

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)

## Оптимизация деталей ГТД

---

Бакалаврская диссертация студента 865 группы ФАЛТ  
Калинчевой Марии Викторовны

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор  
Темис Юрий Моисеевич

Москва, 2012

# План

- Постановка задачи:

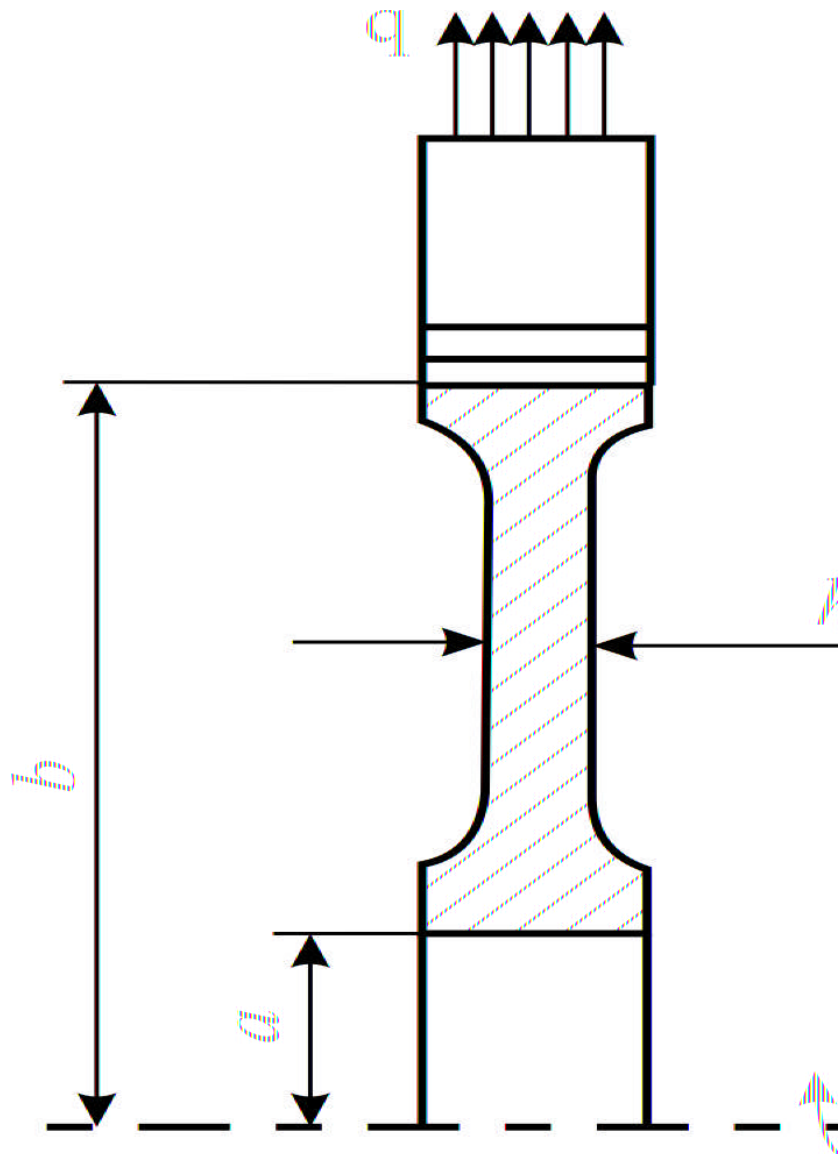
вывод основных уравнений;  
метод чувствительности на примере задачи оптимизации диска  
методы расчета диска

- Описание программного комплекса

- Результаты расчетов

- Заключение

# Постановка задачи



Функция цели:

$$F[h] = 2\pi \int_a^b \rho h(r) r dr \rightarrow \min$$

Ограничения:

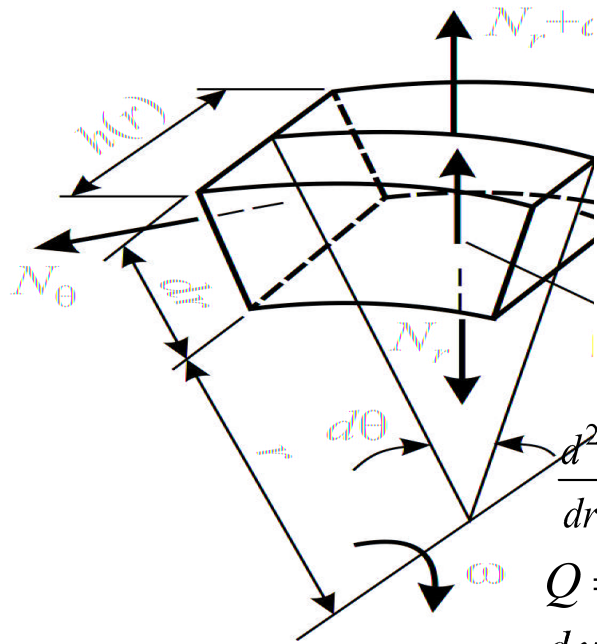
$$h_{\min}(r) \leq h(r) \leq h_{\max}(r)$$

$$\sigma_i(r) \leq [\sigma]$$

$$\forall r \in [a, b];$$

# Вывод основных уравнений равновесия диска

Равновесие элемента диска:



$$-N_r r d\theta + (N_r + dN_r)(r + dr)d\theta - 2N_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} + \rho \omega^2 h r^2 dr d\theta = 0$$

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + \rho \omega^2 h r = 0$$

Уравнение равновесия в перемещениях:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{h(r)} \frac{dh}{dr} \right) \frac{du}{dr} + \left( \frac{\mu}{r h(r)} \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u = -\frac{(1-\mu^2)\rho \omega^2 r}{E} + \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{d}{dr} \alpha T + \frac{dh}{dr} \alpha T \right)$$

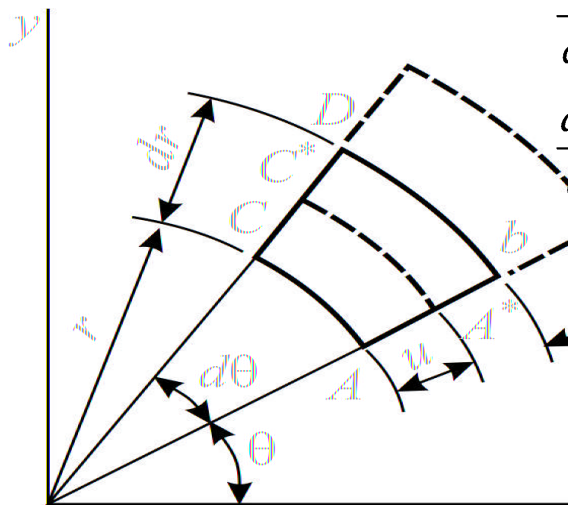
$$Q = \sigma_r h r$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\mu}{r} u + \frac{1-\mu^2}{E r} \frac{1}{h} Q + \alpha (1+\mu) T$$

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{E}{r} h u + \frac{\mu}{r} Q + (-E \alpha T - \rho \omega^2 r^2) h.$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 Q(a) = \eta_1$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 Q(b) = \eta_2$$



|         |            | Задано перемещение | Задана сила   |
|---------|------------|--------------------|---------------|
| $r = a$ | $\alpha_1$ | 1                  | 0             |
|         | $\beta_1$  | 0                  | 1             |
|         | $\eta_1$   | $u_a$              | $N_a \cdot a$ |
|         |            | Задано перемещение | Задана сила   |
| $r = b$ | $\alpha_2$ | 1                  | 0             |
|         | $\beta_2$  | 0                  | 1             |
|         | $\eta_2$   | $u_b$              | $N_b \cdot b$ |

# Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

Исходная задача:

$$[J] \begin{Bmatrix} u \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha(1+\mu) \\ (-E\alpha T - q_r r)h \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_1[h] = \int_a^b \rho r \left( \left( \frac{\sigma_u(r)}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) dr = 0$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 Q(a) = \eta_1$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 Q(b) = \eta_2$$

Вариация толщины:

$$h_1(r)$$

$$h_2(r) = h_1(r) + v(r)$$

$$\delta F[v] = 2\pi \int_a^b \rho r v dr = \int_a^b w v dr$$

$$w = 2\pi \rho r$$

$$\delta F_1[v] \approx \int_a^b \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial \Phi_1}{\partial h} v \right) dr$$

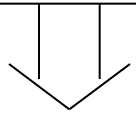
Уравнение в вариациях:

$$[J] \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta Q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h} \end{Bmatrix} \delta h = 0$$

$$\alpha_1 \delta u(a) + \beta_1 \delta Q(a) = 0$$

$$\alpha_2 \delta u(b) + \beta_2 \delta Q(b) = 0$$

$$\int_a^b \{ \delta x \}^T [J]^* \{ \psi \} dr + \int_a^b \left[ \frac{\partial f_1}{\partial h} \quad \frac{\partial f_2}{\partial h} \right] \{ \psi \} \delta h dr = 0$$



Сопряженная задача:

$$[J]^* \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q} \end{Bmatrix}$$

$$[J]^* = \begin{bmatrix} -\frac{d}{dr} + \frac{\mu}{r} & -\frac{Eh}{r} \\ -\frac{1-\mu^2}{Erh} & -\frac{d}{dr} - \frac{\mu}{r} \end{bmatrix}$$

$$-\beta_1 \psi_1(a) + \alpha_1 \psi_2(a) = 0$$

$$-\beta_2 \psi_1(b) + \alpha_2 \psi_2(b) = 0$$

$$\delta F_1[v] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial h} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial h} \psi_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial h} \right\} v(r) dr = \int_a^b w_1(r) v(r) dr$$

$$w_1(r) = \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial h}, \frac{\partial f_2}{\partial h}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial h} \right\} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

# Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

Задача нахождения минимума линейного функционала:

$$F[h_1] + \delta F[v] = 2\pi \int_a^b \rho h_1(r) r dr + \int_a^b w(r) v(r) dr = C + \int_a^b w(r) v(r) dr \rightarrow \min,$$

$$F_1[h_1] + \int_a^b w_1(r) v(r) dr = 0,$$

$$\int_a^b (v(r))^2 dr - \varepsilon^2 = 0,$$

$$v(r) = \frac{1}{\gamma} \left( -w + \frac{\int_a^b w w_1 dr}{\int_a^b w_1^2 dr} w_1 \right) - \frac{F_1}{\int_a^b w_1^2 dr} w_1$$

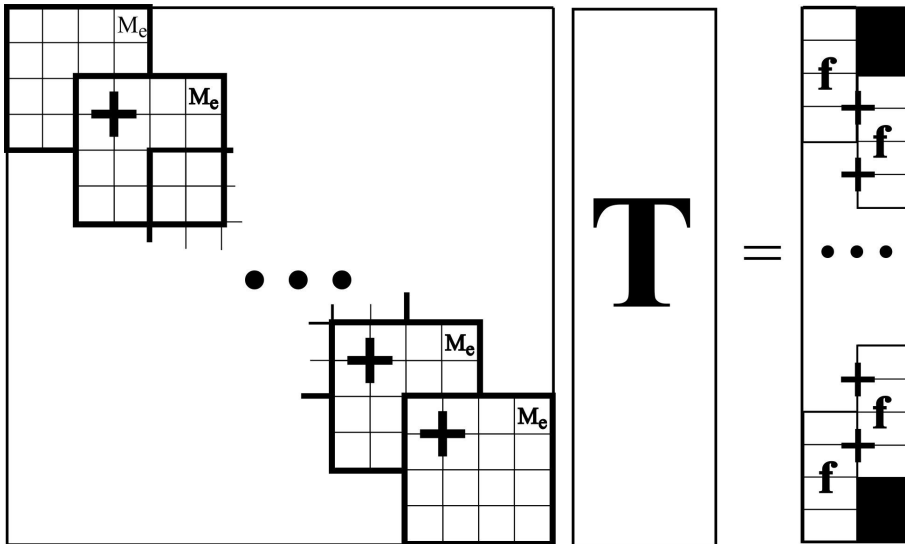
# Методы расчета диска

## МКЭ

$$\int_a^b R\{\omega\} = \int_a^b \left( [J] \left\{ \frac{u}{Q} \right\} + \left\{ \frac{c_1}{c_2} \right\} \right) \{\omega\} dr = 0$$

$$\sum_{e=1}^N \{\omega\} \int_e^{e+1} [N]^T [N] dr [T] - \sum_{e=1}^N \{\omega\} \int_e^{e+1} [N]^T [D] [N] dr [T] = - \sum_{e=1}^N \{\omega\} \int_e^{e+1} [N]^T [f] dr$$

$$[M_e]_{4 \times 4} = [M_1]_{4 \times 4} - [M_2]_{4 \times 4} \quad \left\{ \frac{u}{Q} \right\} = T$$



## МКР

$$\begin{Bmatrix} u(b) \\ Q(b) \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u(b) \\ Q(b) \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

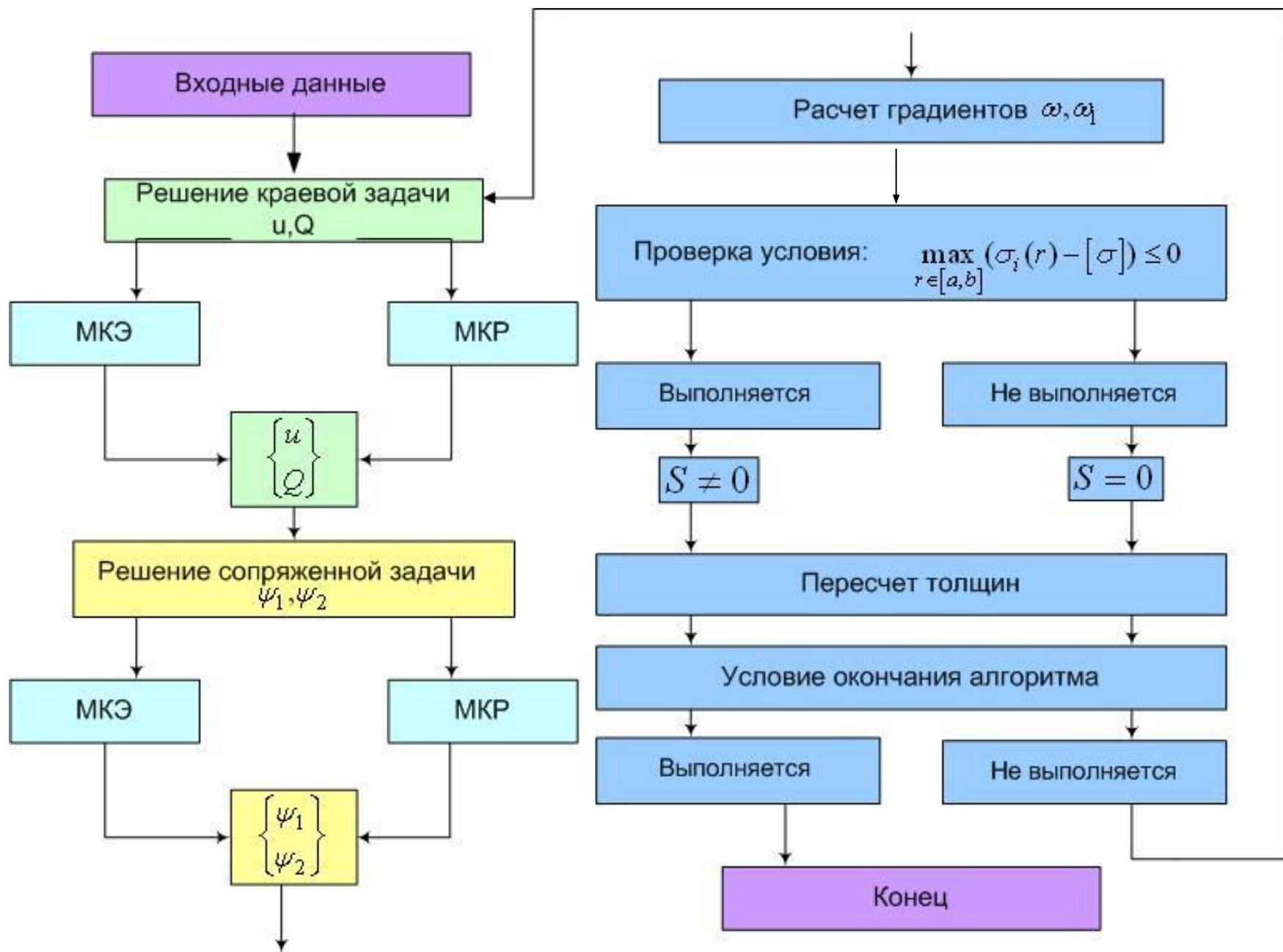
$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u(b) \\ Q(b) \end{Bmatrix}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha(1 + \mu) \\ (-E\alpha T - q_r r)h \end{Bmatrix}$$

Общее решение системы:

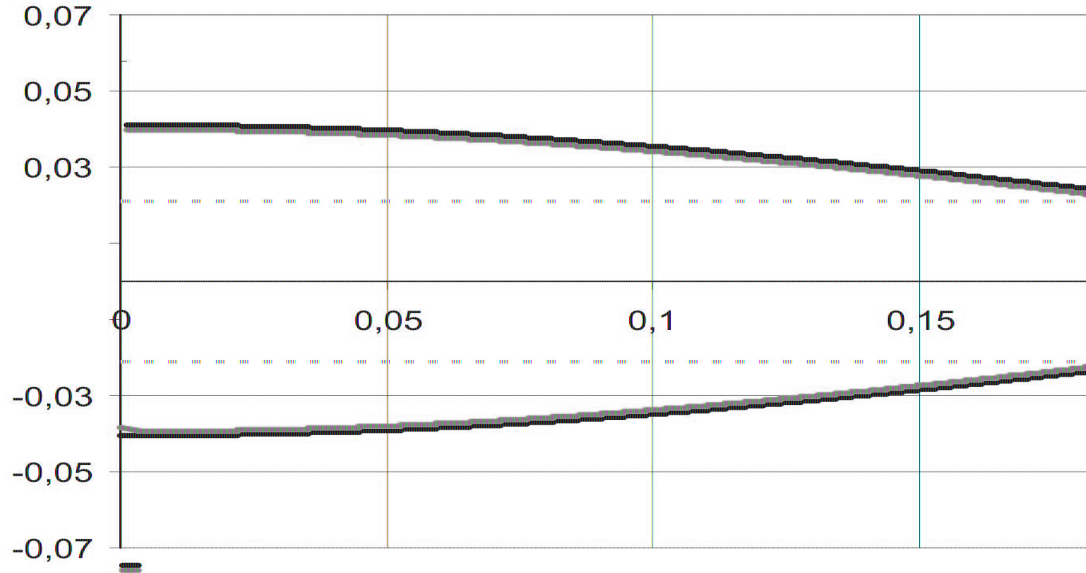
$$\begin{Bmatrix} u \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(r) \\ Q(r) \end{Bmatrix}^{(0)} + \sum_{k=1}^2 C_k \begin{Bmatrix} u(r) \\ Q(r) \end{Bmatrix}^{(k)}$$

# Описание программного комплекса

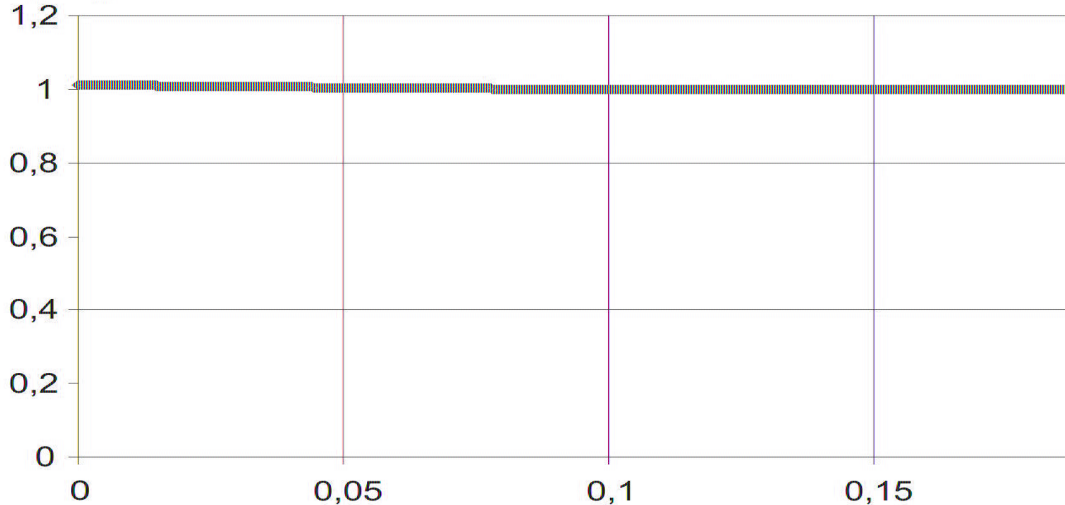




толщина, м



$\sigma / [\sigma]$



## Равнопрочный диск:

Аналитическое решение

$$h(r) = h_c e^{\frac{\rho \omega^2}{2\sigma} (c^2 - r^2)}$$

Параметры диска

$$R_a = 0$$

$$R_b = 0.22$$

$$\omega = 500 \text{ рад / с}$$

$$EI \# a201$$

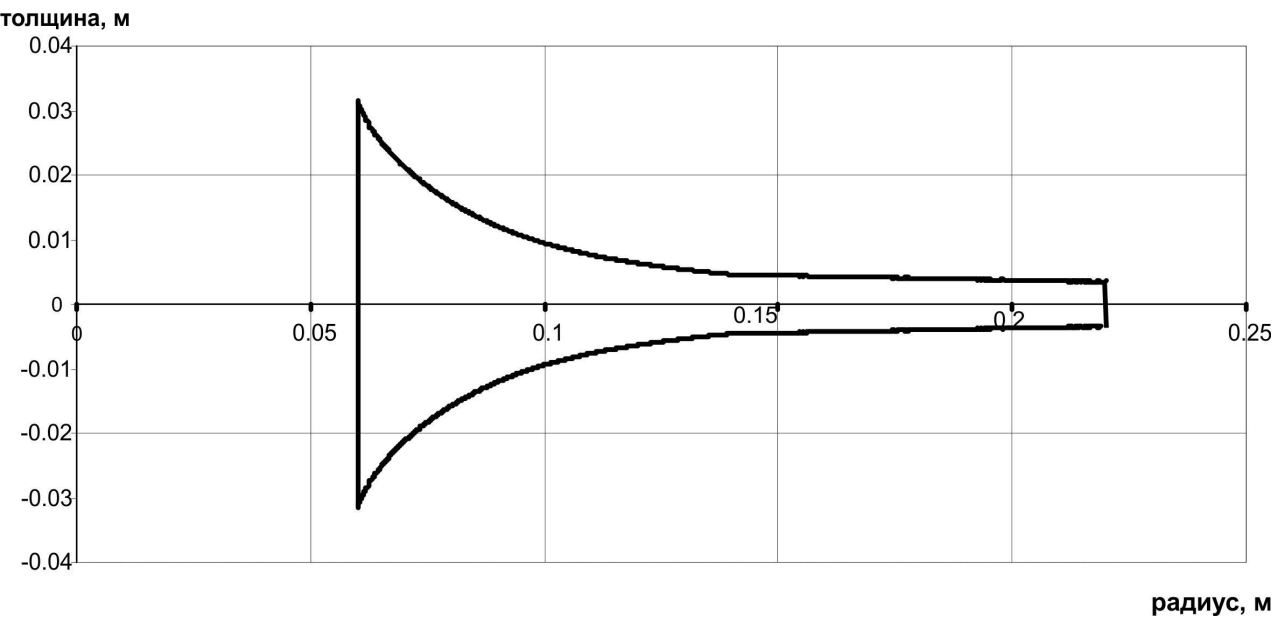
$$\rho = 8300 \text{ кг / м}^3$$

$$\mu = 0.28$$

$$h_0 = 0.04$$

— аналитическое решение  
 — расчетное решение

# Результаты расчетов



Расчет диска с ограничением по величине напряжений

Параметры диска

$$R_a = 0.06$$

$$R_b = 0.22$$

$$\omega = 500 \text{ рад} / \text{с}$$

EN201

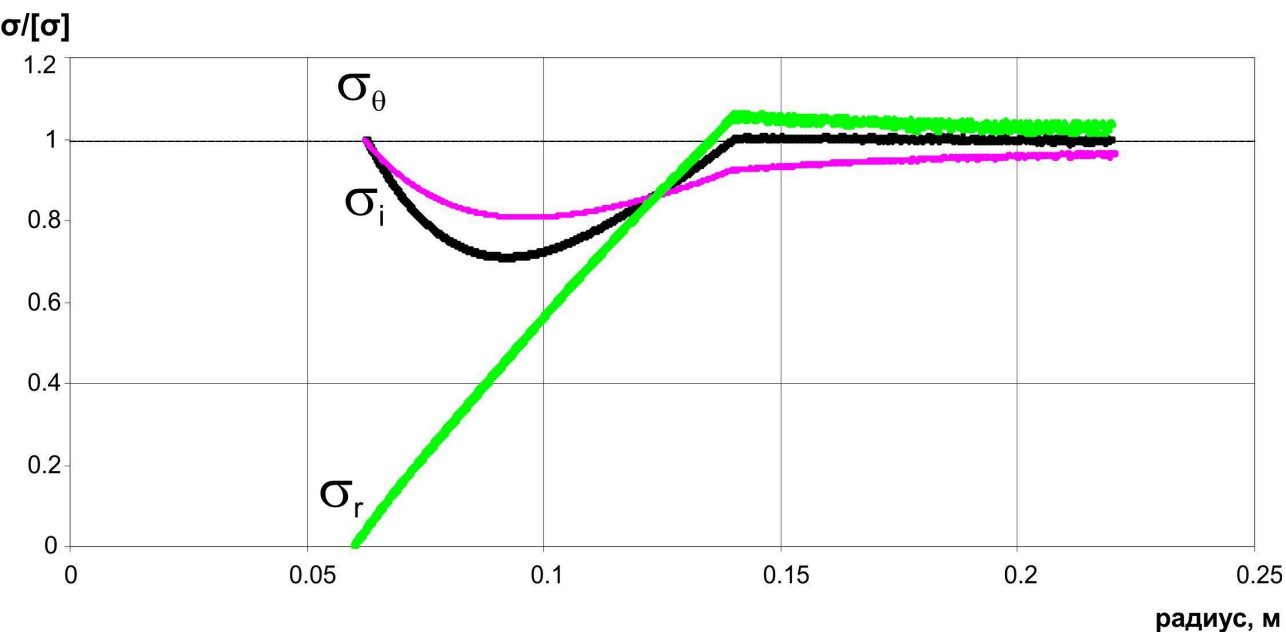
$$\rho = 8300 \text{ кг} / \text{м}^3$$

$$\mu = 0.28$$

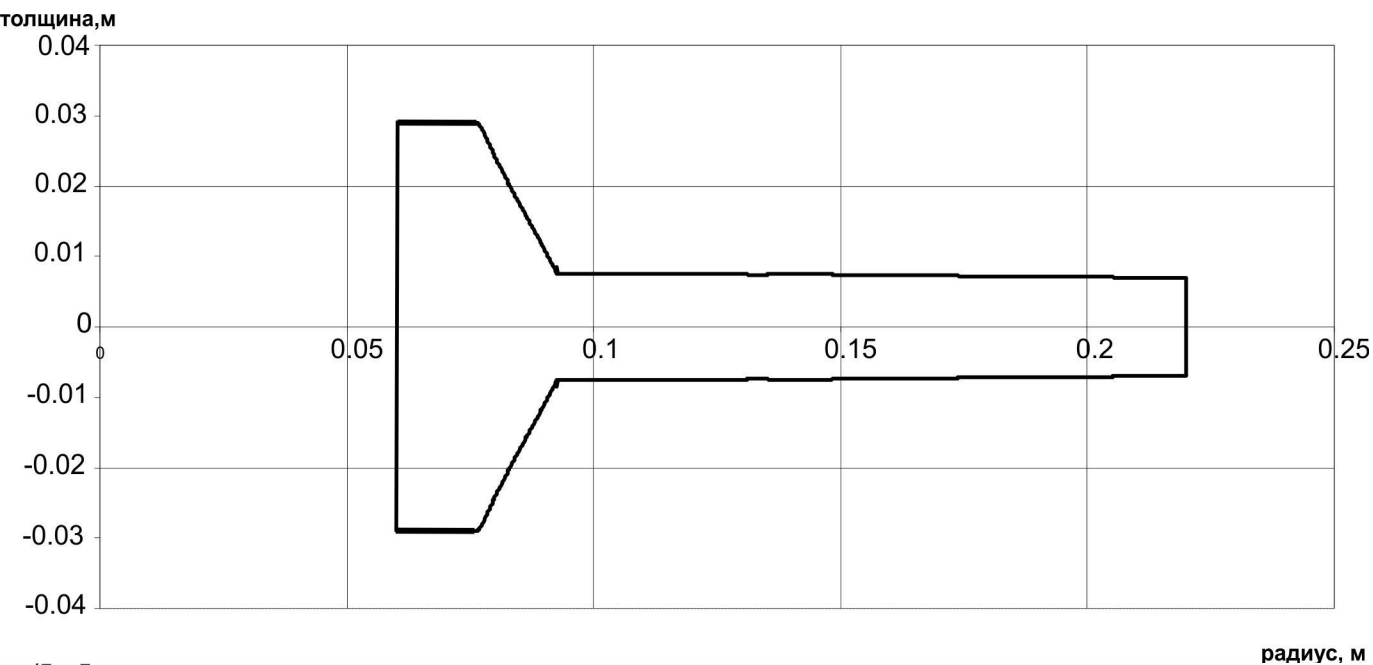
$$h_0 = 0.04$$

$$\sigma_{rb} = 350 \text{ МПа}$$

$$[\sigma] = 500 \text{ МПа}$$



# Результаты расчетов



Расчет диска с ограничением по величине напряжений

Параметры диска

$$R_a = 0.06$$

$$R_b = 0.22$$

$$\omega = 500 \text{ рад} / \text{с}$$

$$EI \neq 201$$

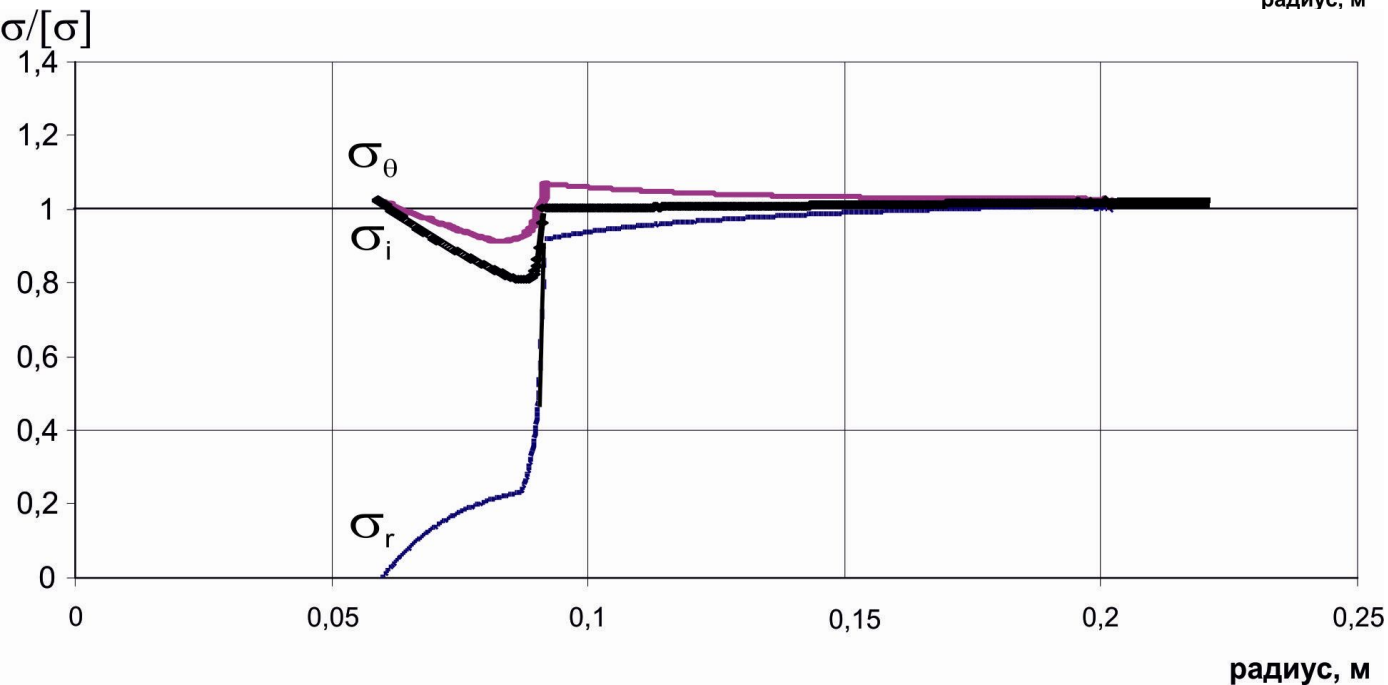
$$\rho = 8300 \text{ кг} / \text{м}^3$$

$$\mu = 0.28$$

$$h_0 = 0.04$$

$$\sigma_{rb} = 350 \text{ МПа}$$

$$[\sigma] = 500 \text{ МПа}$$



# Заключение

- Решена задача оптимизации вращающегося осесимметричного диска методом чувствительности, что позволило сократить время расчета в задаче оптимального проектирования.
- Реализован алгоритм метода чувствительности, метода конечных элементов и метода конечных разностей.
- Решена задача оптимизации диска методом чувствительности с введением дополнительных ограничений на максимальную (или минимальную) ширину диска.
- В ходе выполнения работы написаны программы метода чувствительности для оптимизации диска.

**Спасибо за внимание!**