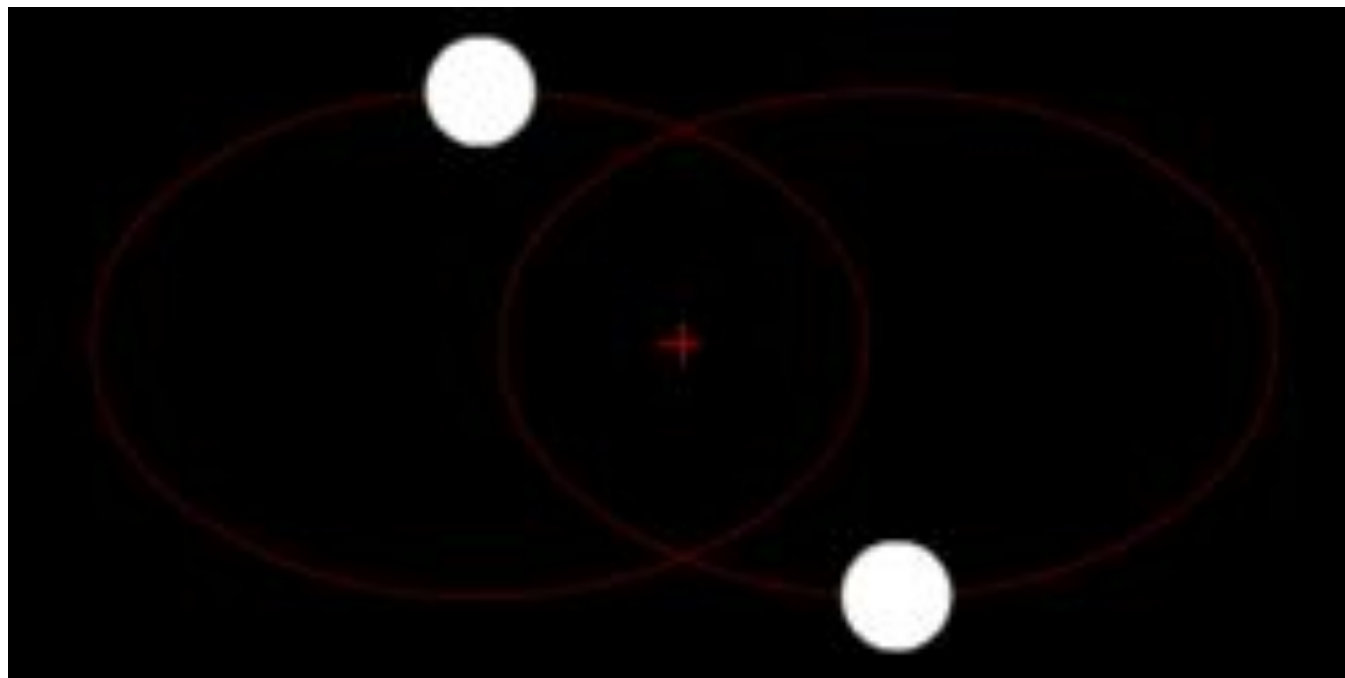
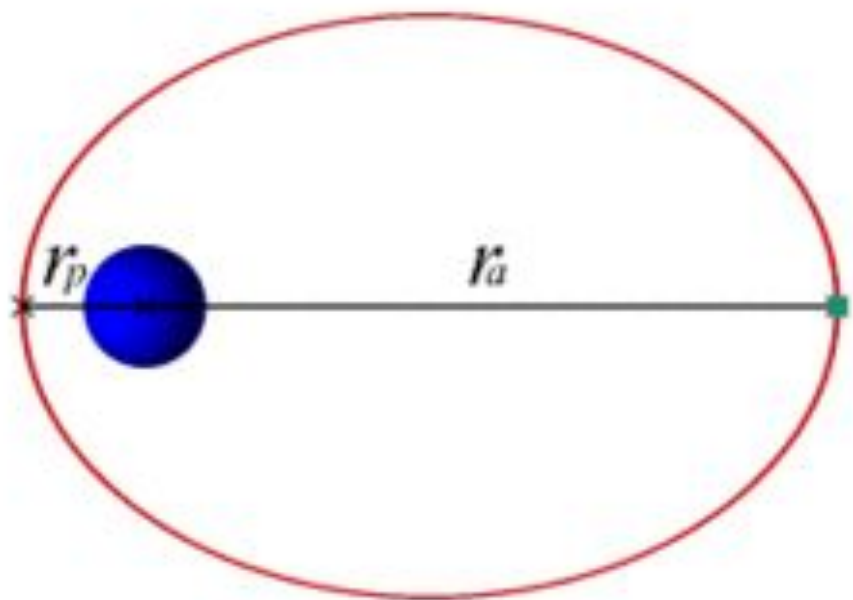


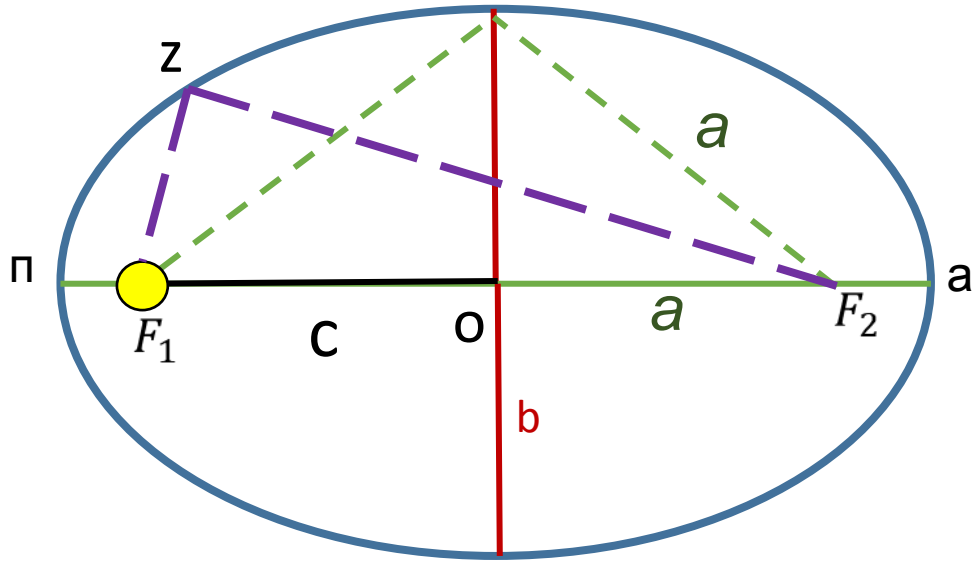
# Эллиптическая орбита

# Что это?

Эллиптическая орбита — орбита с эксцентриситетом  $0 < e < 1$ .



# Параметры, свойства и детали эллипса



$\text{п}F_1$  – перигелий

$aF_2$  – афелий

$a$  – большая полуось

$b$  – малая полуось

$c$  – фокальный параметр

$F_1, F_2$  – фокусы эллипса

$o$  – центр эллипса

$$a^2 = b^2 + c^2$$

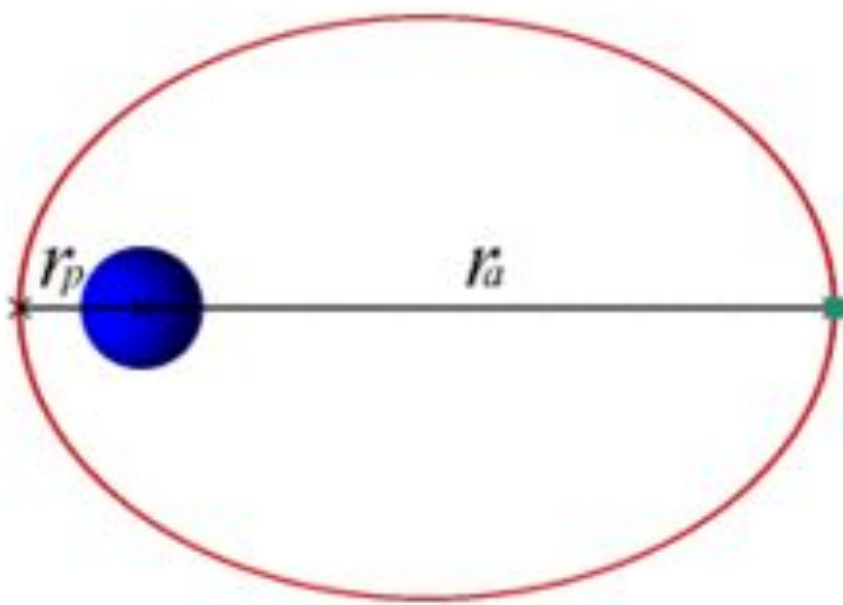
$$|zF_1| + |zF_2| = 2a$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$F_1o = F_2o = ae$$

$$\text{п}F_1 = a - c = a - ae = a(1 - e)$$

$$\text{п}F_2 = a + c = a + ae = a(1 + e)$$

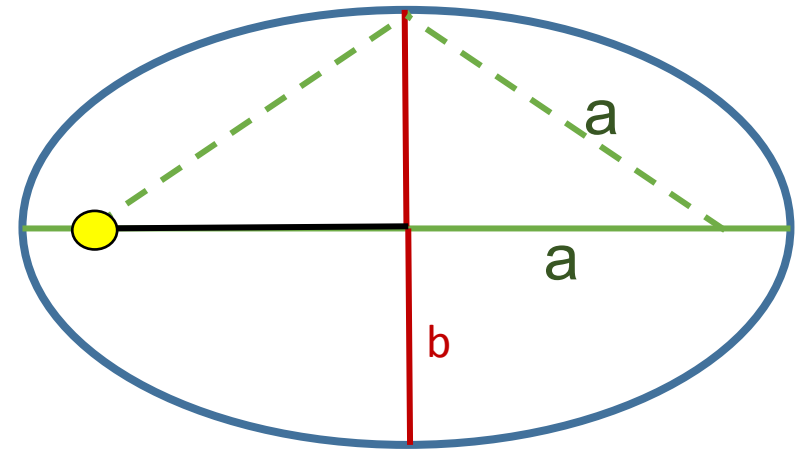


$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 1 - \frac{2}{\frac{r_a}{r_p} + 1}$$

$$e = \frac{c}{a}, \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

## Как считать e?



$aF_1$  – перигелий

$aF_2$  – афелий

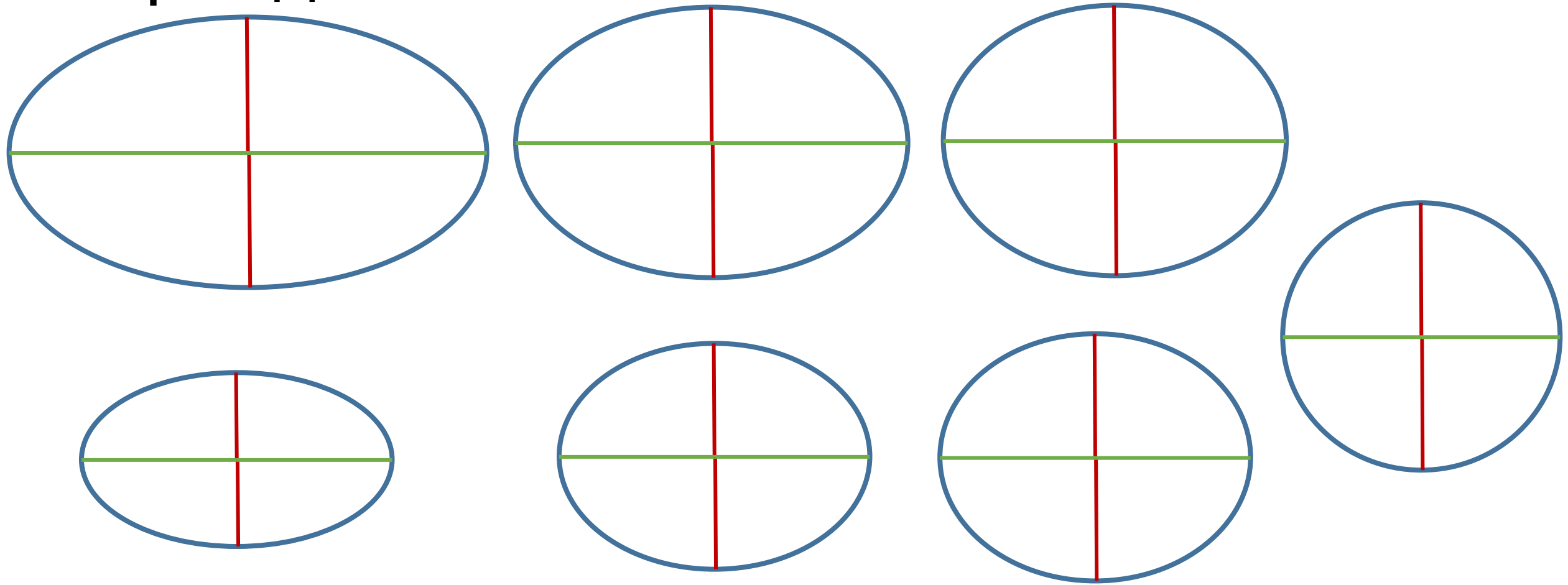
$a$  – большая полу ось

$b$  – малая полу ось

$c$  – фокальный параметр

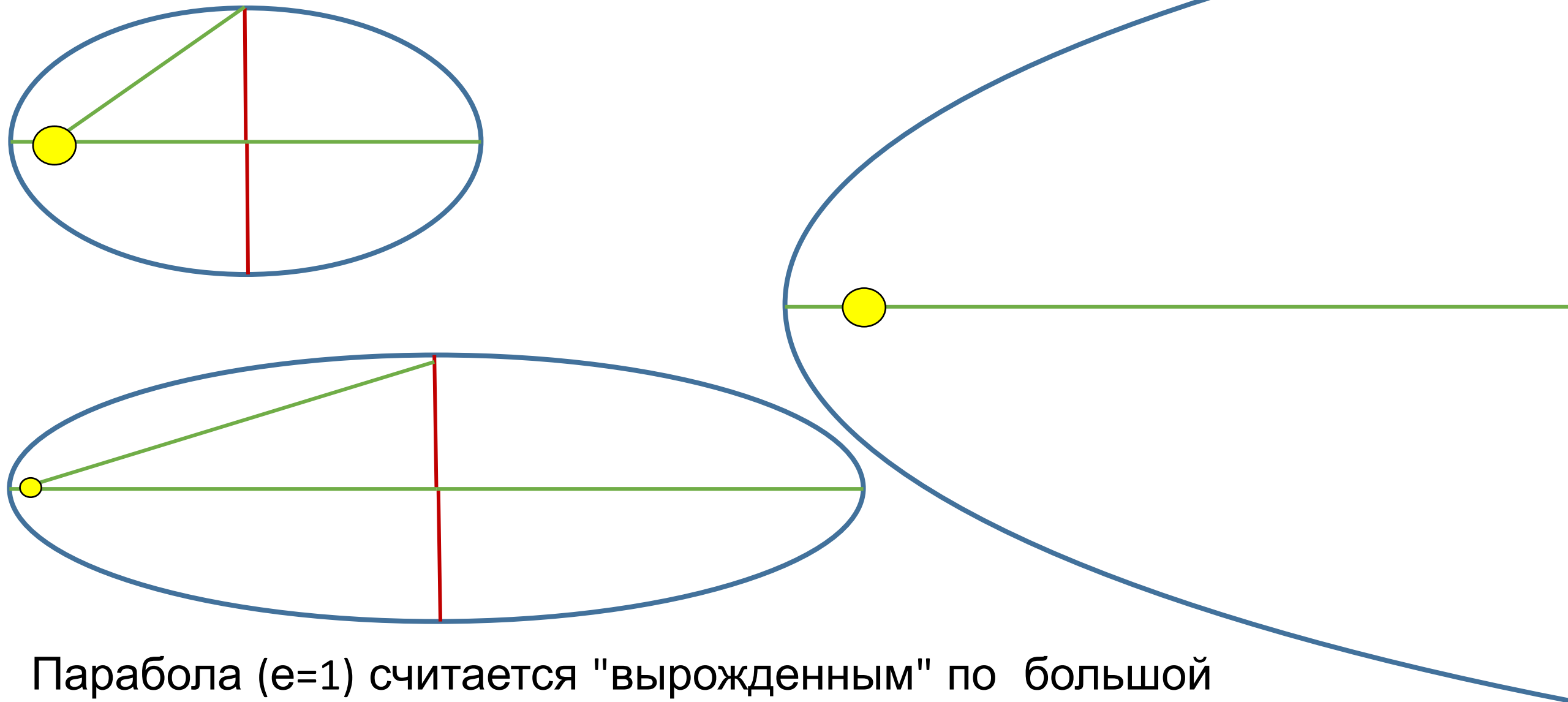
$F_1, F_2$  – фокусы эллипса

# Вырождение эллипса 1



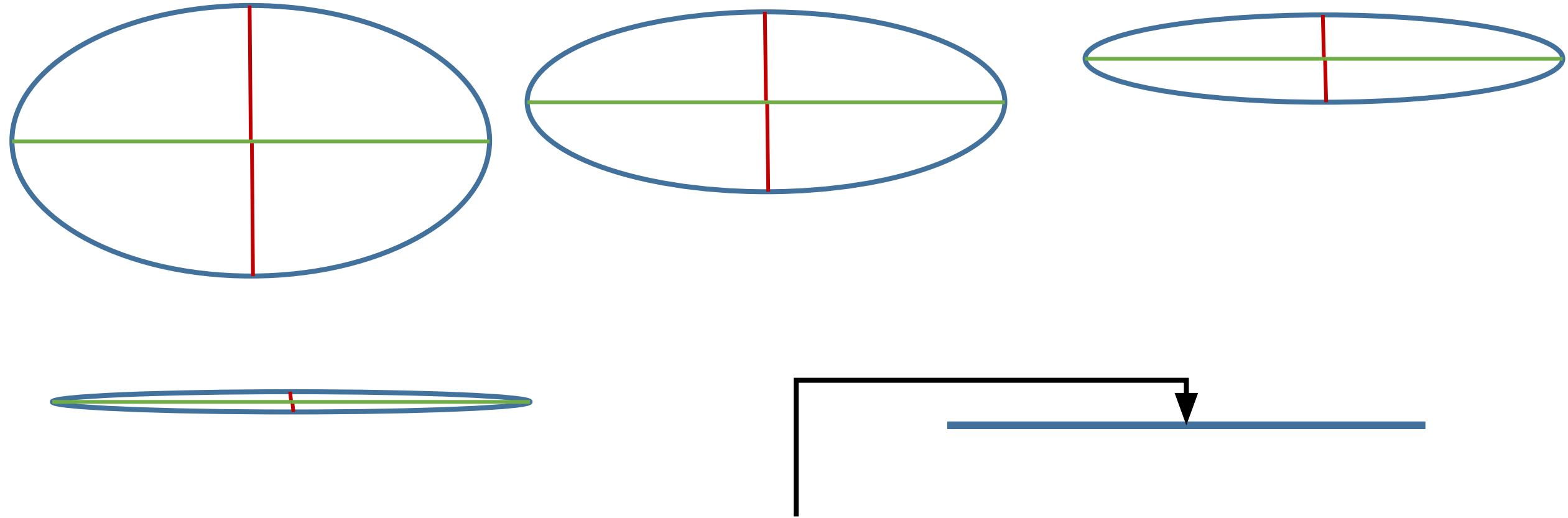
Круговая орбита ( $e=0$ ) считается частным (вырожденным по большой оси в малую сторону или по малой оси в большую сторону) случаем эллиптической орбиты.

# Вырождение эллипса 2



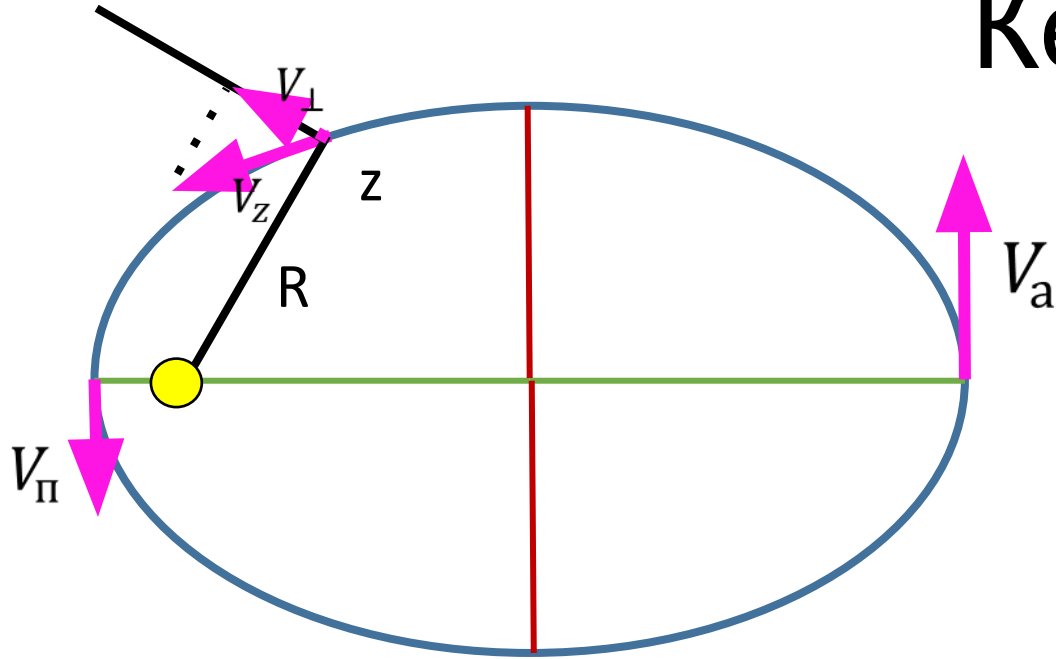
Парабола ( $e=1$ ) считается "вырожденным" по большой оси в большую сторону случаем эллипса.

# Вырождение эллипса 3



Радиальная орбита ( $e=1$ ) считается вырожденным по малой оси в меньшую сторону случаем эллиптической орбиты.

# Характеристики орбиты. 2 закон Кеплера



2 закон Кеплера:

$$V_{\perp} * R = const$$

$$V_{\pi} > V_a$$

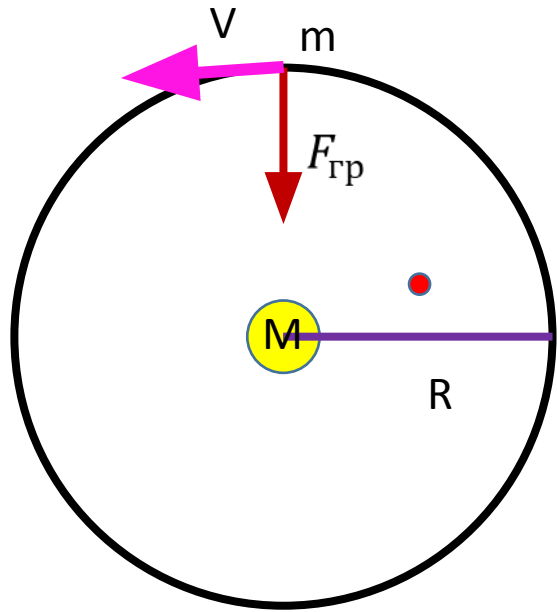
$$V_{\pi} * R_{\pi} = V_a * R_a$$

$$V_{\pi} * a * (1 - e) = V_a * a * (1 + e)$$

$$\frac{V_{\pi}}{V_a} = \frac{1 + e}{1 - e}$$



# Характеристики орбиты. 3 закон Кеплера



$$F = ma$$

$$a = a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R} \quad F = F_{\text{гр}} = G \frac{Mm}{R^2}$$

$$\left. \begin{aligned} G \frac{Mm}{R^2} &= \frac{mV^2}{R} \\ V^2 &= \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow G \frac{Mm}{R^2} = \frac{m}{R} * \frac{4\pi^2 * R^2}{T^2}$$

# Характеристики орбиты. 3 закон Кеплера

$$\frac{G * M * T^2}{R^3} = 4\pi^2 \Rightarrow \frac{T^2 * M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G} = const$$

Для эллипса:

$$\frac{T^2 * M}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} = const$$

Для тел, вращающихся вокруг одного массивного объекта

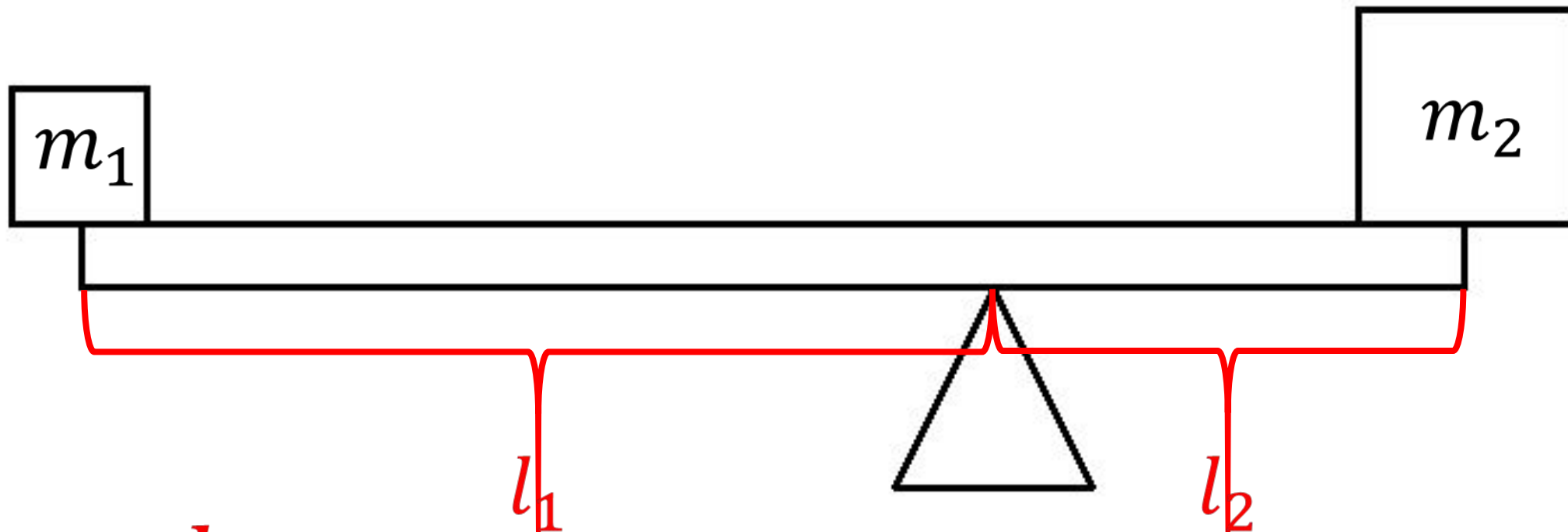
$$\frac{T_1^2 * M}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G} = \frac{T_2^2 * M}{a_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Для Солнечной системы:

$$\frac{T_i^2}{a_i^3} = 1 \frac{\text{год}^2}{\text{а. е.}^3}$$

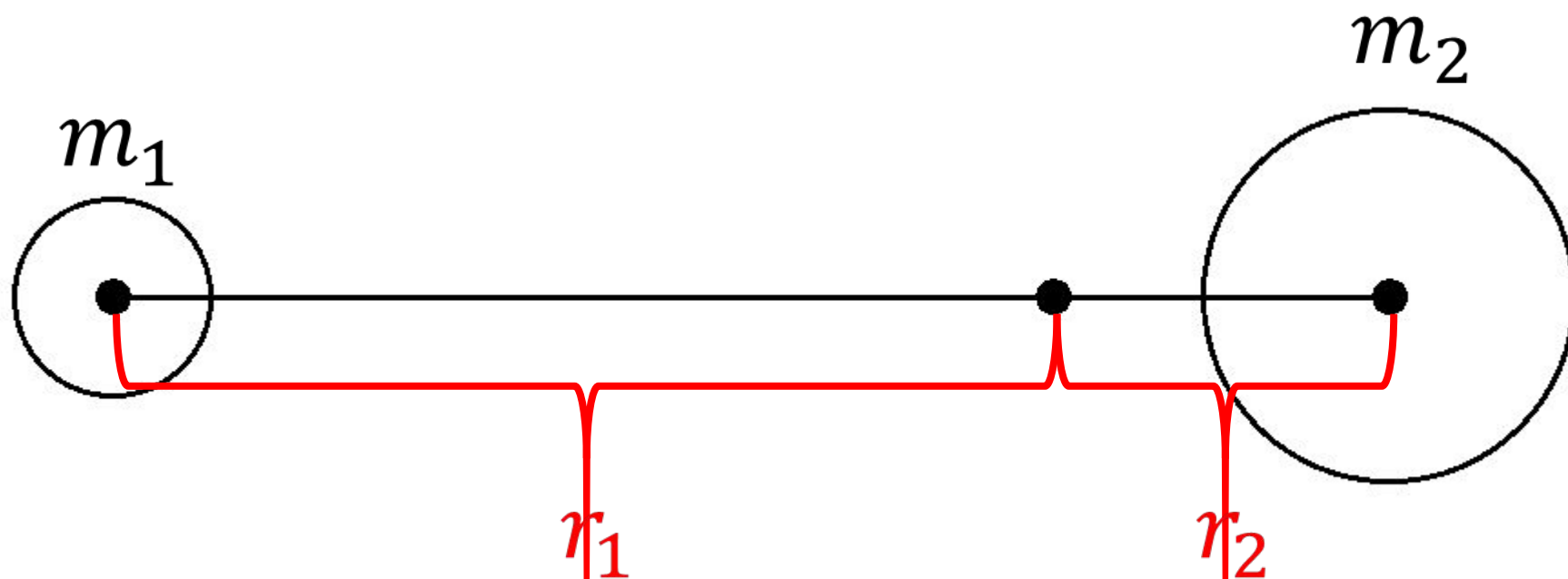
Характеристики орбиты.  
3 общий закон Кеплера

# ЦЕНТР МАСС



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

# ЦЕНТР МАСС

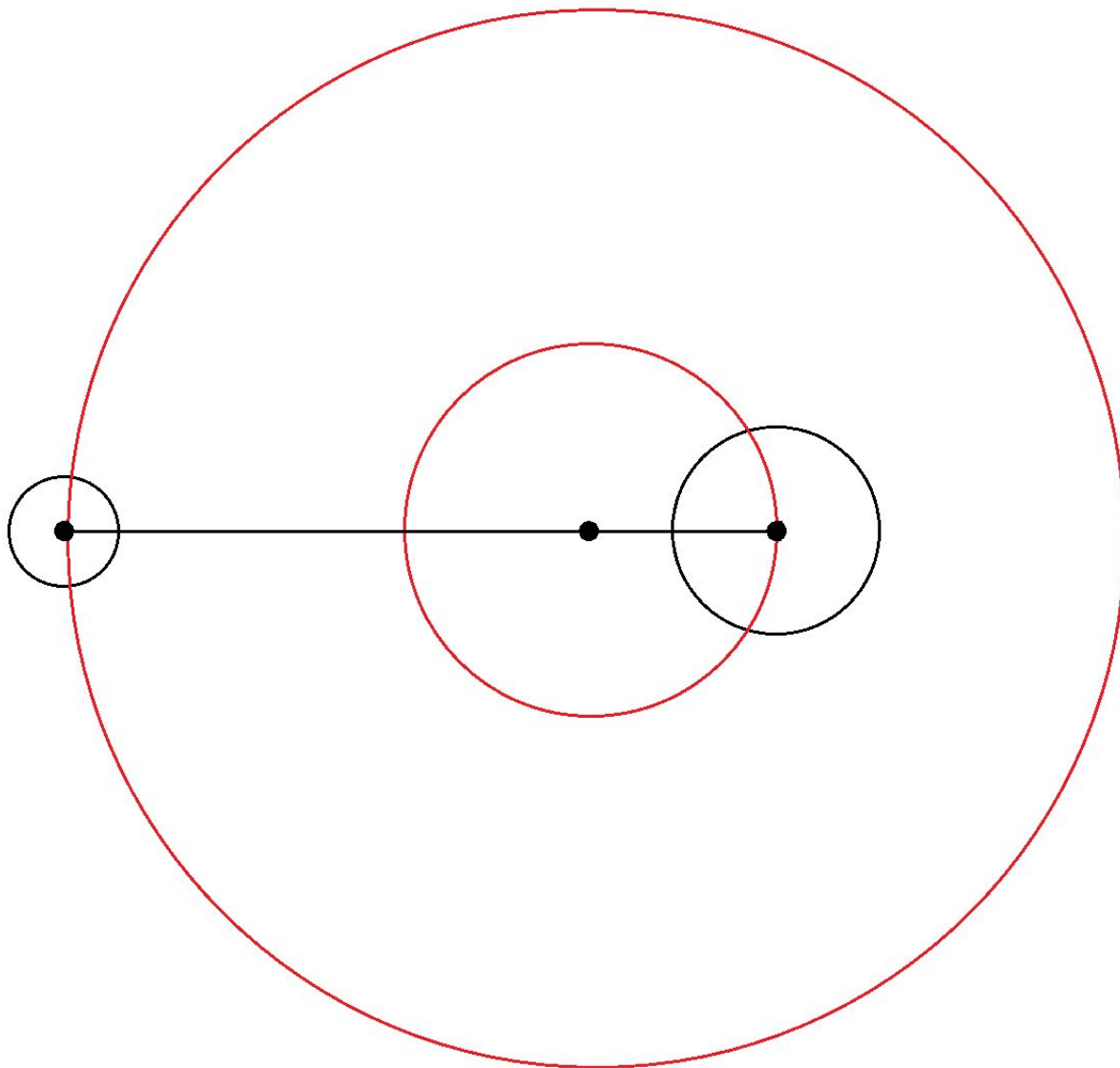


$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

# СКОРОСТИ

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



# МИНУТКА ШАМАНИЗМА

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} \longrightarrow r_2 = \frac{m_1}{m_2} r_1$$
$$\left. \begin{array}{l} r_1 + r_2 = R \\ r_1 + \frac{m_1}{m_2} r_1 = R \end{array} \right\}$$

$$r_1 r_1^{**} \left( \frac{m_2 + m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) = R \longrightarrow r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R$$

# МИНУТКА ШАМАНИЗМА

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1^2}{r_1} m_1 &= G \frac{m_1 m_2}{R^2} \\ v_i &= \omega r_i \end{aligned} \right\} \rightarrow \omega^2 r_1 m_1 = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} R &= G \frac{m_2}{R^2} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{R}{m_1 + m_2} = \frac{G}{R^2}$$



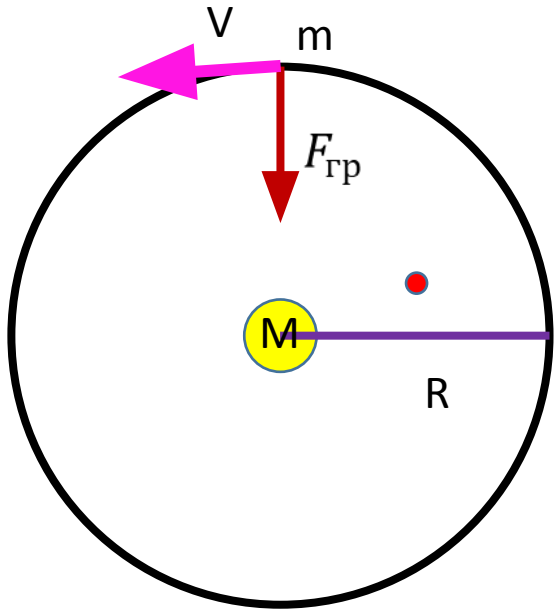
# ОБОБЩЕННЫЙ III КЕПЛЕР

$$\frac{T^2 * (m_1 + m_2)}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$

Для эллипса:

$$\frac{T^2 * (m_1 + m_2)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$

# Характеристики орбиты. Скорости.



$$F = ma$$

$$a = a_{\text{ц}} = \frac{V^2}{R} \quad F = F_{\text{гp}} = G \frac{Mm}{R^2}$$

$$G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow G \frac{Mm}{R^2} = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$E_{K1} + E_{\text{ПОТ}1} = E_{K2} + E_{\text{ПОТ}2} \Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}$$

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}, R = a \Rightarrow \frac{m}{2} * \frac{GM}{a} - \frac{GMm}{a} = \frac{mv_{\Pi}^2}{2} - \frac{GMm}{a * (1 - e)} \Big| * \frac{2}{m}$$

$$\frac{GM}{a} - \frac{2GM}{a} = v_{\Pi}^2 - \frac{2GM}{a * (1 - e)} \Rightarrow v_2^2 = \frac{2GM}{a * (1 - e)} - \frac{GM}{a}$$

$$v_{\Pi}^2 = \frac{2GM}{a * (1 - e)} - \frac{GM * (1 \pm e)}{a * (1 \pm e)} = GM * \frac{2 - (1 - e)}{a * (1 - e)}$$

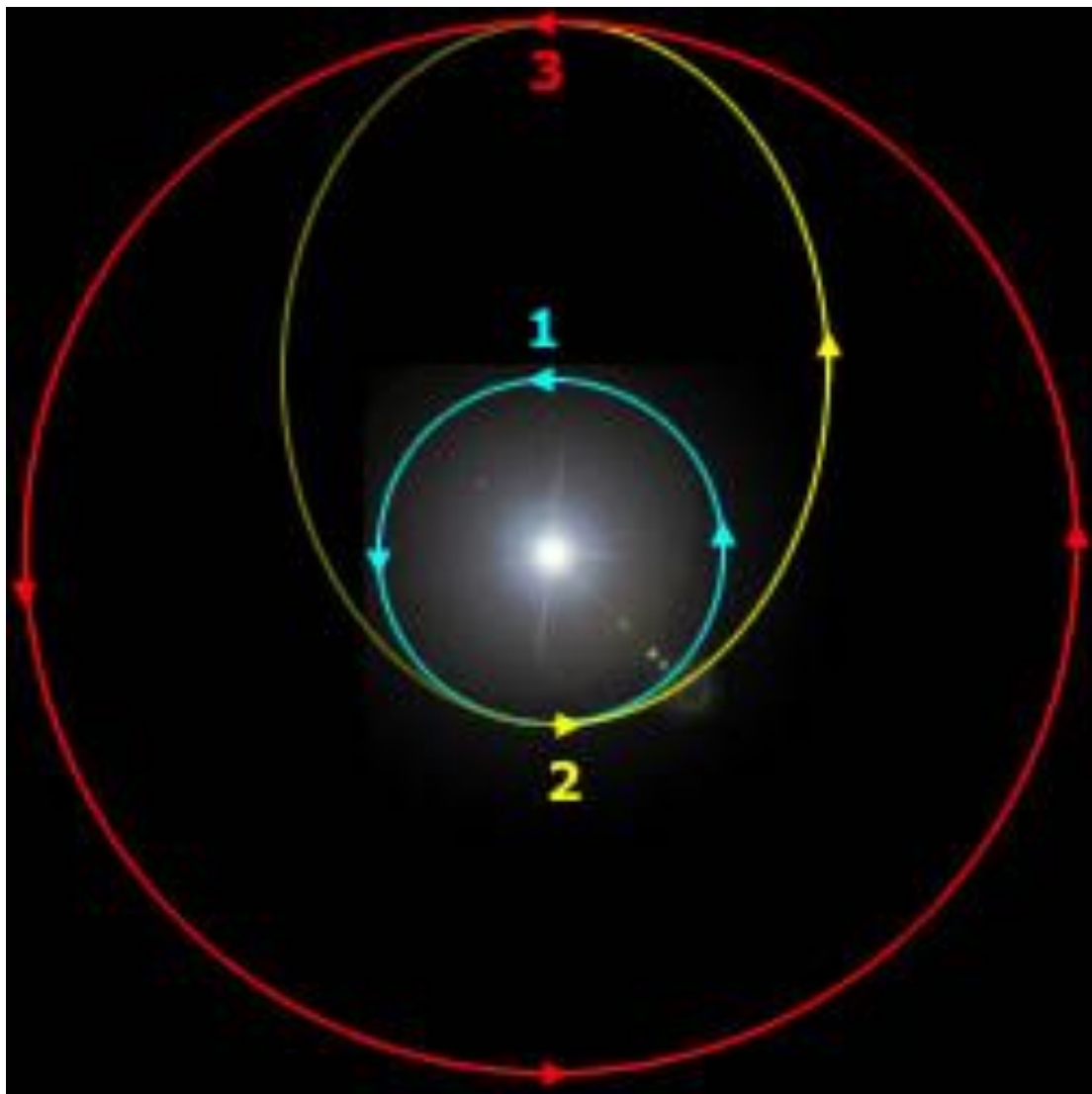
$$v_{\Pi}^2 = GM * \frac{2 - (1 - e)}{a * (1 - e)} = GM * \frac{2 - 1 + e}{a * (1 - e)} = \frac{GM}{a} * \frac{1 + e}{1 - e} = \frac{GM}{r_{\Pi}} * (1 + e)$$

$$v_a^2 = GM * \frac{2 - (1 + e)}{a * (1 + e)} = GM * \frac{2 - 1 - e}{a * (1 + e)} = \frac{GM}{a} * \frac{1 - e}{1 + e} = \frac{GM}{r_a} * (1 - e)$$

$$v_{\Pi} = \sqrt{\frac{GM}{a} * \frac{1 + e}{1 - e}}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} * \frac{1 - e}{1 + e}}$$

# Интересные эллиптические орбиты

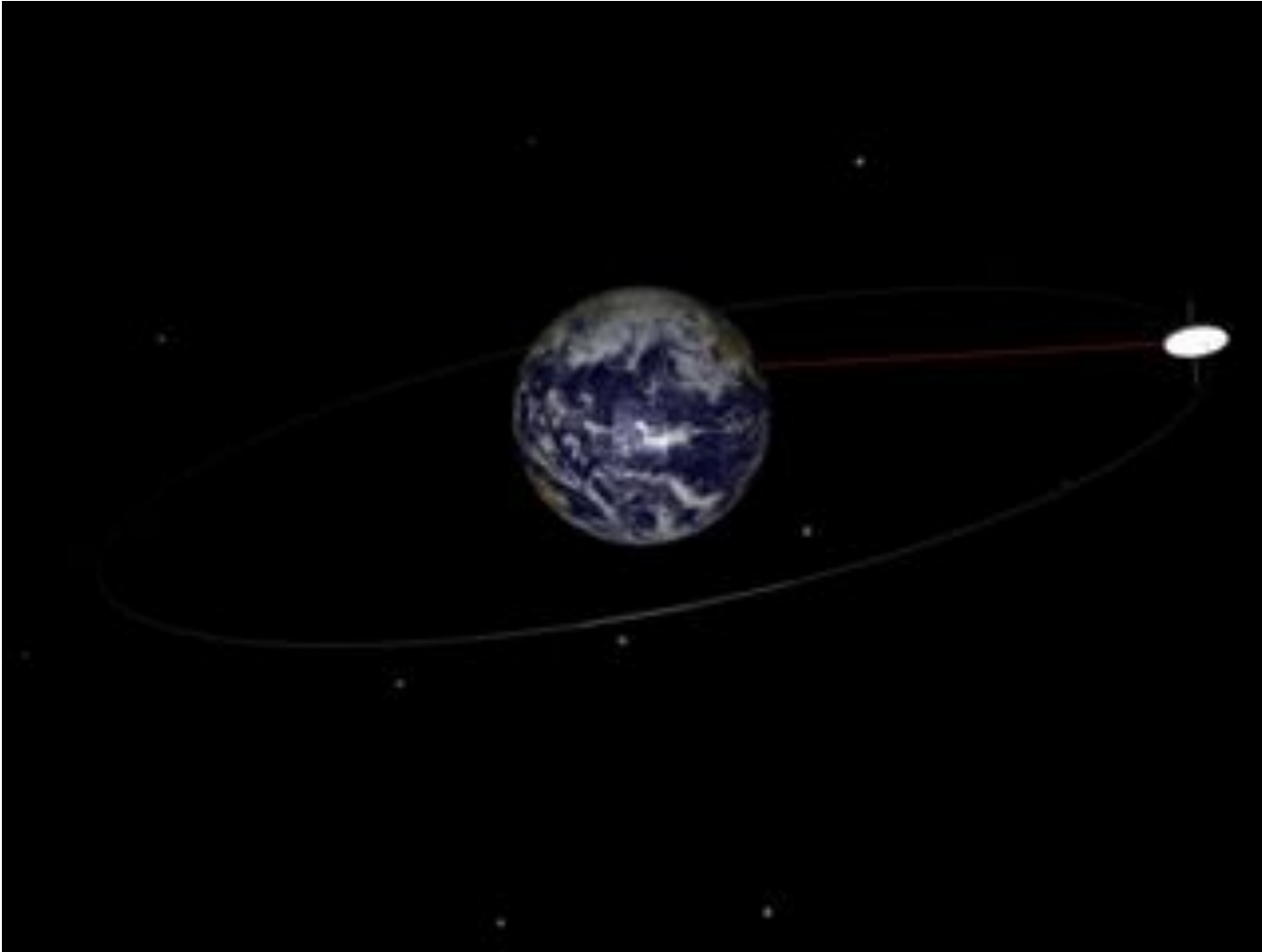


Гомановская орбита  
предназначена для  
быстрых  
низкоэнергетических  
межпланетных  
перелётов

$$a_2 = a_1 + a_3$$

$$T_{\text{перелёта}} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 * a_2^3}{G * M}}$$

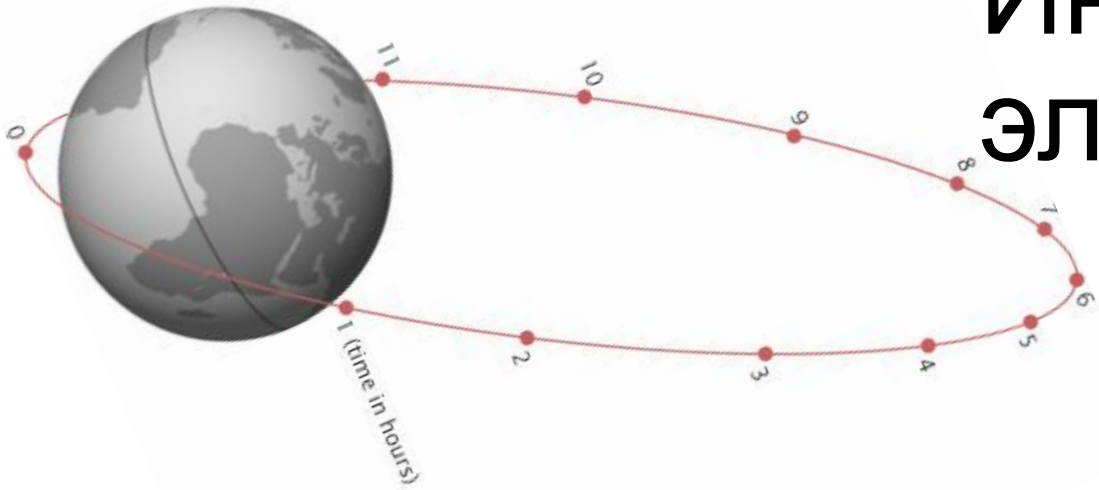
# Интересные эллиптические орбиты



Геосинхронная орбита  
предназначена для  
спутников

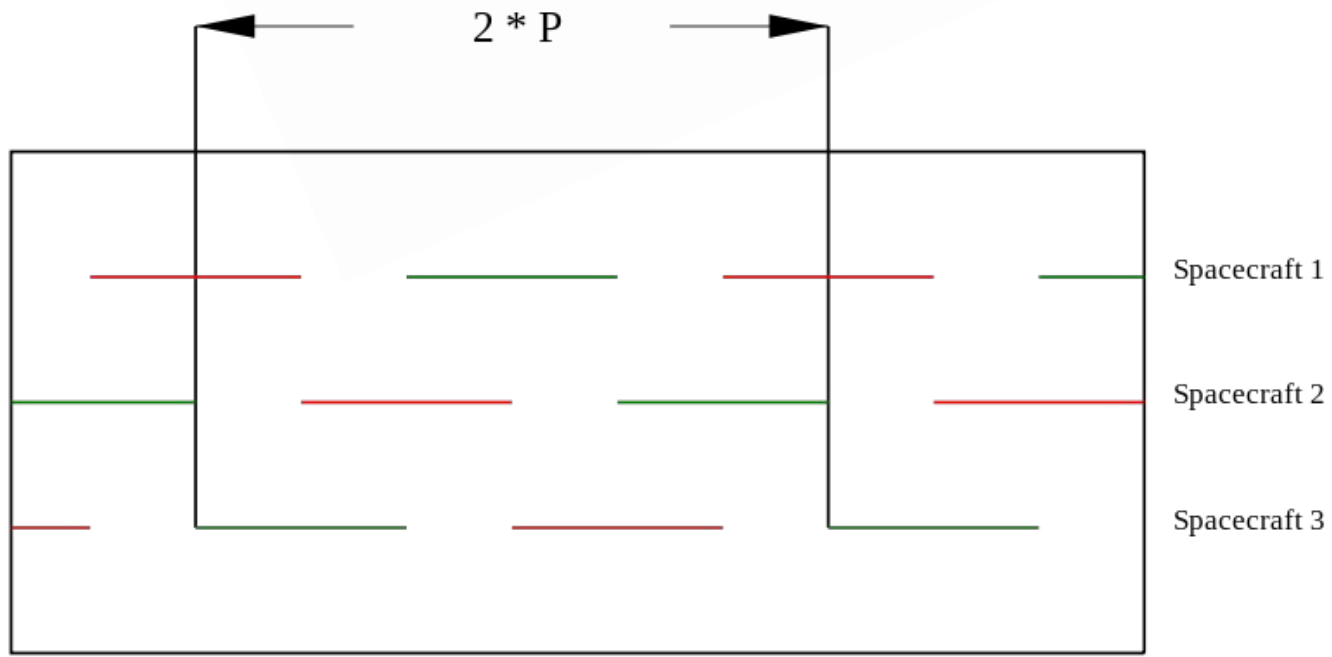
$$T = 1 \text{сут}, \quad a = ?$$

# Интересные эллипты



Трасса  
орбиты

Зоны видимости трёх спутников в северном полушарии.  $P$  — период обращения спутника, зелёная линия — работа над Евразией, красная линия — работа над Северной Америкой

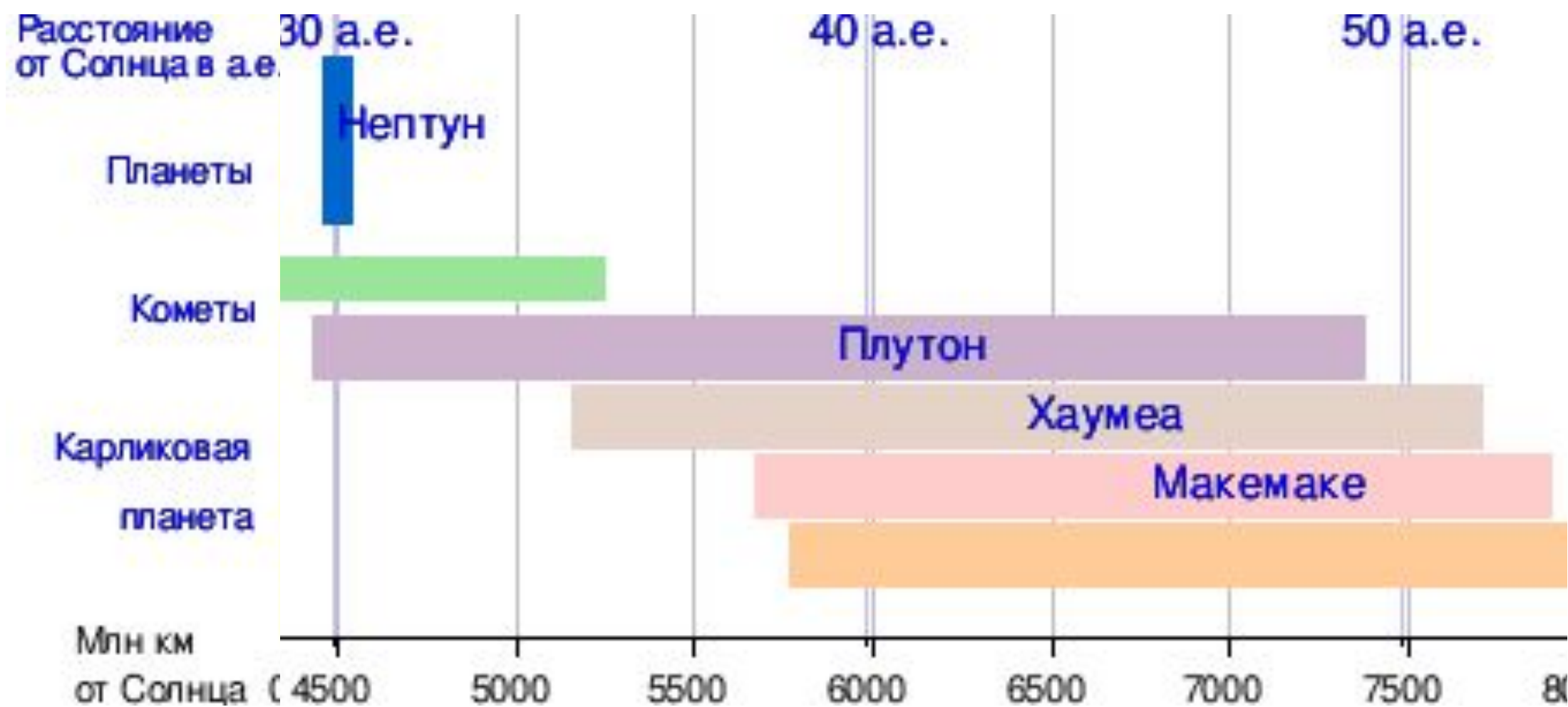


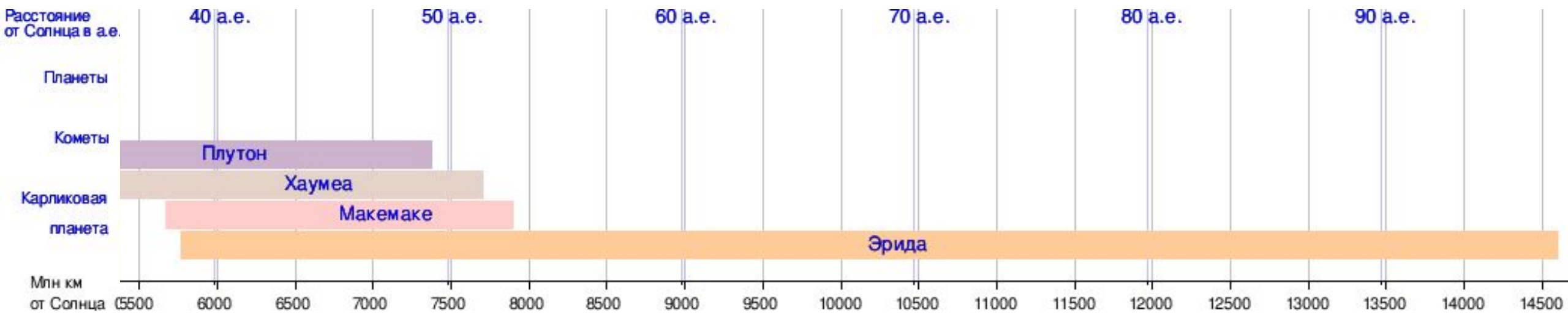
Максимальные и минимальные расстояния от Солнца до ближайших тел.











# Задачи

Сколько лететь по Гомановской орбите от Земли до Венеры?  
Найдите скорости в афелии и перигелии.

# Задачи

Каков период системы из двух ЧД, массами 100 тыс. и  $4,3 \cdot 10^6$  Мс? Орбиту считать круговой с  $a=200$  а.е.

# Задачи

Посчитать апо- и перицентрические расстояния и скорости Урана

# Задачи

Сколько минимально по времени лететь по Гомановской орбите от Меркурия до Юпитера?