Функция
$y = \cos x$
её свойства и график

Цель:

Изучить функцию **y = cos x**

Задачи:

1. Изучить свойства функции **y = cos x**.
2. Уметь применять свойства функции **y = cos x** и читать график.
3. Формировать практические навыки построения графика функции **y = cos x** на основе изученного теоретического материала.
4. Закрепить понятия с помощью выполнения заданий.

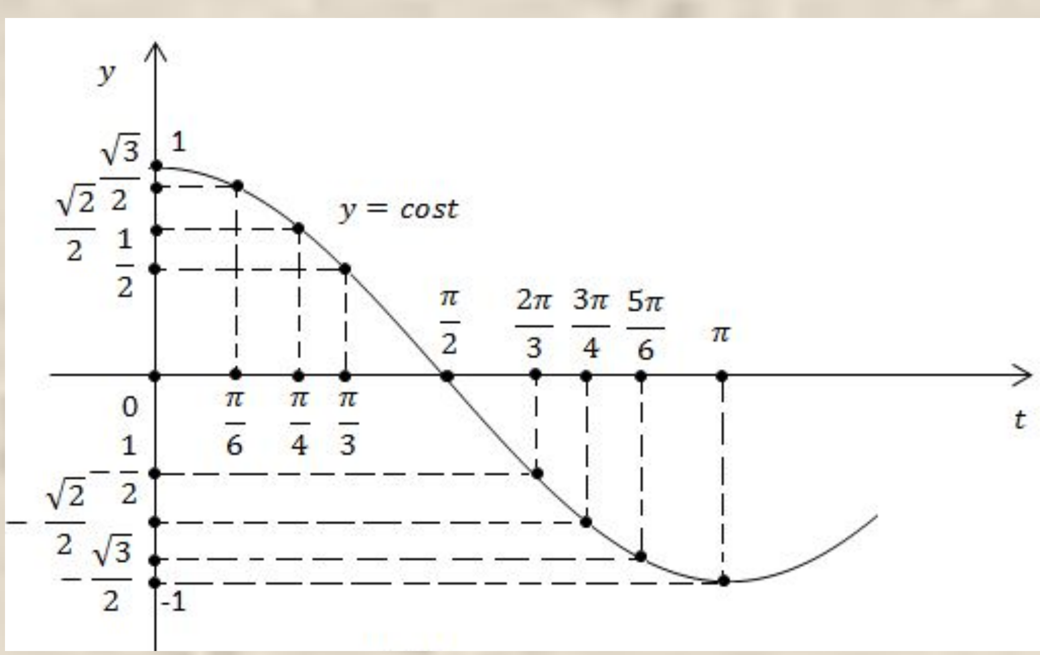
Функция **$y = \cos x$** определена на всей числовой прямой, и множеством её значений является отрезок $[-1;1]$.

Следовательно, график этой функции расположен в полосе между прямыми **$y = -1$ и $y = 1$.**

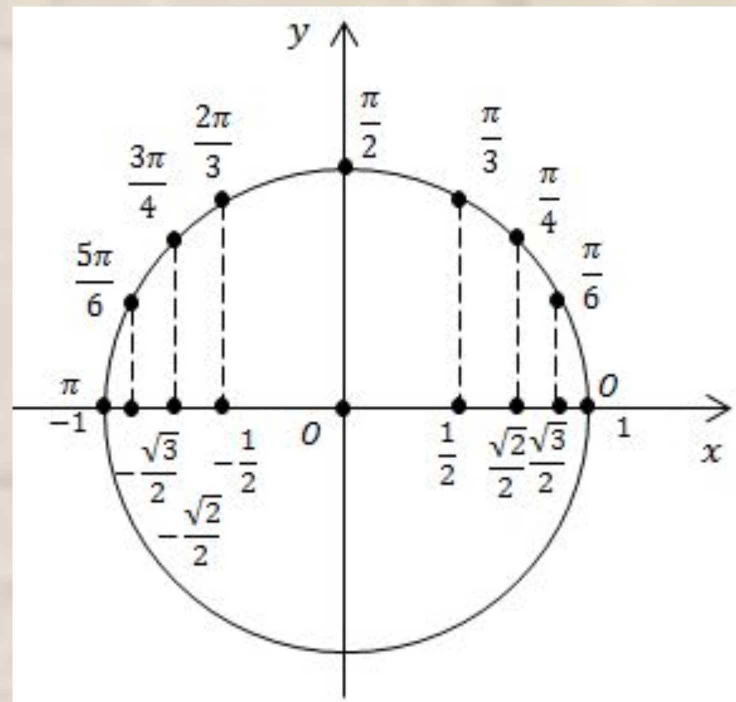
Так как функция **$y = \cos x$** периодическая с периодом **2π**, то достаточно построить её график на каком-нибудь промежутке **длиной 2π**, тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка **на $2\pi n$, $n \in Z$,** график будет таким же.

Рассмотрим поведение функции и отметим важнейшие точки на промежутке [0;π]

В координатной плоскости



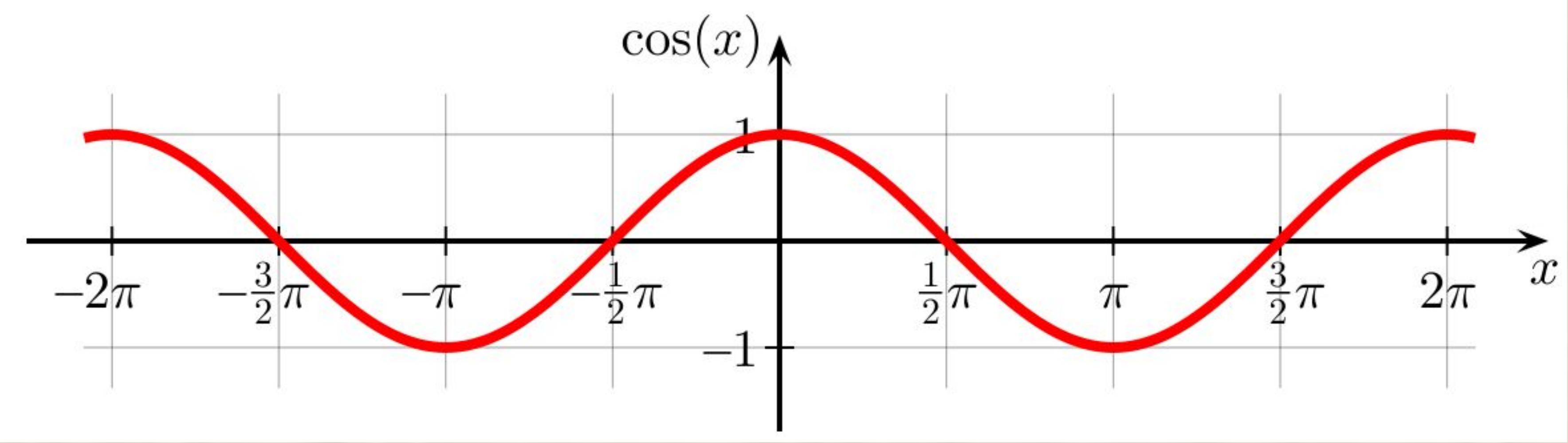
На числовой окружности



Функция **y = cos x** является чётной. Поэтому её график симметричен относительно оси ОУ

Для построения графика на отрезке **- π≤x≤π** достаточно построить его для **0≤x≤π**, а затем симметрично отразить его **относительно оси ОУ**

График функции y = cos x



Кривая, являющаяся графиком функции **y=cos x,** называется **косинусоидой**.

Свойства функции y = cos x

1. Область определения — множество R всех действительных чисел. **D(y) = (-∞; + ∞)**

2. Множество значений **E(y) = [−1;1]**

3. Функция периодическая с периодом **T= 2π**.

4. Функция чётная **cos(-x) = cos x**

(график симметричен относительно оси ОУ).

5. Функция ограничена и сверху, и снизу.

6. Функция y=cos x принимает:

- значение, равное **0**, при **$x=\pi/2+\pi n, n\in Z$;**
- наибольшее значение, равное **1**, при **$x=2\pi n, n\in Z$**;
- наименьшее значение, равное **−1**, при **$x=\pi+2\pi n, n\in Z$;**

7. Промежутки, на которых функция принимает положительные значения при

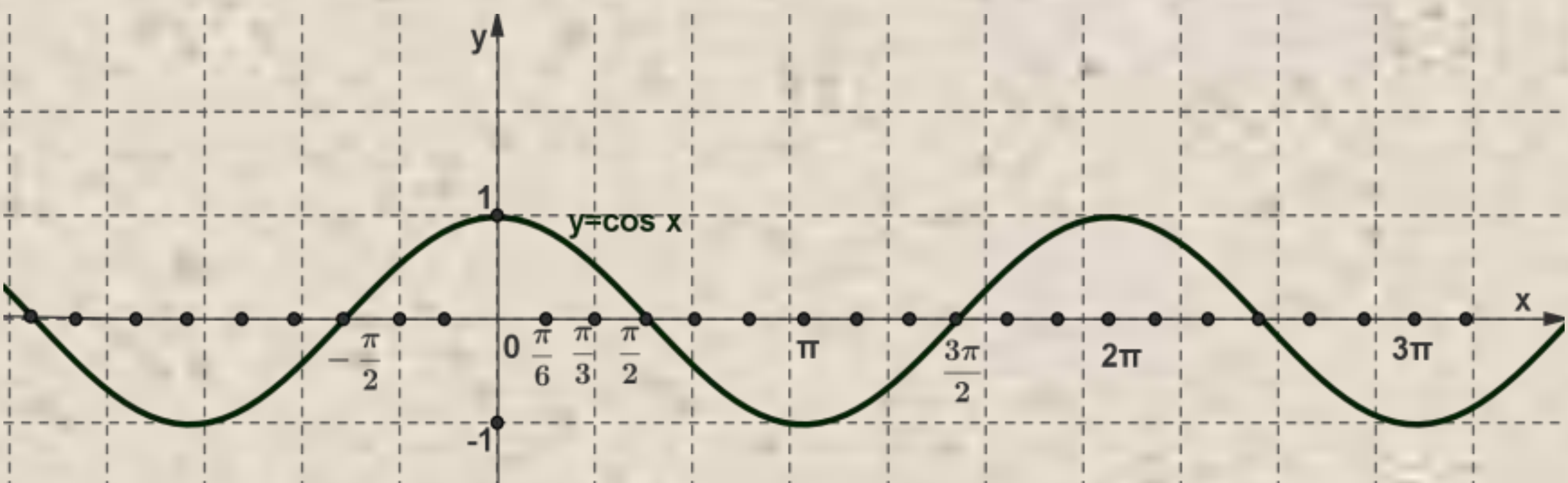
$x \in (-\pi/2+2\pi n;\ \pi/2+2\pi n),\ n \in Z$

Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения при

$x \in (\pi/2+2\pi n;\ 3\pi/2+2\pi n),\ n \in Z$

8. Функция возрастает на $x \in [\pi + 2\pi n;\ 2\pi n],\ n \in Z$

функция убывает на $x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in Z$



Решение задач

Задача №1

Найти пределы изменения функции y = cos t на данном отрезке [π/6; π/2]

Решение

Функция монотонно убывает на указанном промежутке, значит, наибольшее значение принимает на левом конце отрезка y(π/6)=√3/2, а наименьшее значение принимает на его правом конце y(π/2) = 0

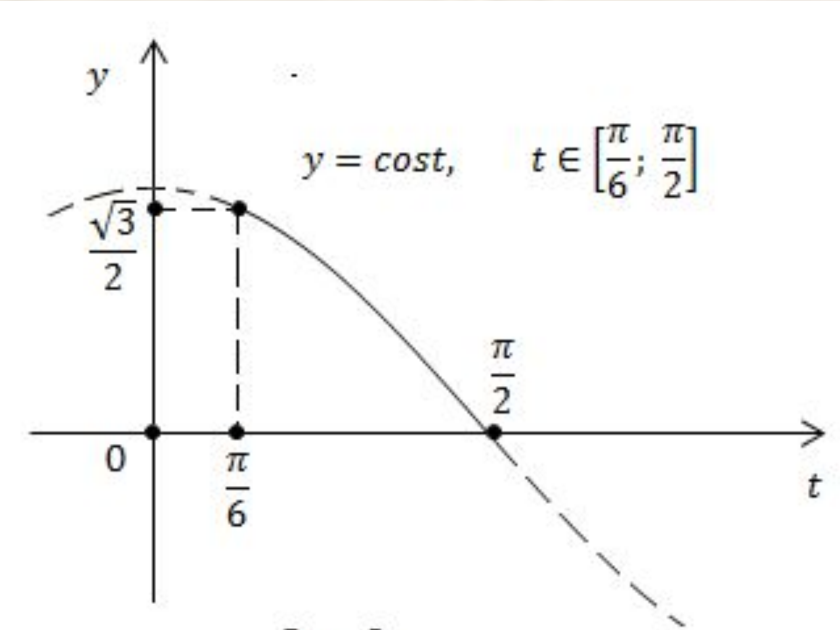


Рис. 3

Задача №2

Найти наибольшее и наименьшее значение функции y = cos t на данном отрезке [π/3; 7π/6]

Решение

На данном промежутке функция немонотонна.

Наибольшее значение принимает на левом конце отрезка y (π/3)=1/2, а наименьшее значение y(π) = -1

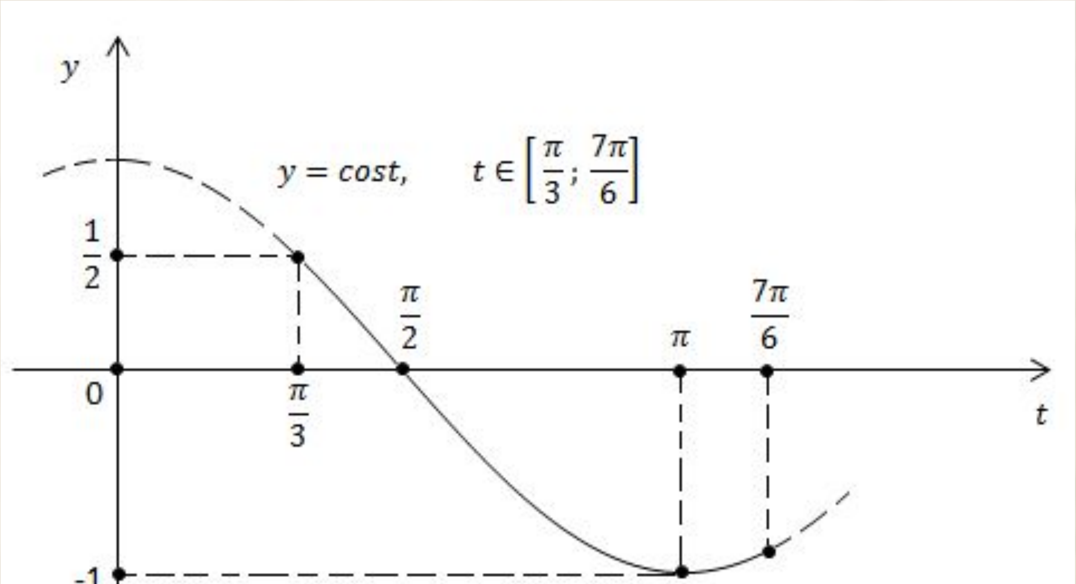


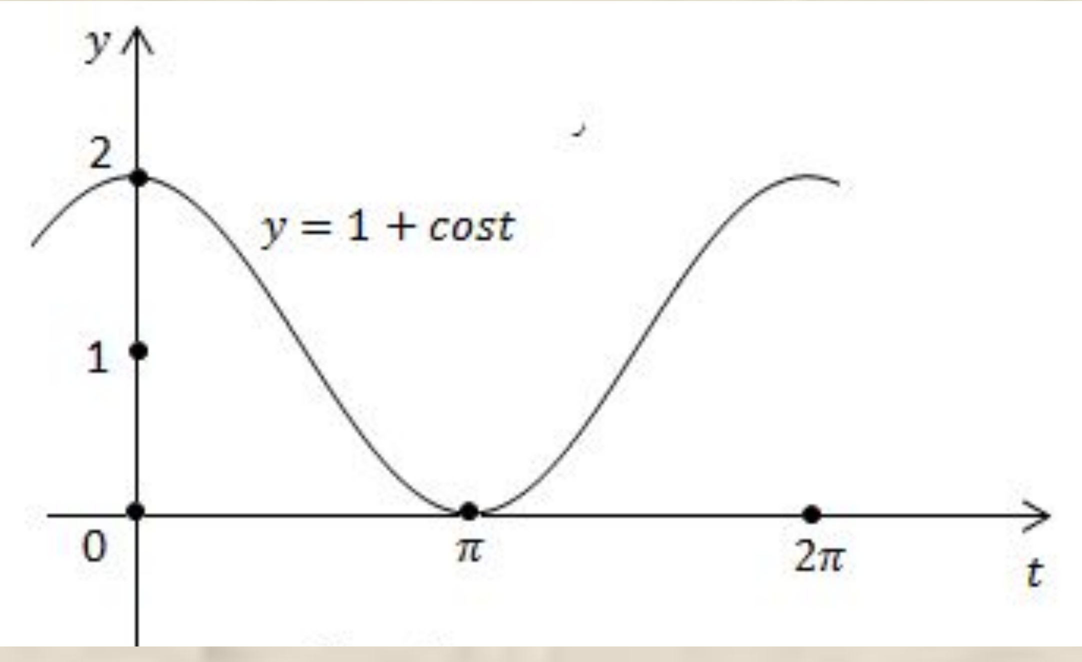
Рис. 5

Задача №3

Задача 2. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение: **$1 + \cos t = a$**

Решение

Построим график функции **$y = 1 + \cos t$**



Уравнение

$1 + \cos t = a$

имеет хотя бы одно решение при $a \in [0;2]$

В данном случае множество значений параметра совпадает со множеством значений функции.

Ответ: $a \in [0; 2]$

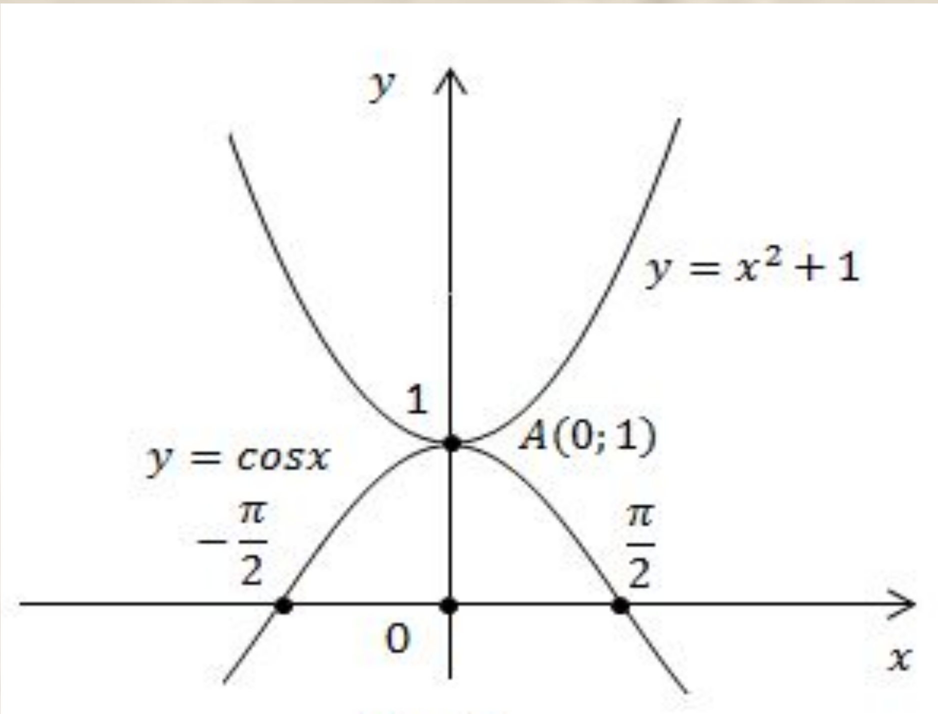
Задача №4

Решить уравнение $\cos x = x^2 + 1$

Решение

Построим в одних координатных осях графики функций

$$y = \cos x \quad и \quad y = x^2 + 1$$



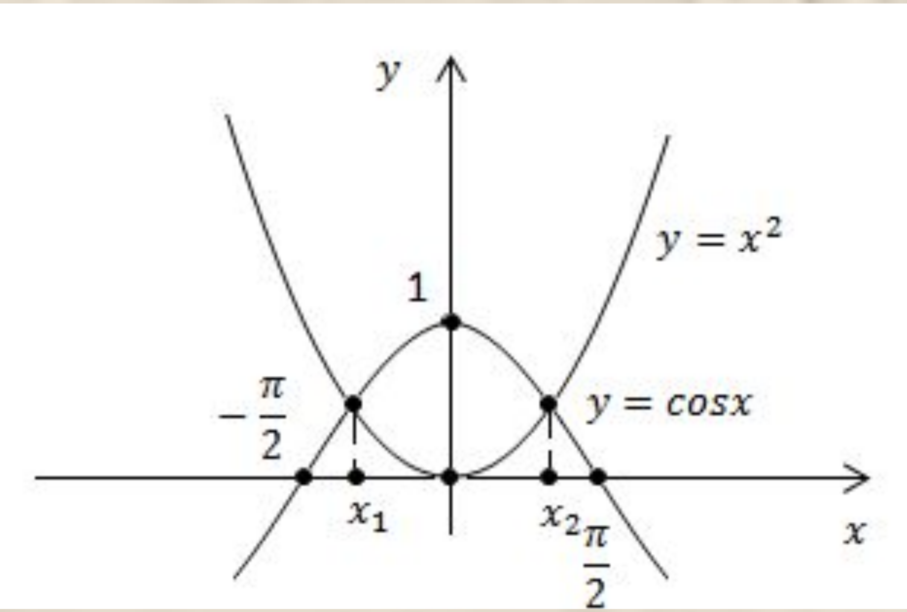
Графики имеют только одну общую точку A(0; 1)

Ответ: x=0

Задача №5

Найти число корней уравнения $x^2 = \cos x$

Решение



На промежутке [-π; 0] функция y=cosx монотонно возрастает, функция $y=x^2$ монотонно убывает. Это значит, что на данном промежутке графики имеют только одну общую точку.

На промежутке [0; π] функция y=cosx монотонно убывает, функция $y=x^2$ монотонно возрастает. Значит, и на этом промежутке графики имеют только одну общую точку.

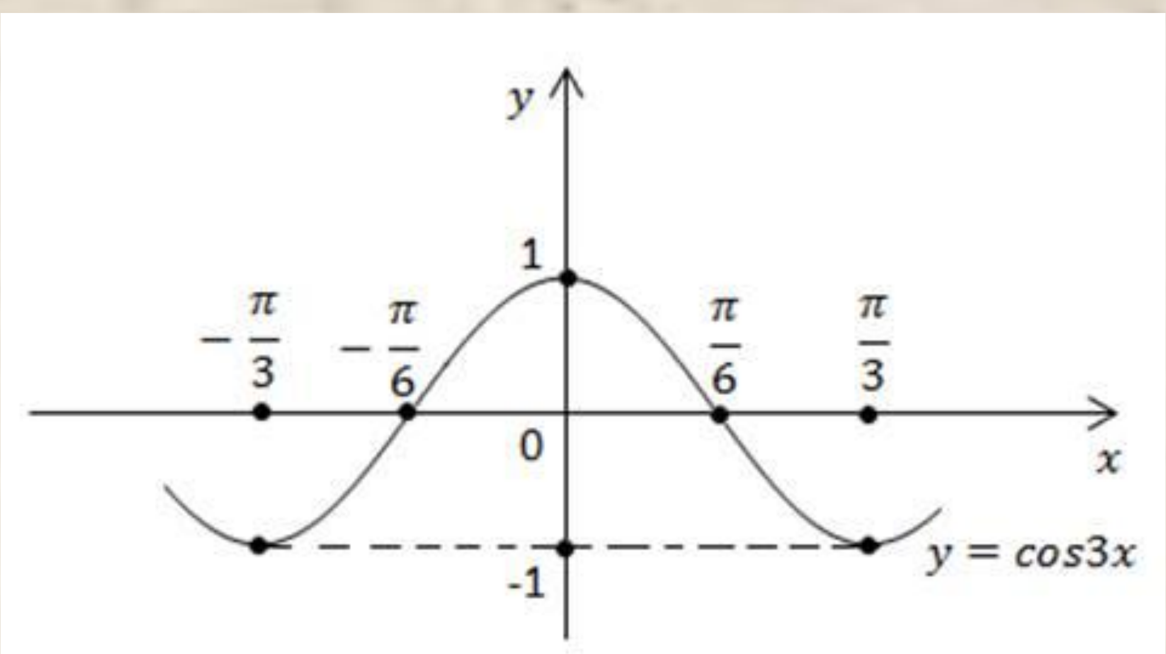
Ответ: два корня

Задача №5

Построить график функции y=cos3x

Решение

Косинус – четная функция, строим график на участке [0; π/3], затем симметрично отображаем относительно оси *y* и получаем график на промежутке [-π/3; π/3] длина которого равна периоду. График сжимается к оси Oy в 3 раза.



Задания для самостоятельного решения

1) Постройте графики функций

1) $y = \cos x + 1$;

2) $y = \cos x - 1$;

3) $y = \cos (x + \pi/2)$

4) $y = \cos (x - \pi/3)$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\cos (x)$ на отрезке $[0; 4\pi/3]$

3) Определить область значений функции $y=-8\cos x+3$.

4) Определить чётность или нечётность функции:

$f(x)=x5 \cdot \cos 6x$.

5) Определить, возрастает или убывает функция $y=\cos x$ на отрезке: $[-4\pi;-3\pi]$.

6) Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$y=\cos^4 2x-\sin^4 2x+4$.

7) Определить наименьшее и наибольшее значения функции $y=\cos x$ на полуинтервале $(-4\pi/3;-\pi/3]$.

Заключение.

Мы рассмотрели график функции
$y = \cos x$,
изучили особенности ее поведения,
использовали их и свойства функции при решении задач, в том числе и задач с параметром