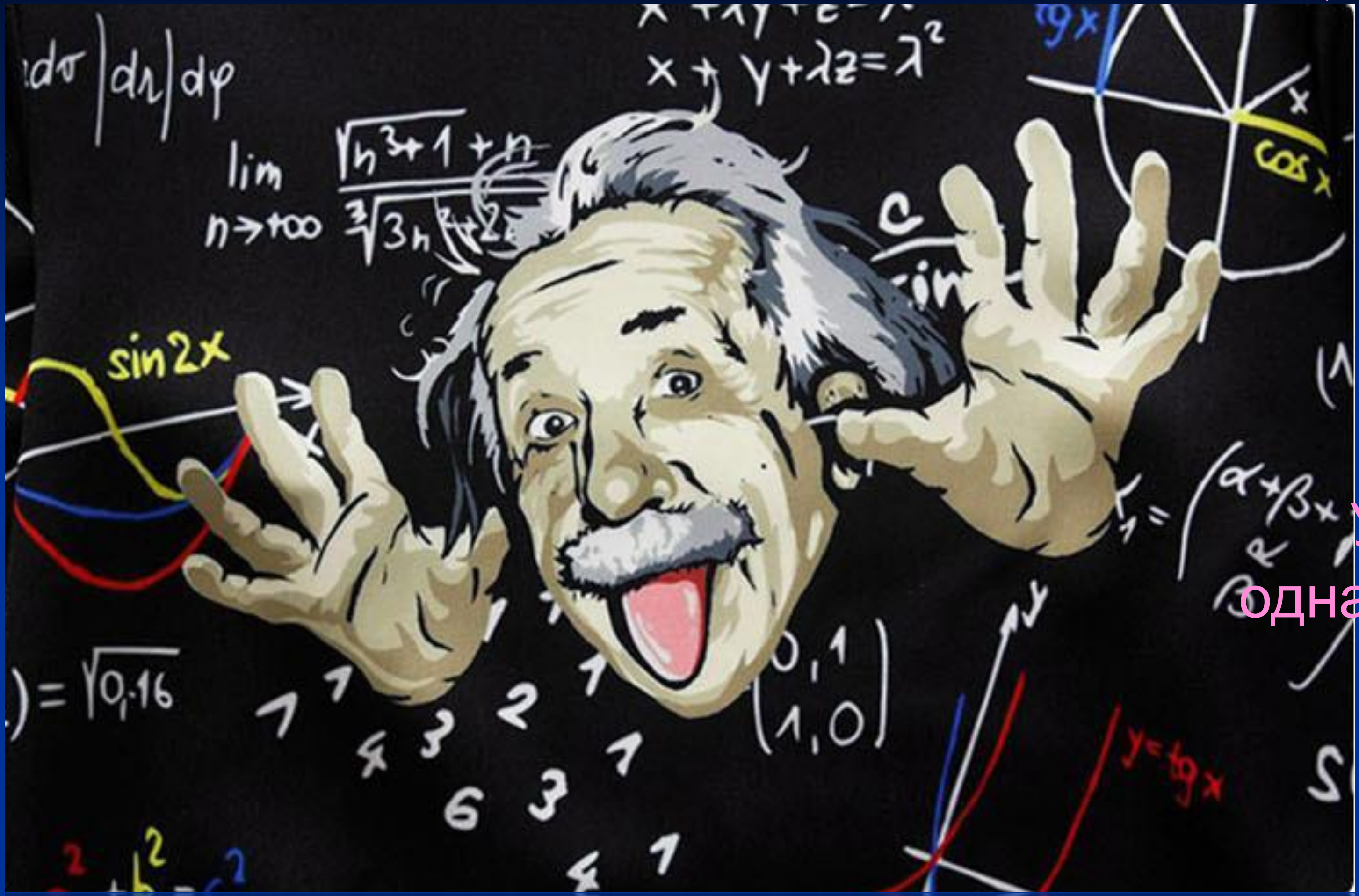
Математика

Часть 1

Основные понятия математики

Лекция 1
Возникновение основных понятий

Образование – то, что остается после того, когда забывается все, чему учили.
Альберт Эйнштейн



Образование - это не изучение фактов, а тренировка мышления
Альберт Эйнштейн

Умение мыслить математически — одна из благороднейших способностей человека.
Бернард Шоу

Математика — это единственный совершенный метод водить самого себя за нос.
Альберт Эйнштейн

Математика — фундаментальная наука, предоставляющая (общие) языковые средства другим наукам; тем самым она выявляет их структурную взаимосвязь и способствует нахождению самых общих законов природы

Математика – язык, на котором говорят все точные науки
Н.И.Лобачевский

Математика – это больше, чем наука, это язык науки
Н.Бор

Что есть математика?

Др.греческий

Слово «математика» = μάθημα + μαθηματικός

изучение, знание, наука *восприимчивый, успевающий*

Термин μᾰθημᾰτικά в современном значении «математика» встречается уже в трудах Аристотеля (IV в.до н. э.). В русский язык слово пришло либо через польск. *matematyka*, либо через лат. *mathematica*

Считается, что дальнейшее развитие гуманитарных наук без математического моделирования и точных количественных методов исследования, широкого использования современных вычислительных средств просто невозможно. Правда, математика пока не располагает средствами, в полной мере отвечающими потребностям этих наук. По всей видимости, создание соответствующего аппарата может явиться только результатом вполне осознанных совместных действий как математиков, так и тех ученых, профессиональные интересы которых лежат в гуманитарной сфере.

Гуманитарный потенциал математики

1. Математика «ум в порядок приводит» - влияние математики на формирование мышления и личностных черт человека

2. Математика формирует навык предметной речи, строящейся по определенным законам (краткость, четкость, лаконичность, минимизация и др.), а предметная речь оказывает существенное влияние на развитие литературной речи

3. Математика позволяет вывести гуманитарные исследования на более высокий научный уровень: она дает такие инструменты, как моделирование и точные количественные методы исследования

Вопросы для конспекта лекции

- Возникновение математических понятий. Развитие понятия числа. Числа от натуральных до вещественных (и дальше)
- Возникновение арифметических операций. Возникновение уравнений.
- Виды систем линейных уравнений. Геометрическая интерпретация решений.

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

идеализации реальных объектов и множеств однородных объектов

Число

- одно из основных математических понятий, которое позволяет выразить результаты измерения или счета

Понятие числа служит исходным для множества математических теорий

понятие геометрической фигуры образовалось с помощью абстракции отождествления, в основе которой лежит отношение эквивалентности «сходство», «подобие» предметов по их форме, с помощью которого множество предметов разбивается на классы эквивалентности так, что любые два предмета одного класса имеют одинаковую форму, а любые два предмета различных классов — различные формы. Абстрагируясь при этом от других свойств предметов (цвета, величины, материала, из которого они сделаны, назначения и т. д.), мы получаем самостоя тельное понятие геометрической фигуры.

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура идеализации реальных объектов и множеств однородных объектов **Число**

Первобытный человек не отделял от конкретного представления абстрактное. Счет был вещественным. Использовались пометки, камешки, пальцы и т. п. Применяли для запоминания его результатов узелки, зарубки и пр. После изобретения письменности начали использовать буквы и особые значки для сокращенного изображения на письме больших чисел. Обычно воспроизводился при таком кодировании принцип нумерации, аналогичный использовавшемуся в языке.

Кипу, использовались инками для записи чисел

Счёт появился тогда, когда человеку потребовалось сообщить друг другу о количестве обнаруженных им предметов

«один»

«два»

«много»

Системы счета и принцип наименования чисел

Двоичная система

Появление счёта и измерения позволили сравнивать различные числа, длины, площади и объёмы

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

Появление счёта и измерения позволили сравнивать различные числа, длины, площади и объёмы

Системы счета и принцип наименования чисел

Двоичная система

Названия чисел от 2 (zwei, two, duo, deux, dvi, два…) до 10 в индоевропейских языках сходны

О чем это свидетельствует?

Понятие абстрактного числа появилось ещё до разделения этих языков

При образовании числительных у большинства народов какое число занимает особое положение?

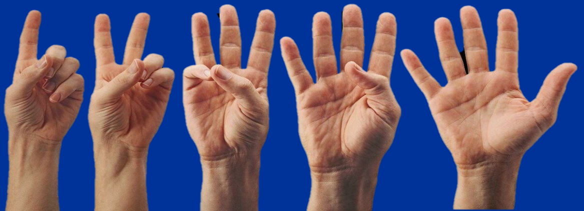
О чем это свидетельствует?

Счёт по пальцам был широко распространён. Отсюда происходят

Пятеричная система

Двадцатичная система

Десятеричная система



Из 307 систем счисления первобытных американских народов
106 – пятеричные
146 десятеричные
55 - двадцатичные

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

Появление счёта и измерения позволили сравнивать различные числа, длины, площади и объёмы

Системы счета и принцип наименования чисел

Двоичная система

Названия чисел от 2 (zwei, two, duo, deux, dvi, два…) до 10 в индоевропейских языках сходны

О чем это свидетельствует?

Понятие абстрактного числа появилось ещё до разделения этих языков

При образовании числительных у большинства народов какое число занимает особое положение?

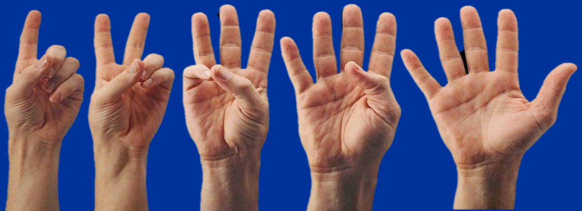
О чем это свидетельствует?

Счёт по пальцам был широко распространён. Отсюда происходят

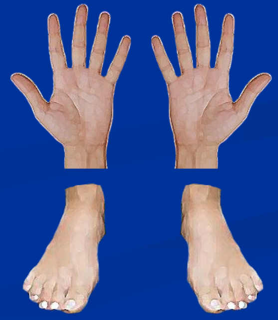
Пятеричная система

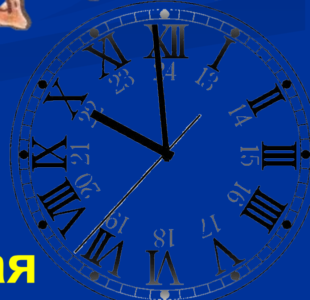
Двадцатичная система

Десятеричная система



Что использовали при счете французы, если 80 = quatre-vingt, а 90 = quatre-vingt-dix?





Шестидесятиричная

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

Когда понятие абстрактного числа окончательно утвердилось, следующей ступенью стали **операции с числами**

2. Возникновение арифметических операций

объединение нескольких множеств в одно




Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

объединение нескольких множеств в одно

сложение

отделение части множества

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

объединение нескольких множеств в одно

сложение

отделение части множества

вычитание

«пакетное» сложение множеств

умножение

разделение на части

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

объединение нескольких множеств в одно

сложение

отделение части множества

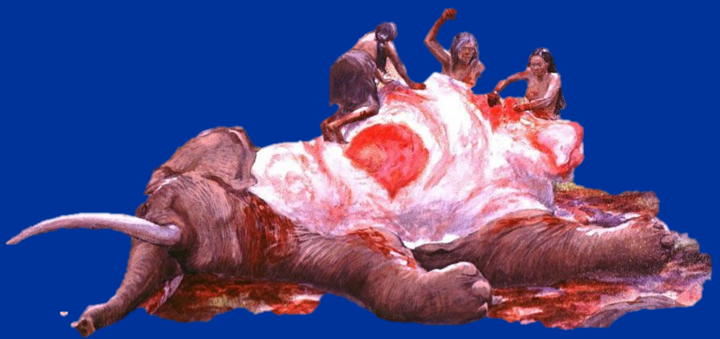
вычитание

«пакетное» сложение множеств

умножение

разделение на части

деление



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

сложение **вычитание** **умножение** **деление**

Делить на 10 частей сложно
У римлян стандартной дробью была унция (1/12)

Средневековые денежные и мерные системы несут на себе отпечаток древних недесятичных систем:

1 английский пенс = 1/12 шиллинга,
1 дюйм = 1/12 фута,
1 фут = 1/3 ярда

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура **Число**

2. Возникновение арифметических операций

сложение **вычитание** **умножение** **деление**

идеализация конечного множества однородных, устойчивых и неделимых предметов (людей, овец, дней и т. п.) -

Иррациональные числа $\zeta(3) - \varrho - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - ln2 - \phi, \Phi - \psi - \alpha, \beta - e - e^{\pi} - \pi$	**Дробные числа** …-1/2,…-1/3, …1/3, …1/2….	**Натуральные числа** 1,2,3….	**Отрицательные и ноль** …-3,-2,-2,0
		Целые числа	
	Рациональные числа		
Действительные числа			

Комплексные числа — Гиперкомплексные числа — Кватернионы — Октонионы — Седенионы — Гиперреальные числа — Сюрреальные числа — p-адические числа — Математические постоянные — Названия чисел — Бесконечность — Базы

3. Возникновение уравнений

Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на алгебраический.

Исаак Ньютон

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура **Число**

Системы счета и принцип наименования чисел

Двоичная **Пятеричная** **Десятеричная** **Двадцатичная** **Шестидесятиричная**

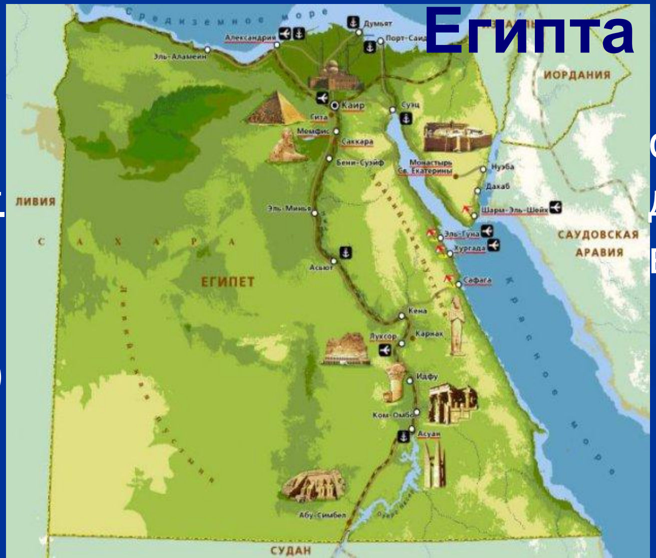
2. Возникновение арифметических операций

сложение **вычитание** **умножение** **деление**

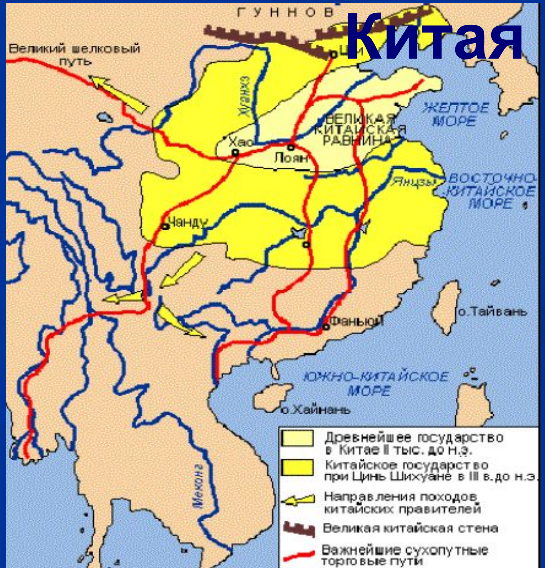
3. Возникновение уравнений

Накопление эмпирическим путём (методом проб и ошибок) знаний о свойствах арифметических действий, о способах измерения площадей и объемов простых фигур и тел привело к созданию уравнений ученых

сер. IV тыс до н.э. -12.10.539 г. до н.э. («падение Вавилона»)



сер. IV тыс. до н. э. - IV в. н. э.

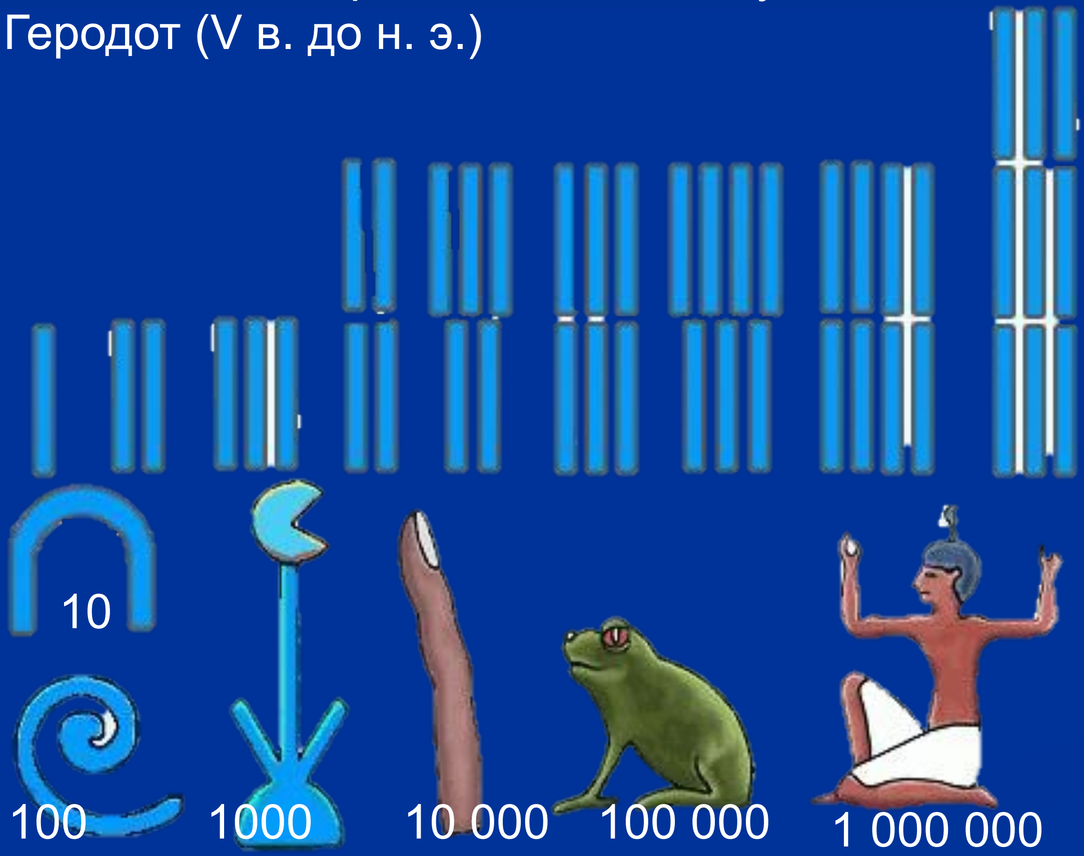


Возраст ~5 тыс. лет, письменные источники покрывают период ~3500 лет.

Древний Египет

Царь разделил землю между египтянами, дав каждому по равному прямоугольному участку; из этого он создал себе доходы, приказав ежегодно вносить налог. Если же от какого-нибудь надела река отнимала что-нибудь, то владелец, приходя к царю, сообщал о происшедшем. Царь же посылал людей, которые должны были осмотреть участок земли и измерить, на сколько он стал меньше, чтобы владелец вносил с оставшейся площади налог, пропорциональный установленному. Мне кажется, что так и была изобретена геометрия, которая затем Египта была перенесена в Элладу.
Геродот (V в. до н. э.)

Фрагмент папируса Райнда.



Папирус Райнда (33 см на 5,25 м), назван по имени первого владельца, содержит 84 задачи. Часть папируса хранится в Британском музее в Лондоне, часть - в Нью-Йорке. Папирус переписал писец Ахмес ~1650 г. до н. э. автор оригинала неизвестен, текст создавался во второй половине XIX в. до н. э.

Служил учебником: есть задачи на вычисление – образцы выполнения арифметических операций, задачи на раздел имущества, на нахождение объема амбар или корзины, площади поля и т. д.

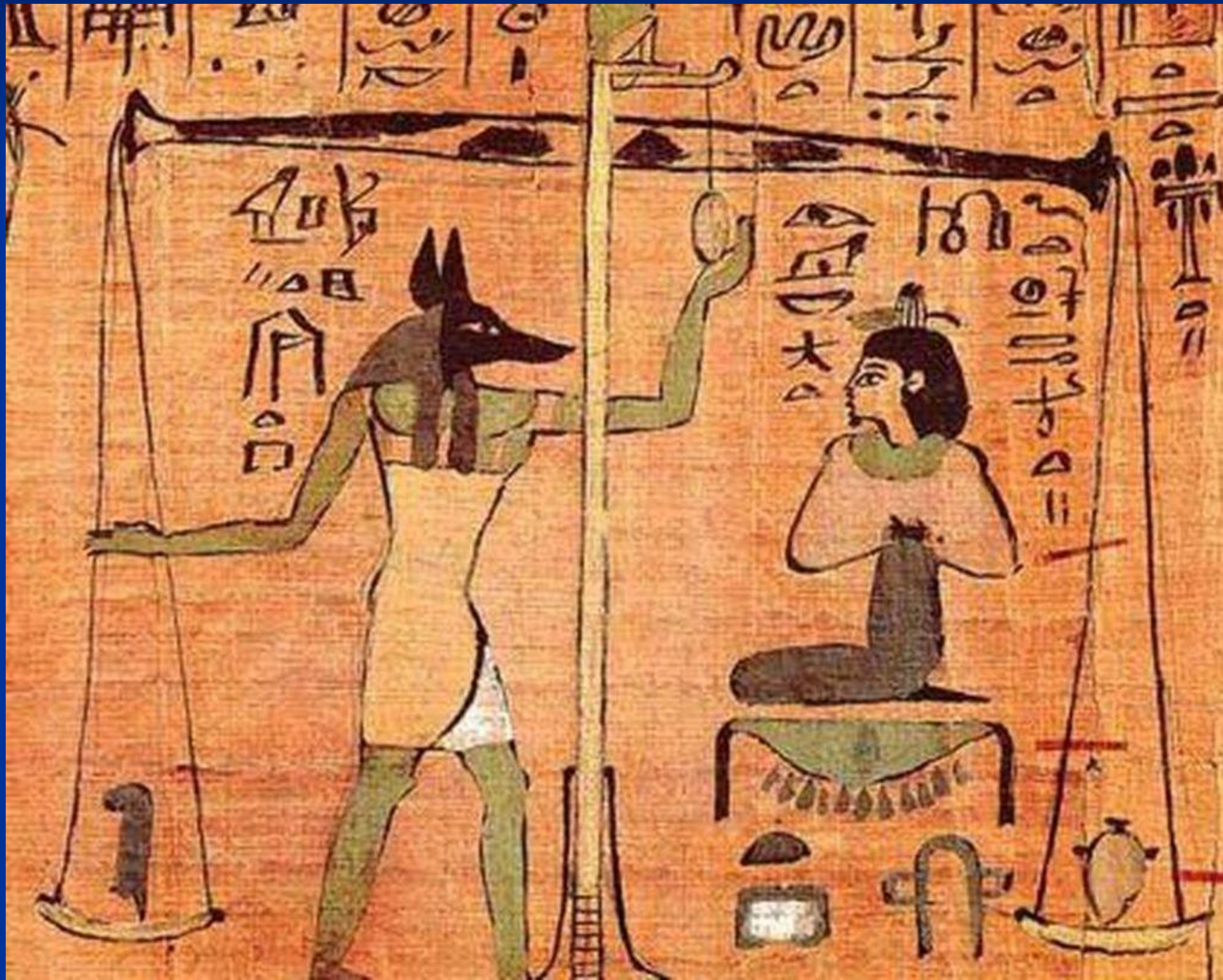
В папирусах встречаются задачи на

арифметическую и геометрическую прогрессии.

нахождение точно площади поля прямоугольной, треугольной и трапециевидной формы

нахождение объемов куба, параллелепипеда, призмы и цилиндра

нахождение объема усеченной пирамиды, в основаниях которой лежат квадраты со сторонами a и b, а высота равна h.



вычислять поверхность корзины с отверстием при решении которой используется число π (в Московском папирусе).

Очень хорошее приближение числа π, которое получается из формулы для площади круга диаметра d
В 50-й задаче папируса Райнда $\pi \approx 3{,}1605$.

В древнем Востоке при вычислениях использовали $\pi = 3$. Даже в Библии есть указание на него. В этом отношении египтяне опередили другие народы.

В сер. I тыс. до н. э. для построения прямого угла египтяне использовали верёвку, разделённую узлами на 12 равных частей. Концы веревки связывали и натягивали ее на 3 колышка. Если стороны относились как 3 : 4 : 5, то получался прямоугольный треугольник – единственный прямоугольный треугольник, который знали в Древнем Египте.

Первая известная задача на прогрессию

Имеется 100 мер зерна. Необходимо поделить их между 5 работниками таким образом, что: Второй работник получит настолько больше зерна, чем первый, насколько третий работник больше, чем второй, настолько же, насколько четвертый больше чем третий и настолько же, насколько пятый больше, чем четвертый. Если первый и второй работник получат в 7 раз меньше зерна, чем в сумме остальные, сколько достанется каждому?

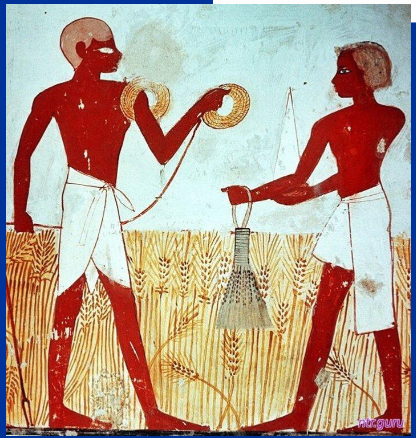
x мер зерна получит работник 1

$x+y$ мер зерна получит работник 2

$x+2y$ мер зерна получит работник 3

$x+3y$ мер зерна получит работник 4

$x+4y$ мер зерна получит работник 5



1 и 2/3 мер зерна получит работник 1

5/3+55/6 = 65/6 = 10 и 5/6 мер зерна получит работник 2

65/6+55/6 =120/6 = 20 мер зерна получит работник 3

20+55/6=29 и 1/6 мер зерна получит работник 4

29+1/6+55/6 = 38 и 1/3 мер зерна получит работник 2

$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100$ $5x+10y=100$ $x+2y=20$ $x+11x=20$ $3x=5$ $x=5/3$

$7(x+(x+y))=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)$ $14x+7y=3x+9y$ $11x=2y$ $y=11*(5/3)/2=55/6$

Диофант Александрийский – «отец алгебры», живший предположительно в III в. н. э. В его книге «Арифметика» впервые встречается уравнения, решения которых нужно найти на множестве целых чисел. Такие уравнения получили название **«диофантовых уравнений». «Арифметика»** состояла из 13 книг, сохранились только 6 первых. Большая часть труда –сборник задач с решениями (сохранились 189 задач). Ввел буквенную символику в алгебру.

Пример диофантова уравнения: в клетке сидят кролики и фазаны и вместе у них 18 ног. Сколько в клетке тех и других?

Пусть x- число кроликов
y – число фазанов

$4x+2y=18$

Уравнение в натуральных числах

Метод перебора: (1;7), (2;5), (3;3), (4;1)

цель изучения диофантовых уравнения – дать основы теории целых чисел, которая дальше развивается как в математике, так и в информатике и программировании

Эпитафия на его могильном камне

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей — и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребёнком. 1/6x
И половину шестой встретил с пушком на щёках. 1/12x
Только минула седьмая, с подругой он обручился. 1/7x
С нею, пять лет проведя, сына дождался мудрец; 5
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил. 1/2x
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе, 4
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Пусть x – длительность жизни Диофанта

$1/6x+1/12x+1/7x+5+1/2x+4=x$

$(14x+7x+12x+42x)/84+9=x$

$75x+9*84=84x$

$9*84=9x$

$x=84$

Древний Китай

Китайцам было известно : вся базовая арифметика (включая нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного), действия с дробями, пропорции, отрицательные числа, площади и объёмы основных фигур и тел, теорема Пифагора и алгоритм подбора пифагоровых троек, решение квадратных уравнений.

Метод "фан-чэн" близок к методу определителей (метод Гаусса), идею которого в Европе впервые высказал Лейбниц и которую развил Крамер (1750).

Пример из "Математики в девяти книгах" (Цзю чжан суань шу, между III в. до н.э. и I в. н.э.).

Два человека и получили неизвестное количество монет. Их надо определить из условия: если добавить первому половину монет второго, или добавить второму 2/3 монет первого, то в обоих случаях получится 48 монет

Пусть x монет получил первый человек
Пусть y монет получил второй человек

	x	y														
x +1/2 y=48	1	1/2	48	2	1	96	2	1	96	2	1	96	2	0	72	X=36
y+2/3 x=48	2/3	1	48	2	3	144	0	-2	-48	0	1	24	0	1	24	Y=24

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

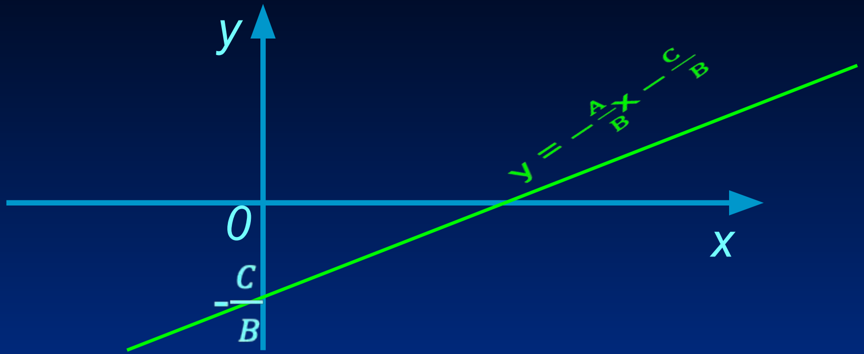
Система называется ***однородной***, если все её свободные члены равны нулю ($b_1=b_2=\ldots b_m=0$)

Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения. Решения считаются различными, если хотя бы одно из значений переменных не совпадает. Совместная система с единственным решением называется ***определённой***, при наличии более одного решения — ***недоопределённой***.

Какая система описана в задаче?

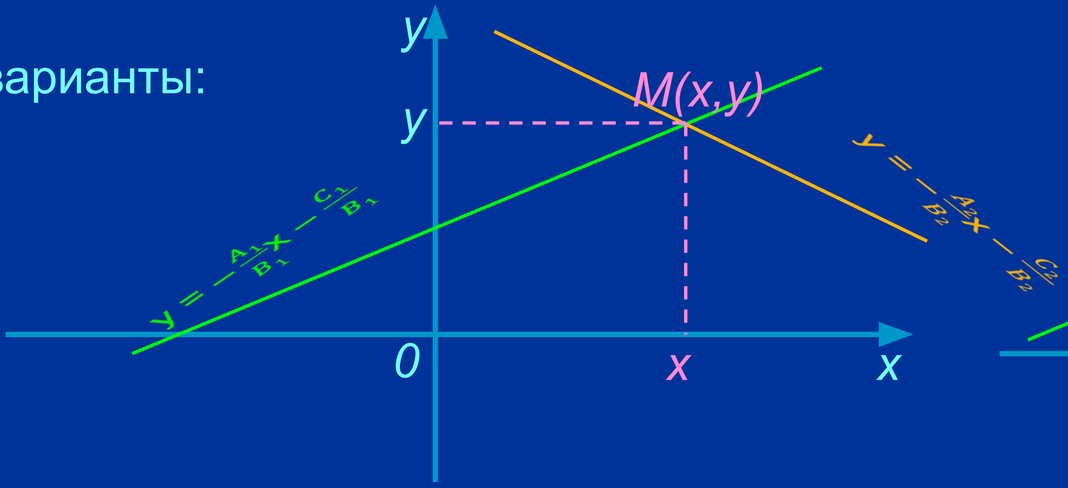
Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений

Уравнения с двумя переменными вида: Ax+By+C=0 описывают на координатной плоскости *Oxy* прямую

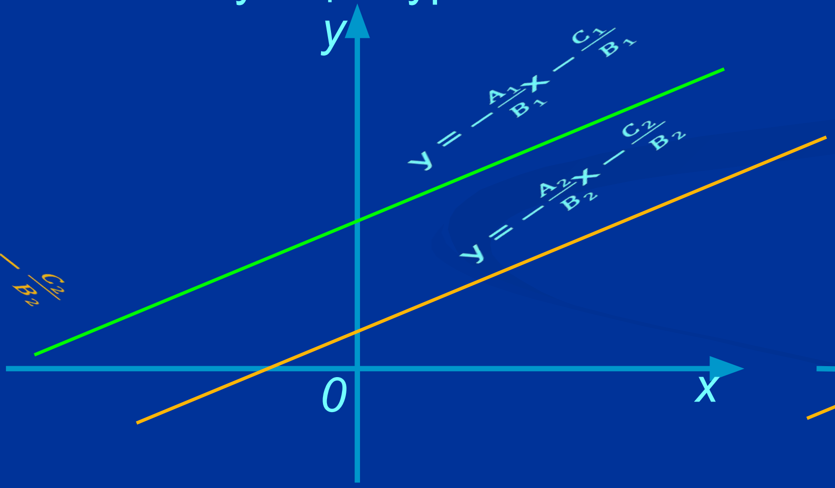


Система двух уравнений такого вида означает, что ее решения как точки на координатной плоскости должны принадлежать одновременно двум прямым, соответствующим уравнениям этой системы

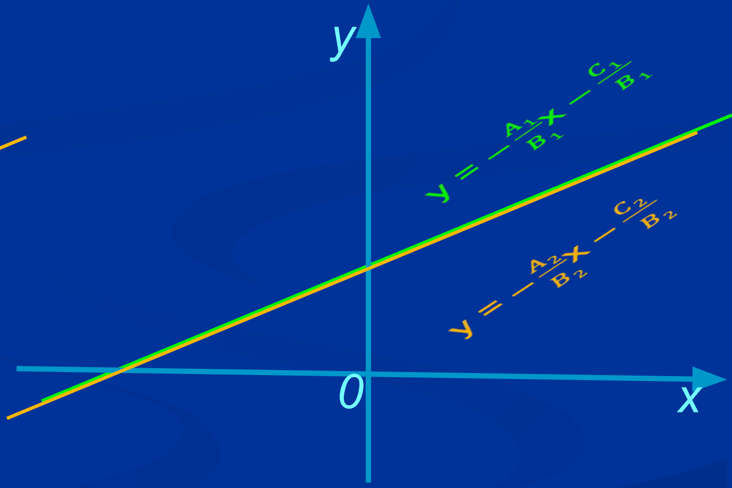
варианты:



обе прямые пересекаются, система имеет единственное решение



прямые параллельны, система не имеет решения (несовместна)



прямые совпадают, т.е. ранг системы равен единице, и система имеет бесчисленное множество решений

Древний Китай

Метод "фан-чэн" близок к методу определителей (метод Гаусса), идею которого в Европе впервые высказал Лейбниц и которую развил Крамер (1750).

Пример из "Математики в девяти книгах" (между III в. до н.э. и I в. н.э.).

Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу (мера объема зерна). Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу (зерна). Из 1 снопа хорошего урожая , 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу (зерна). Спрашивается, сколько (зерна) получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая.

Хор	Ср	Пл	
3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

6	4	2	78
6	9	3	102
6	12	18	156

6	4	2	78
0	5	1	24
0	8	16	78

3	2	1	39
0	40	8	192
0	40	80	390

Пл=11/4=2¾

3	2	1	39
0	5	1	24
0	0	72	198

3	2	1	39
0	5	1	24
0	0	4	11

Ср=17/4=4¼

12	8	4	156
0	20	4	96
0	0	4	11

12	8	0	145
0	20	0	85
0	0	4	11

12	8	0	145
0	4	0	17
0	0	4	11

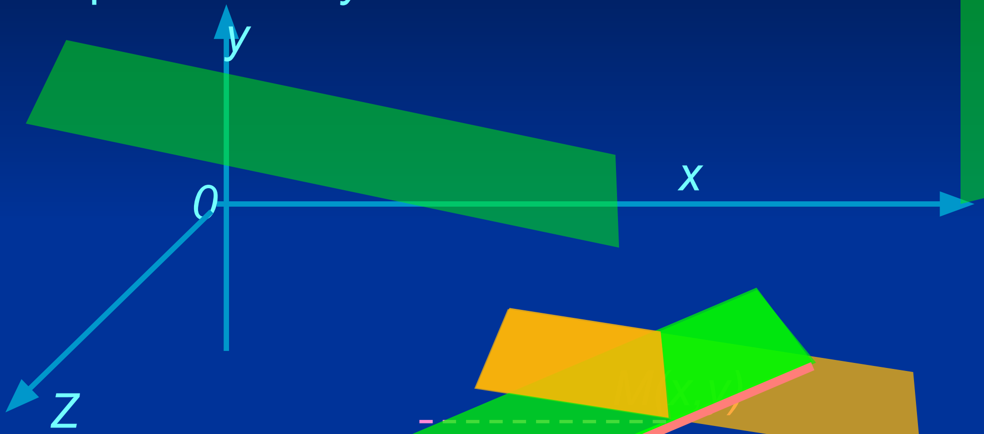
12	8	0	145
0	8	0	34
0	0	4	11

Хор=111/12=9 ¼

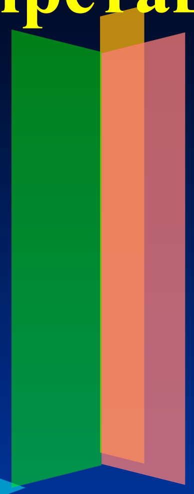
12	0	0	111
0	8	0	34
0	0	4	11

Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений

Уравнения с тремя переменными вида: Ax+By+Cz+D=0 описывают плоскость в трехмерном пространстве *Oxyz*

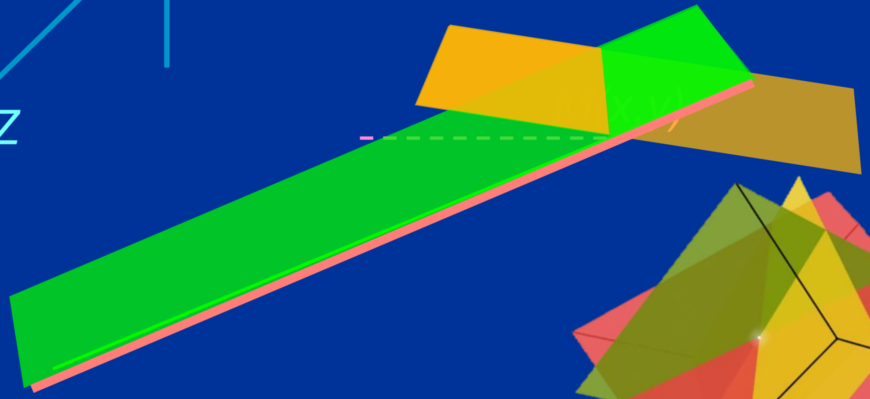


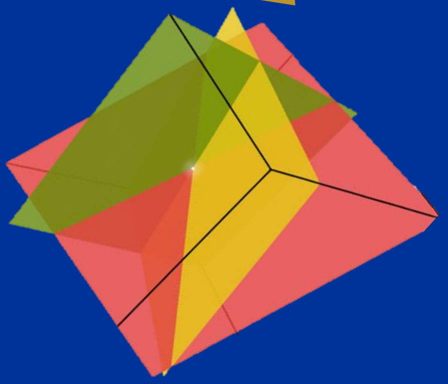
варианты:

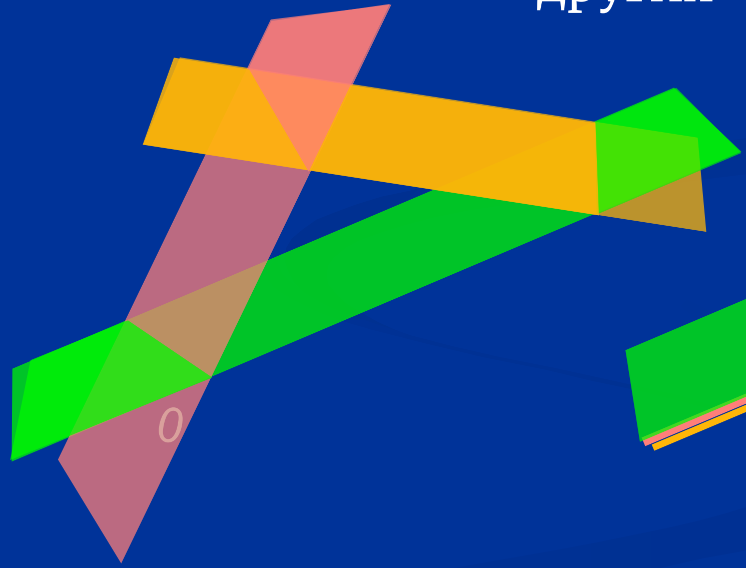


три плоскости пересекаются по одной прямой — система имеет бесчисленное множество решений (все точки на этой прямой)

хотя бы одна из плоскостей параллельна какой-либо из двух других — система несовместна







все три плоскости совпадают — все точки общей плоскости являются решениями, и ранг системы равен единице

две плоскости совпадают, а третья пересекает их — бес численное множество решений (все точки прямой — на пересечении трех

три плоскости пересекаются в одной точке, и система имеет единственное решение

плоскости пересекаются попарно по парал лельным прямым — система

Древний Китай

Китайцам было известно : вся базовая арифметика (включая нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного), действия с дробями, пропорции, отрицательные числа, площади и объёмы основных фигур и тел, теорема Пифагора и алгоритм подбора пифагоровых троек, решение квадратных уравнений

Метод "фан-чэн" близок к методу определителей (метод Гаусса), идею которого в Европе впервые высказал Лейбниц и которую развил Крамер (1750).

Пример из "Математики в девяти книгах" (между III в. до н.э. и I в. н.э.).

2 снопам хорошего урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам плохого урожая не хватает до 1 доу соответственно по 1 снопу среднего урожая, плохого урожая, хорошего урожая. Спрашивается, сколько (зерна) получили из каждого снопа: хорошего, среднего и плохого урожая

Хор Ср Пл

Пл=4/25=0,16

2	1	0	1
0	3	1	1
1	0	4	1

2	1	0	1
0	3	1	1
2	0	8	2

2	1	0	1
0	3	1	1
0	-1	8	1

2	1	0	1
0	3	1	1
0	3	-24	-3

2	1	0	1
0	3	1	1
0	0	25	4

2	1	0	1
0	75	25	25
0	0	25	4

Ср=7/25=0,28

Хор=9/25=0,36

2	1	0	1
0	75	0	21
0	0	25	4

2	1	0	1
0	25	0	7
0	0	25	4

50	25	0	25
0	25	0	7
0	0	25	4

50	0	0	18
0	25	0	7
0	0	25	4

25	0	0	9
0	25	0	7
0	0	25	4