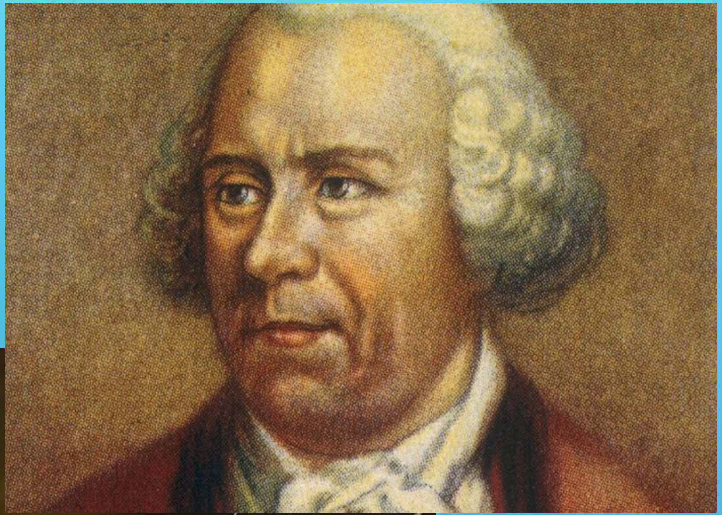
МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИБКОГО КОЛЬЦА ПРИ НЕГОЛОНОМНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

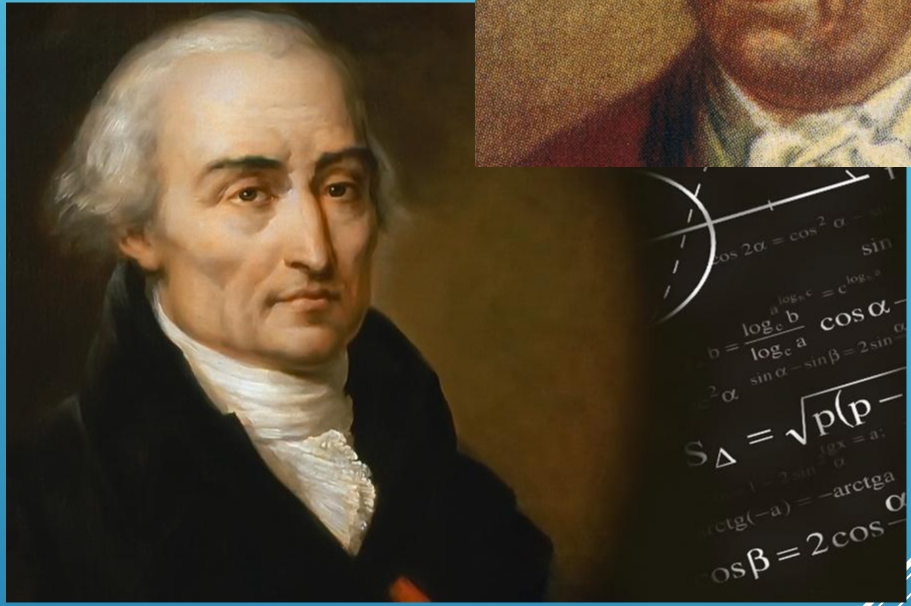
к.т.н. Котлов Вадим Михайлович

ГосНИИАС г. Москва

Зарождение динамики *неголономных систем*, по-видимому, следует отнести к тому времени, когда аналитический формализм, созданный трудами Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, оказался,

к всеобщему удивлению, неприменимым к очень простым механическим задачам о качении без проскальзывания твердого тела по плоскости.





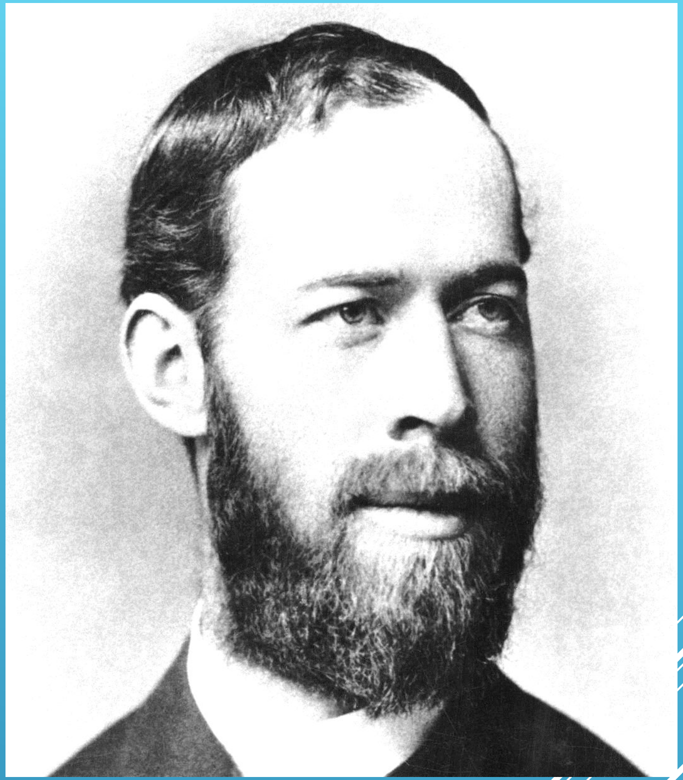
Только в 1894 г.

в книге «Принципы механики, изложенные в новой связи»

(через 106 лет после труда Лагранжа «Аналитическая механика» в 1788 году)

Генрих Герц **ввел разделение**

связей и механических систем на голономные и неголономные



.

К настоящему времени динамика неголономных систем оформлена как самостоятельная часть общей динамики механических систем-находит широкое применение в задачах современной техники, таких как движения автомобиля, самолетного шасси, железнодорожного колеса.

А ее методы активно используются в теории электрических машин

Достаточно полное изложение задач и методов неголономной механики представлено в монографии Ю. И.Неймарка, Н.А.Фуфаева "Динамика неголономных

Условия голономные и неголономные.

Условия (они же ограничения), накладываемые на движение механической системы разделяют как *потенциальные*:

- накладываются на координаты

$$(1)\quad f[x,y]=0$$

так и *кинематические:*

- накладываются на скорости (или компоненты скорости)

$$f[x,y,\dot{x},\dot{y}]=0$$

Условия голономные и неголономные.

Задача учета кинематических связей в нелинейном виде не разработана, в линейном виде **связь относительно** *скоростей* **выглядит следующим образом:**

$$(2)\ a_1 [x,y]\,\dot{x} + a_2 [x,y]\,\dot{y} = 0$$

что позволяет эту связь записать через дифференциалы

$$d[x] / d[t] = \dot{x},\ d[y] / d[t] = \dot{y},$$

как

$$(3)\ a_1[x,y]\cdot d[x] + a_2 [x,y]\cdot d[y] = 0$$

Условия голономные и неголономные.

Если дифференциальную связь (3) нельзя записать как полный дифференциал некоторой функции

$$d[F[x,y]] \neq a_1[x,y]\cdot d[x] + a_2[x,y]\cdot d[y]$$

То такая связь называется неинтегрируемой (неголономной), а механическая система с такой связью- неголономной системой. Соответственно, система с голономной связью – голономной.

Метод составления уравнений динамики механической системы при наложении различных типов условий на переменные

Для голономных связей: Лгранжем предложены два метода:

1)использование функции связи как новой переменной-
(приводит к уменьшение общего числа переменных)

2) метод «множителей Лагранжа»,
 (вводит условия через множители Лагранжа, которые физически представляют собой силы, обеспечивающие выполнение этих условий).

Методы составления уравнений динамики механической системы при наложении различных типов условий на переменные

СЧИТАЕТСЯ что, **неголономные связи** допускают лишь второй способ составления уравнений динамики-метод множителей Лагранжа.

ПОЛАГАЕТСЯ, что уменьшение числа переменных здесь невозможно, потому что нет уравнений, с помощью которых можно бы выразить одни переменные через другие и приходится оперировать с большим количеством переменных, чем того требует число степеней свободы системы

НОВЫЙ МЕТОД

Однако, способ уменьшения числа переменных вводя кинематические условия как новые переменные давно предложен А. Пуанкаре и Э. Картаном.

Картаном введена математическая конструкция , названная им ***интегральный инвариант динамики второго порядка (либо тензор "количество движения- энергии")***

НОВЫЙ МЕТОД

Указанное выражение получается совершенно естественно при вычислении вариации интеграла действия Гамильтона.

В современных обозначениях:

$$d\Omega = d[x1]\wedge d[x] - d[H]\wedge d[t]$$

где

$\wedge$- внешнее умножение дифференциалов

x- координата

x1-скорость,

H=T+U- гамильтониан,

t- время

НОВЫЙ МЕТОД

Поскольку из этого дифференциального инварианта следует система уравнений движения - любой механической системы, а сам дифференциальный инвариант состоит из дифференциальных форм, то введение ограничений, как на сами кинематические переменные, так на их дифференциалы могут быть проведены в рамках самого интегрального инварианта

НОВЫЙ МЕТОД

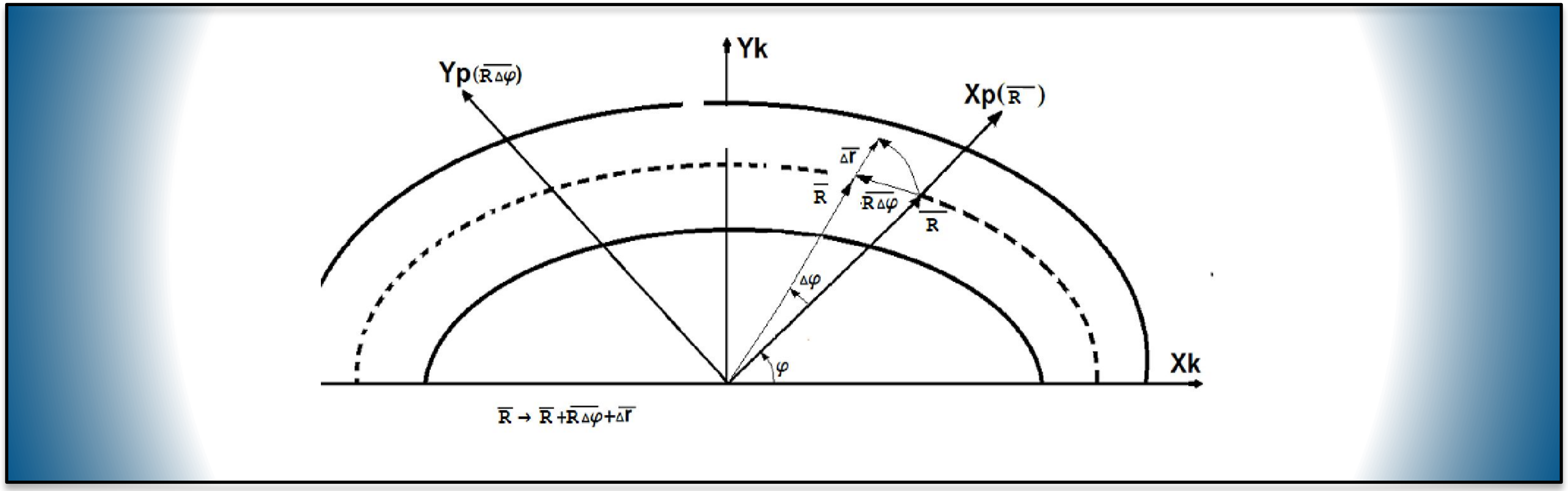
В случае использования интегрального инварианта механики по Картану, введение ограничений на переменные механической системы (как голономные, так и неголономные) приводит к уменьшению числа независимых переменных.

Таким образом, применение интегрального инварианта механики соответствует способу введения ограничений на переменные, как новых переменных, приводящее к уменьшению числа степеней свободы механической системы, что соответствует методу Лагранжа по замене переменных.

Применение нового метода к составлению уравнений динамики волнового твердотельного гироскопа

(по В.Ф. Журавлеву, Д.М. Климову)

Волновой твердотельный гироскоп моделируется как **упругое гибкое кольцо**



Динамика упругого кольца описывается функцией Лагранжа L :

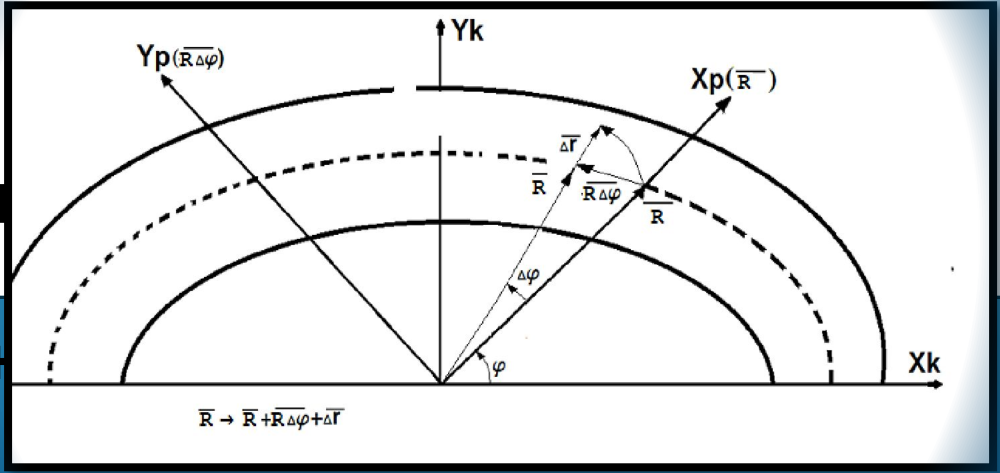
$$L=1/2\ ((v1+(R-w)\ \Omega)^2+(w1+v\ \Omega)^2)-1/2\ \kappa 1^2\ (wss+vs\ )^2-$$
$$-(1/2\ )\ \delta 1^2\ (vs\ -w)^2$$

при наложении условия нерастяжимости средней линии кольца:

$$(vs+R-w)^2+(ws+v)^2=R^2$$

где, (w, v)-деформации кольца вдоль радиуса и образующей

(w1,s v1,s)-скорость их изменений по времени и по коор. соответствен



Новые соотношения для гибкого кольца

•

Если пренебречь потенциальной энергией, то эффект инертных свойств упругой деформацией гибкого кольца следует из оставшейся кинематической энергии:

L=1/2 ((v1+(R-w) Ω)^2+(w1+v Ω)^2)

Если не пренебрегать потенциальной энергией, то новый метод даст следующие соотношения:

d[SID]us= 1/Ω^2 (1/2 d[Ω^2 rψ^2+Ω^2 vψ^2]-((R+r)^2+v^2) d[Ω^2/2])∧d[ψ]∧d[φ]+ +κ1^{2}d[r+rss]∧(d[R Q]-(r+rss) d[φ])∧d[t]=0

Анализ приближений условий нерастяжимости средней линии на основе НОВОЙ формы нерастяжимости:

$$vs+R-w\to R\,Cos[Q],\ -ws-v\to R\,Sin[Q]$$

приводит, к тому, что изменение потенциальной энергии

$$П2=1/2\ \ к1^2\ (-rss+vs)^2$$

не происходит; остается только влияние кинетической энергии, искаженной условием нерастяжимости:

$$1/2\ d[\Omega^2\ r\psi^2+\Omega^2\ v\psi^2]-((R+r)^2+v^2)\ d[\Omega^2/2]=0$$

Таким образом, получено уравнение для гибкого кольца, моделирующее ВТГ.

Вывод

Эффект инертных свойств упругой деформацией гибкого кольца следует из уравнений кольца и в случае когда потенциальной энергией можно пренебречь.

В рамках приближений, введенных авторами книги, влияние нерастяжимости средней линии гибкого кольца приводит к пренебрежению изменениями потенциала,остается только влияние кинетической энергии, искаженной условием нерастяжимости, которое удовлетворяет уравнению:

ВЫВОД

$$1/2\ d[\Omega^2\ r\psi^2+\Omega^2\ v\psi^2]-((R+r)^2+v^2)\ d[\Omega^2/2]=0$$

или

$$((R+r)^2+v^2)\ d[\Omega^2/2]=1/2\ d[r1^2+v1^2]$$

подобному уравнению термодинамики :

$$T\ dS=dU+P\ dV$$

$T\ dS=dQ$- поток тепла

$$d[S]=dQ/T$$

где

$\Omega^2/2$-подобна энтропии ,(r^2+v^2)-подобна температуре

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Картан Э.Д. Интегральные инварианты М.: 1922 г.

2. Суслов Г.К. Теоретическая механика, (издание 3), М : Л : ГИТТЛ, 1946 г.

3..Чаплыгин С.А. Исследования по динамике НЕГОЛОНОМНЫХ систем, М.:1949 г.

4. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем, М.: 1967 г.

5. Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М. Теоретичекая механика в решениях задач (из сборника Мещерского И.В. Системы с качением. Неголономные связи), М.: 2009 г.

6. Журавлев В.Ф. , Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп, М.: 1985 г.

Котлов Вадим Михайлович

vadimkot366@yandex.ru