

Математика

Часть 1

Основные понятия
математики



Лекция 1

Возникновение основных понятий



Образование – то, что остается после того, когда забывается все, чему учили.

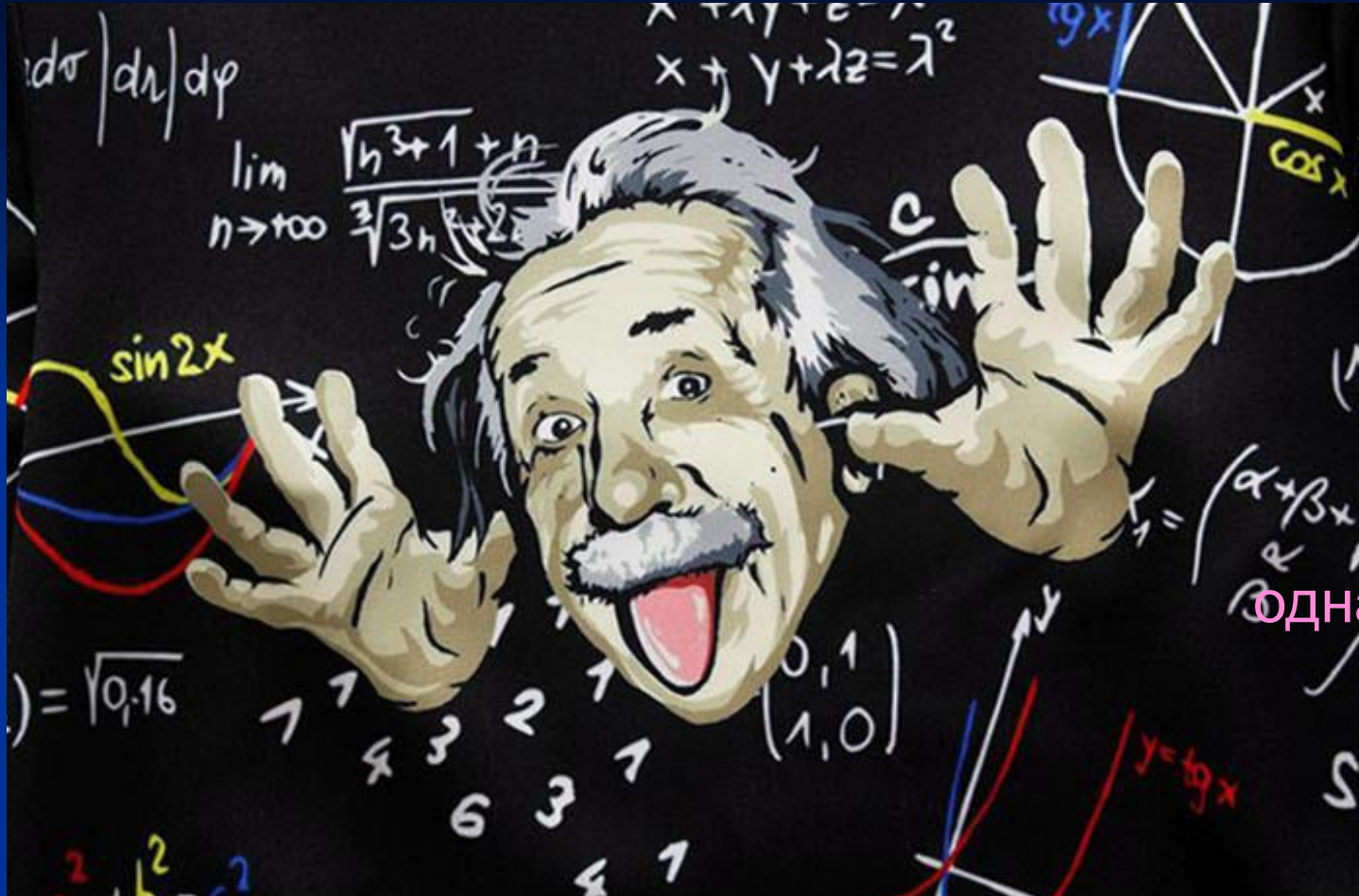
Альберт Эйнштейн

Образование - это не изучение фактов, а тренировка мышления

Альберт Эйнштейн

Умение мыслить математически — одна из благороднейших способностей человека.

Бернард Шоу



Математика — это единственный совершенный метод водить самого себя за нос.

Альберт Эйнштейн

Математика — фундаментальная наука, предоставляющая (общие) языковые средства другим наукам; тем самым она выявляет их структурную взаимосвязь и способствует нахождению самых общих законов природы

Математика – язык, на котором говорят все точные науки

Н.И.Лобачевский

Математика – это больше, чем наука, это язык науки
Н.Бор

Что есть математика?

Др.греческий

Слово «математика» = μάθημα + μαθηματικός
изучение, знание, наука восприимчивый, успевающий

Термин *μαθηματικά* в современном значении «математика» встречается уже в трудах [Аристотеля](#) (IV в. до н. э.). В русский язык слово пришло либо через [польск. *matematyka*](#), либо через [лат. *mathematica*](#)

Считается, что дальнейшее развитие гуманитарных наук без математического моделирования и точных количественных методов исследования, широкого использования современных вычислительных средств просто невозможно. Правда, математика пока не располагает средствами, в полной мере отвечающими потребностям этих наук. По всей видимости, создание соответствующего аппарата может явиться только результатом вполне осознанных совместных действий как математиков, так и тех ученых, профессиональные интересы которых лежат в гуманитарной сфере.

Гуманитарный потенциал математики

1. Математика «ум в порядок приводит» - влияние математики на формирование мышления и личностных черт человека
2. Математика формирует навык предметной речи, строящейся по определенным законам (краткость, четкость, лаконичность, минимизация и др.), а предметная речь оказывает существенное влияние на развитие литературной речи
3. Математика позволяет вывести гуманитарные исследования на более высокий научный уровень: она дает такие инструменты, как моделирование и точные количественные методы исследования

Вопросы для конспекта лекции

- Возникновение математических понятий. Развитие понятия числа. Числа от натуральных до вещественных (и дальше)
- Возникновение арифметических операций. Возникновение уравнений.
- Виды систем линейных уравнений. Геометрическая интерпретация решений.



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

идеализации реальных объектов и множеств однородных объектов

Число

- одно из основных математических понятий, которое позволяет выразить результаты измерения или счета

Понятие числа служит исходным для множества математических теорий



понятие геометрической фигуры образовалось с помощью абстракции отождествления, в основе которой лежит отношение эквивалентности «сходство», «подобие» предметов по их форме, с помощью которого множество предметов разбивается на классы эквивалентности так, что любые два предмета одного класса имеют одинаковую форму, а любые два предмета различных классов — различные формы. Абстрагируясь при этом от других свойств предметов (цвета, величины, материала, из которого они сделаны, назначения и т. д.), мы получаем самостоятельное понятие геометрической фигуры.

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура идеализации реальных объектов и множеств однородных объектов

Число



Кипу,
использовались
инками для
записи чисел

Первобытный человек не отделял от конкретного представления абстрактное. Счет был вещественным. Использовались пометки, камешки, пальцы и т. п. Применяли для запоминания его результаты узелки, зарубки и пр. После изобретения письменности начали использовать буквы и особые значки для сокращенного изображения на письме больших чисел. Обычно воспроизводился при таком кодировании принцип нумерации, аналогичный использовавшемуся в языке.

Счёт появился тогда, когда человеку потребовалось сообщить друг другу о количестве обнаруженных им предметов



«ОДИН»



«два»



«МНОГО»

Системы счёта и принцип наименования чисел

Двоичная система

Появление счёта и измерения позволили сравнивать различные числа, длины, площади и объёмы

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

Появление счёта и измерения позволили сравнивать различные числа, длины, площади и объёмы

Системы счёта и принцип наименования чисел

Двоичная система

Названия чисел от 2 (zwei, two, duo, deux, dvi, два...) до 10 в индоевропейских языках сходны

О чем это свидетельствует?

Понятие абстрактного числа появилось ещё до разделения этих языков

При образовании числительных у большинства народов какое число занимает особое положение?

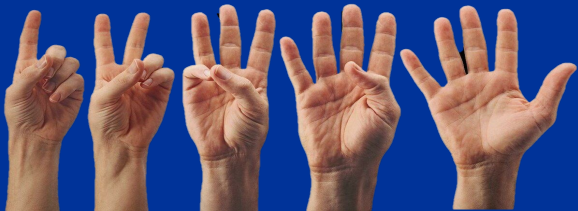
О чем это свидетельствует?

Счёт по пальцам был широко распространён. Отсюда происходят

Пятеричная система

Двадцатичная система

Десятеричная система



Из 307 систем счисления первобытных американских народов

106 – пятеричные

146 десятичные

55 - двадцатичные



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

Появление счёта и измерения позволили сравнивать различные числа, длины, площади и объёмы

Системы счёта и принцип наименования чисел

Двоичная система

Названия чисел от 2 (zwei, two, duo, deux, dvi, два...) до 10 в индоевропейских языках сходны

О чем это свидетельствует?

Понятие абстрактного числа появилось ещё до разделения этих языков

При образовании числительных у большинства народов какое число занимает особое положение?

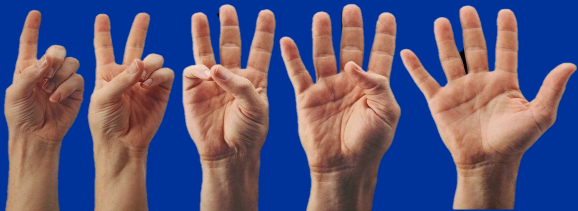
О чем это свидетельствует?

Счёт по пальцам был широко распространён. Отсюда происходят

Пятеричная система

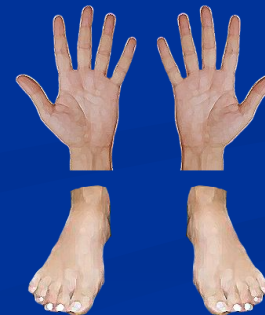
Двадцатичная система

Десятеричная система



Что использовали при счете французы, если $80 = \text{quatre-vingt}$, а $90 = \text{quatre-vingt-dix}$?

20



Шестидесятиричная



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

Когда понятие абстрактного числа окончательно утвердилось, следующей ступенью стали **операции с числами**

2. Возникновение арифметических операций

объединение нескольких множеств в одно



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

объединение нескольких множеств в одно

сложение

отделение части множества



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

объединение нескольких множеств в одно

сложение

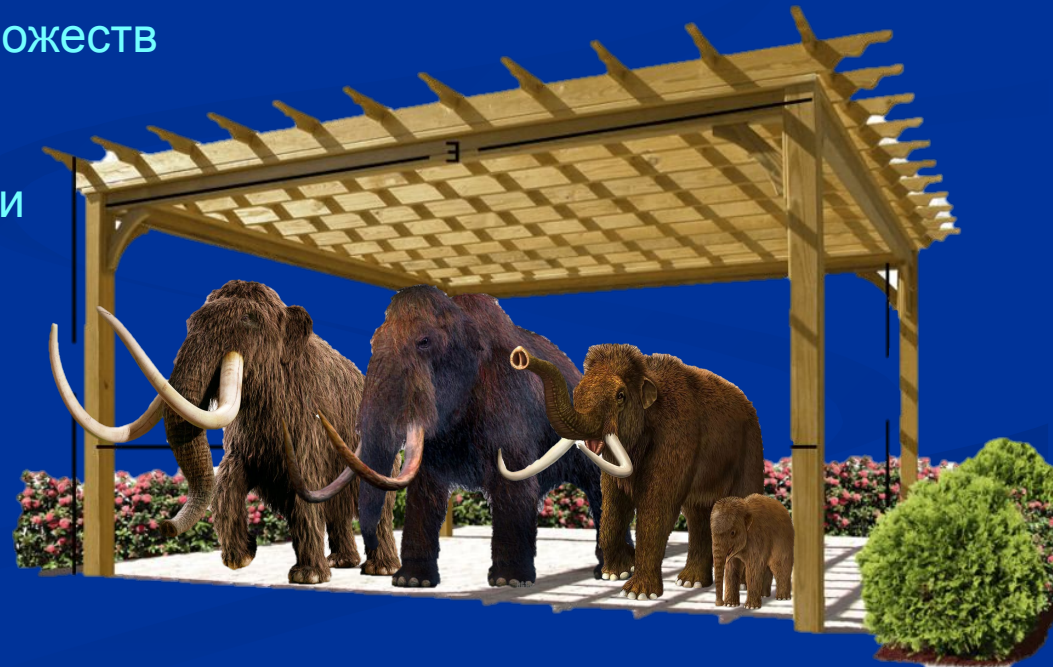
отделение части множества

вычитание

«пакетное» сложение множеств

умножение

разделение на части



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

объединение нескольких множеств в одно

сложение

отделение части множества

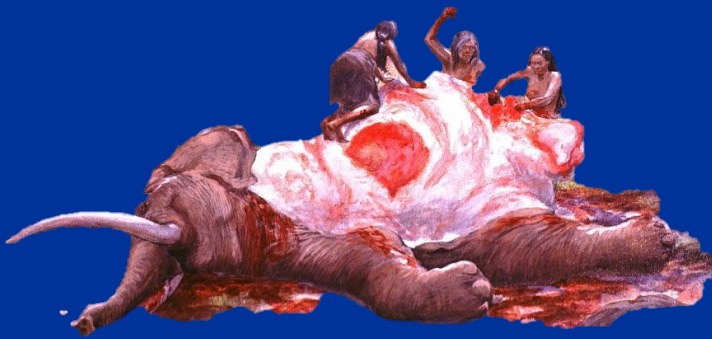
вычитание

«пакетное» сложение множеств

умножение

разделение на части

деление



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

сложение

вычитание

умножение

деление

Делить на 10 частей сложно

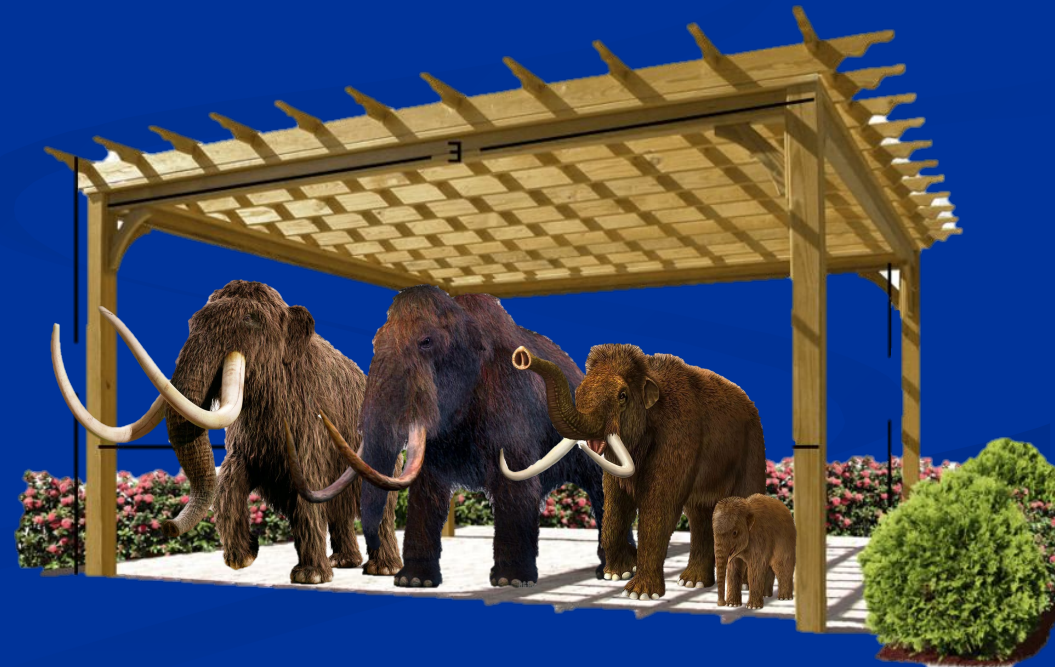
У римлян стандартной дробью была унция (1/12)

Средневековые денежные и мерные системы несут на себе отпечаток древних недесятичных систем:

1 английский пенс = 1/12 шиллинга,

1 дюйм = 1/12 фута,

1 фут = 1/3 ярда



Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

2. Возникновение арифметических операций

сложение

вычитание

умножение

деление

идеализация конечного множества однородных, устойчивых и неделимых предметов (людей, овец, дней и т. п.) —

Иррациональные числа

$\zeta(3) - \varrho - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \ln 2$
 $-\phi, \Phi - \psi - \alpha, \beta - e - e^\pi - \pi$

Дробные числа

$\dots -1/2, \dots -1/3, \dots 1/3, \dots 1/2, \dots$

Натуральные числа

1, 2, 3, ...

Отрицательные и ноль

$\dots -3, -2, -2, 0$

Целые числа

Рациональные числа

Действительные числа

Комплексные числа — Гиперкомплексные

числа — Кватернионы — Октонионы — Седенионы — Гиперреальные числа — Сюрреальные числа — p-адические числа — Математические постоянные — Названия чисел — Бесконечность — Базы

3. Возникновение уравнений

Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на алгебраический.

Исаак Ньютон

Возникновение математики

1. Возникновение понятий

Геометрическая фигура

Число

Системы счета и принцип наименования чисел

Двоичная

Пятеричная

Десятеричная

Двадцатичная

Шестидесятиричная

2. Возникновение арифметических операций

сложение

вычитание

умножение

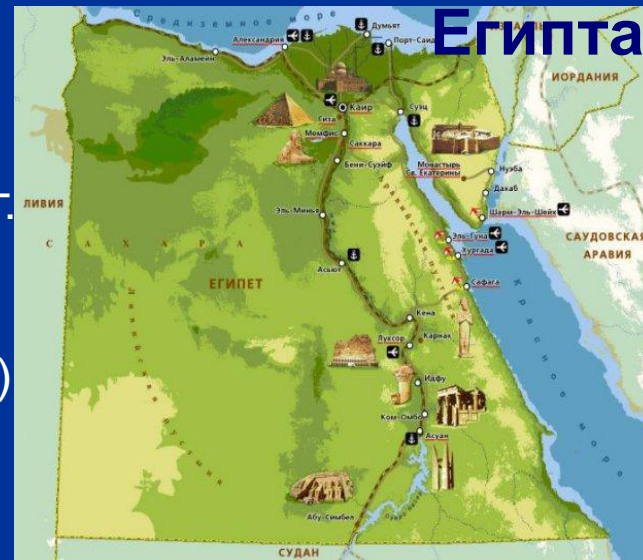
деление

3. Возникновение уравнений

Накопление эмпирическим путём (методом проб и ошибок) знаний о свойствах арифметических действий, о способах измерения площадей и объемов простых фигур и тел привело к созданию уравнений ученых



сер. IV тыс.
до н.э.
-12.10.539 г.
до н.э.
(«падение
Вавилона»)



сер. IV тыс.
до н.э. - IV
в. н.э.



Возраст ~5
тыс. лет,
письменны
е
источники
покрывают
период
~3500 лет.

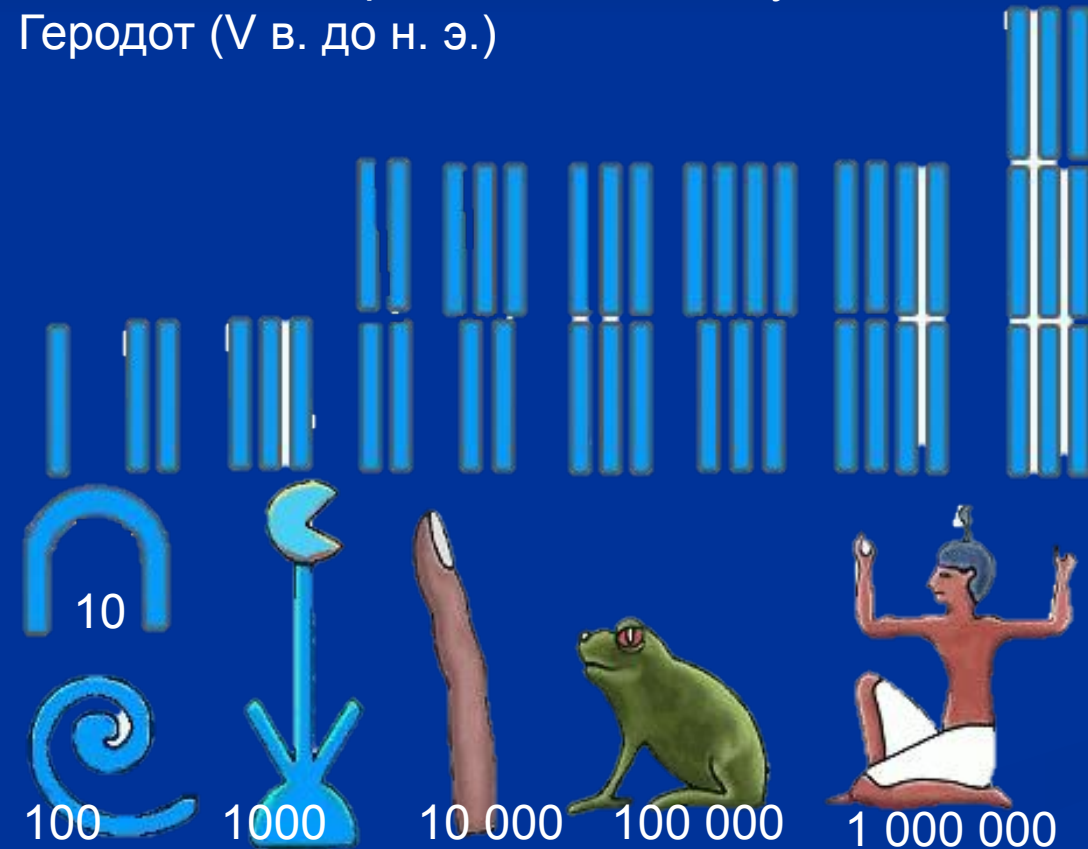
Древний Египет

Царь разделил землю между египтянами, дав каждому по равному прямоугольному участку; из этого он создал себе доходы, приказав ежегодно вносить налог. Если же от какого-нибудь надела река отнимала что-нибудь, то владелец, придя к царю, сообщал о происшедшем. Царь же посылал людей, которые должны были осмотреть участок земли и измерить, насколько он стал меньше, чтобы владелец вносил с оставшейся площади налог, пропорциональный установленному. Мне кажется, что так и была изобретена геометрия, которая затем в Египта была перенесена в Элладу.

Геродот (V в. до н. э.)



Фрагмент папируса Райнда.



Папирус Райнда (33 см на 5,25 м), назван по имени первого владельца, содержит 84 задачи. Часть папируса хранится в Британском музее в Лондоне, часть - в Нью-Йорке. Папирус переписал писец Ахмес ~1650 г. до н. э. автор оригинала неизвестен, текст создавался во второй половине XIX в. до н. э.

Служил учебником: есть задачи на вычисление – образцы выполнения арифметических операций, задачи на раздел имущества, на нахождение объема амбар или корзины, площади поля и т. д.

В папирусах встречаются задачи на

арифметическую и геометрическую прогрессии.

нахождение точно площади поля прямоугольной, треугольной и трапециевидной формы

нахождение объемов куба, параллелепипеда, призмы и цилиндра

нахождение объема усеченной пирамиды, в основаниях которой лежат квадраты со сторонами a и b , а высота равна h .

вычислять поверхность корзины с отверстием при решении которой используется число π (в Московском папирусе).

Очень хорошее приближение числа π , которое получается из формулы для площади круга диаметра d
В 50-й задаче папируса Райнда $\pi \approx 3,1605$.

В древнем Востоке при вычислениях использовали $\pi = 3$.
Даже в Библии есть указание на него. В этом отношении египтяне опередили другие народы.

В сер. I тыс. до н. э. для построения прямого угла египтяне использовали верёвку, разделённую узлами на 12 равных частей. Концы веревки связывали и натягивали ее на 3 колышка. Если стороны относились как $3 : 4 : 5$, то получался прямоугольный треугольник — единственный прямоугольный треугольник, который знали в Древнем Египте.

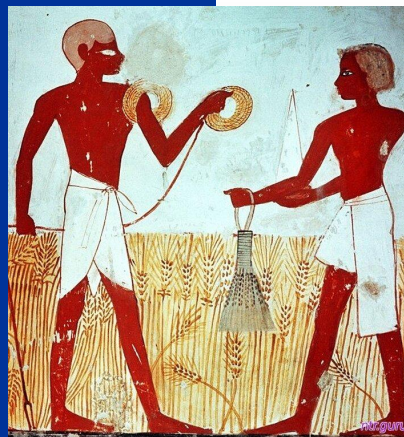


Первая известная задача на прогрессию

Имеется 100 мер зерна. Необходимо поделить их между 5 работниками таким образом, что: Второй работник получит настолько больше зерна, чем первый, насколько третий работник больше, чем второй, настолько же, насколько четвертый больше чем третий и настолько же, насколько пятый больше, чем четвертый. Если первый и второй работник получают в 7 раз меньше зерна, чем в сумме остальные, сколько достанется каждому?



- x мер зерна получит работник 1
- $x+y$ мер зерна получит работник 2
- $x+2y$ мер зерна получит работник 3
- $x+3y$ мер зерна получит работник 4
- $x+4y$ мер зерна получит работник 5



$1 \frac{2}{3}$ мер зерна получит работник 1
 $\frac{5}{3} + \frac{55}{6} = \frac{65}{6} = 10 \frac{5}{6}$ мер зерна получит работник 2
 $\frac{65}{6} + \frac{55}{6} = \frac{120}{6} = 20$ мер зерна получит работник 3
 $20 + \frac{55}{6} = 29 \frac{1}{6}$ мер зерна получит работник 4
 $29 + \frac{1}{6} + \frac{55}{6} = 38 \frac{1}{3}$ мер зерна получит работник 2

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100$$

$$7(x+(x+y))=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)$$

$$5x+10y=100$$

$$14x+7y=3x+9y$$

$$x+2y=20$$

$$11x=2y$$

$$x+11x=20$$

$$3x=5$$

$$x=5/3$$

$$y=11*(5/3)/2=55/6$$

Древний Китай

Китайцам было известно : вся базовая арифметика (включая нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного), действия с дробями, пропорции, отрицательные числа, площади и объёмы основных фигур и тел, теорема Пифагора и алгоритм подбора пифагоровых троек, решение квадратных уравнений.

Метод "фан-чэн" близок к методу определителей (метод Гаусса), идею которого в Европе впервые высказал Лейбниц и которую развил Крамер (1750).

Пример из "Математики в девяти книгах" (Цзю чжан суань шу, между III в. до н.э. и I в. н.э.).

Два человека и получили неизвестное количество монет. Их надо определить из условия: если добавить первому половину монет второго, или добавить второму $2/3$ монет первого, то в обоих случаях

получится 48 монет

Пусть x монет получил первый

человек монет получил второй

человек

$$\begin{array}{l} x \quad y \\ \left. \begin{array}{l} x + 1/2 y = 48 \\ y + 2/3 x = 48 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \quad 1/2 \\ 2/3 \quad 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 48 \\ 48 \end{array} \right| \begin{array}{l} 4 \quad 2 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 96 \\ 144 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \quad 1 \\ 0 \quad -2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 96 \\ -48 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 96 \\ 24 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 72 \\ 24 \end{array} \right| \begin{array}{l} x=36 \\ y=24 \end{array} \end{array}$$

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система называется **однородной**, если все её свободные члены равны нулю ($b_1=b_2=\dots=b_m=0$)

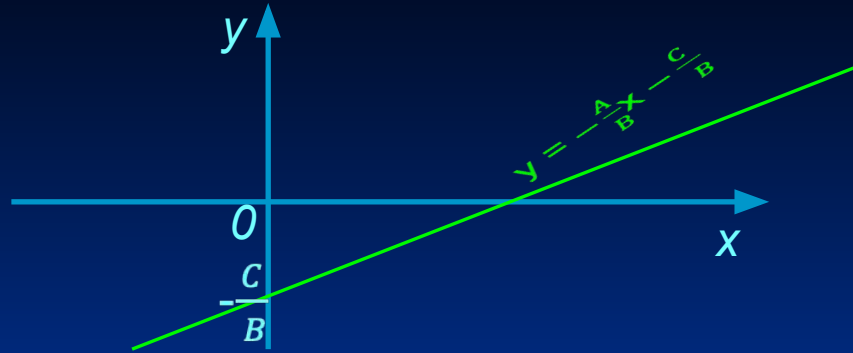
Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения. Решения считаются различными, если хотя бы одно из значений переменных не совпадает.

Совместная система с единственным решением называется определённой, при наличии более одного решения — недоопределённой.

Какая система описана в задаче?

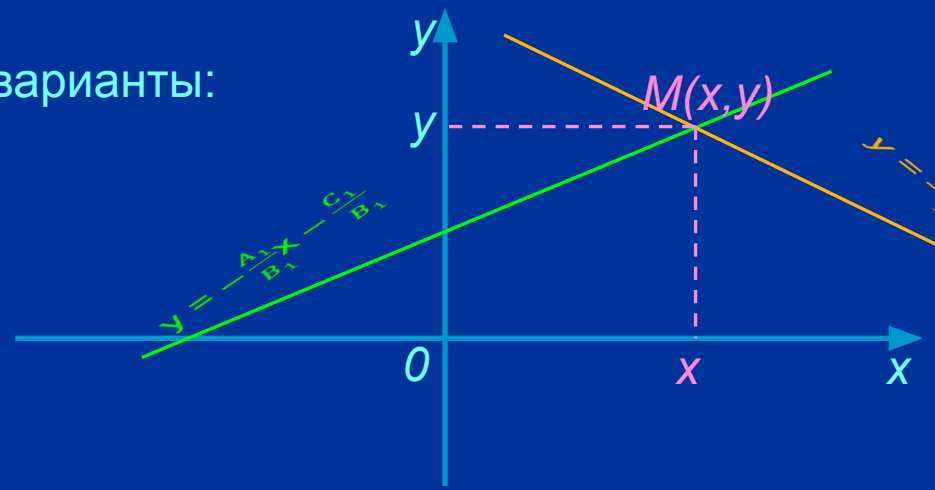
Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений

Уравнения с двумя переменными вида: $Ax + By + C = 0$ описывают на координатной плоскости Oxy прямую

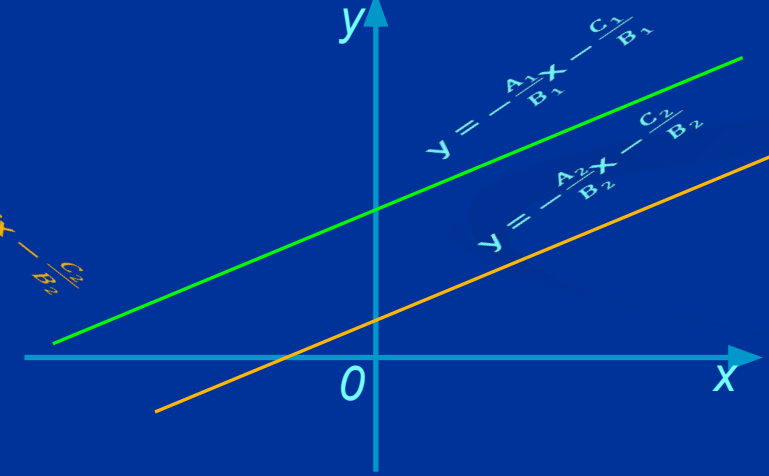


Система двух уравнений такого вида означает, что ее решения как точки на координатной плоскости должны принадлежать одновременно двум прямым, соответствующим уравнениям этой системы

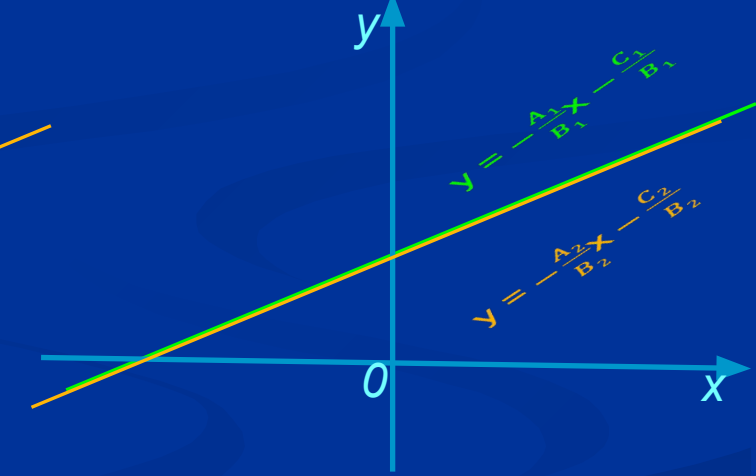
варианты:



обе прямые пересекаются, система имеет единственное решение



прямые параллельны, система не имеет решения (несовместна)



прямые совпадают, т.е. ранг системы равен единице, и система имеет бесчисленное множество решений

Древний Китай

Метод "фан-чэн" близок к методу определителей (метод Гаусса), идею которого в Европе впервые высказал Лейбниц и которую развил Крамер (1750).

Пример из "Математики в девяти книгах" (между III в. до н.э. и I в. н.э.).

Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу (мера объема зерна). Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу (зерна). Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу (зерна). Спрашивается, сколько (зерна) получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая.

Хор Ср Пл

3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

6	4	2	78
6	9	3	102
6	12	18	156

6	4	2	78
0	5	1	24
0	8	16	78

3	2	1	39
0	40	8	192
0	40	80	390

$\text{Пл} = 11/4 = 2\frac{3}{4}$

3	2	1	39
0	5	1	24
0	0	72	198

$\text{Ср} = 17/4 = 4\frac{1}{4}$

3	2	1	39
0	5	1	24
0	0	4	11

12	8	4	156
0	20	4	96
0	0	4	11

12	8	0	145
0	20	0	85
0	0	4	11

12	8	0	145
0	4	0	17
0	0	4	11

12	8	0	145
0	8	0	34
0	0	4	11

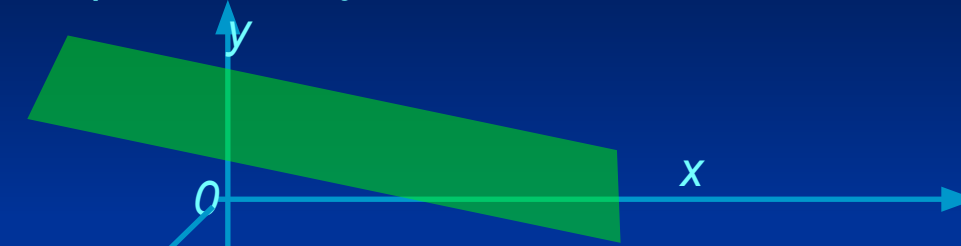
$\text{Хор} = 111/12 = 9\frac{1}{4}$

12	0	0	111
0	8	0	34
0	0	4	11

Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений

Уравнения с тремя переменными вида: $Ax + By + Cz + D = 0$ описывают плоскость в трехмерном пространстве $Oxyz$

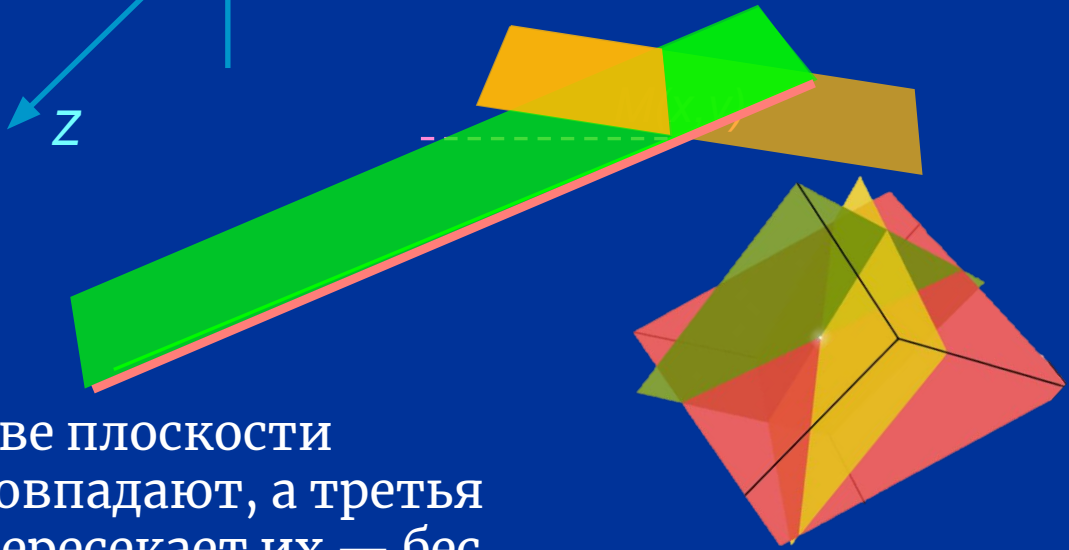
варианты:



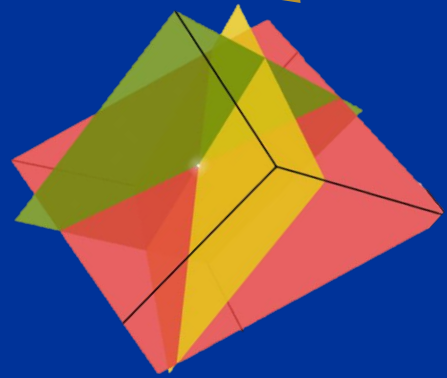
три плоскости пересекаются по одной прямой — система имеет бесчисленное множество решений (все точки на этой прямой)



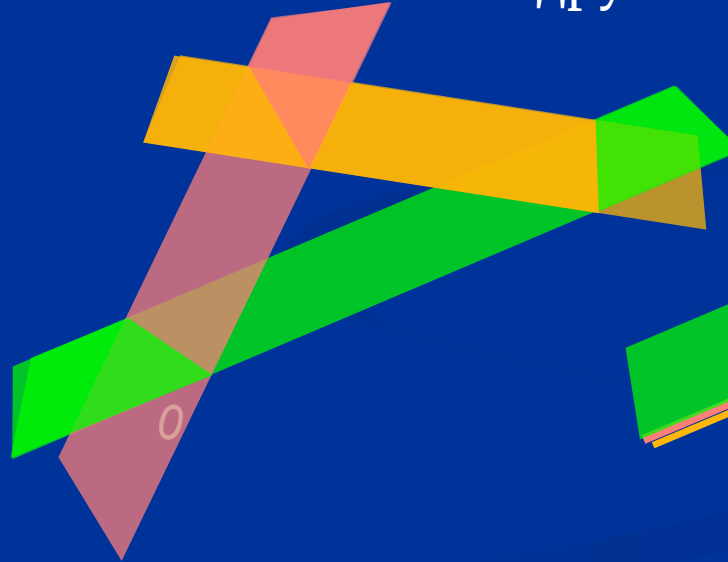
хотя бы одна из плоскостей параллельна какой-либо из двух других — система несовместна



две плоскости совпадают, а третья пересекает их — бесчисленное множество решений (все точки прямой — на пересечении трех



три плоскости пересекаются в одной точке, и система имеет единственное решение



плоскости пересекаются попарно по параллельным прямым — система



все три плоскости совпадают — все точки общей плоскости являются решениями, и ранг системы равен единице

Древний Китай

Китайцам было известно : вся базовая арифметика (включая нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного), действия с дробями, пропорции, отрицательные числа, площади и объёмы основных фигур и тел, теорема Пифагора и алгоритм подбора пифагоровых троек, решение квадратных уравнений

Метод "фан-чэн" близок к методу определителей (метод Гаусса), идею которого в Европе впервые высказал Лейбниц и которую развил Крамер (1750).

Пример из "Математики в девяти книгах" (между III в. до н.э. и I в. н.э.).

2 снопам хорошего урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам плохого урожая не хватает до 1 доу соответственно по 1 снопу среднего урожая, плохого урожая, хорошего урожая. Спрашивается, сколько (зерна) получили из каждого снопа: хорошего, среднего и плохого урожая

Хор Ср Пл

$$\text{Пл} = 4/25 = 0,16$$

2	1	0	1
0	3	1	1
1	0	4	1

2	1	0	1
0	3	1	1
2	0	8	2

2	1	0	1
0	3	1	1
0	-1	8	1

2	1	0	1
0	3	1	1
0	3	-24	-3

2	1	0	1
0	3	1	1
0	0	25	4

2	1	0	1
0	75	25	25
0	0	25	4

$$\text{Ср} = 7/25 = 0,28$$

$$\text{Хор} = 9/25 = 0,36$$

2	1	0	1
0	75	0	21
0	0	25	4

2	1	0	1
0	25	0	7
0	0	25	4

50	25	0	25
0	25	0	7
0	0	25	4

50	0	0	18
0	25	0	7
0	0	25	4

25	0	0	9
0	25	0	7
0	0	25	4