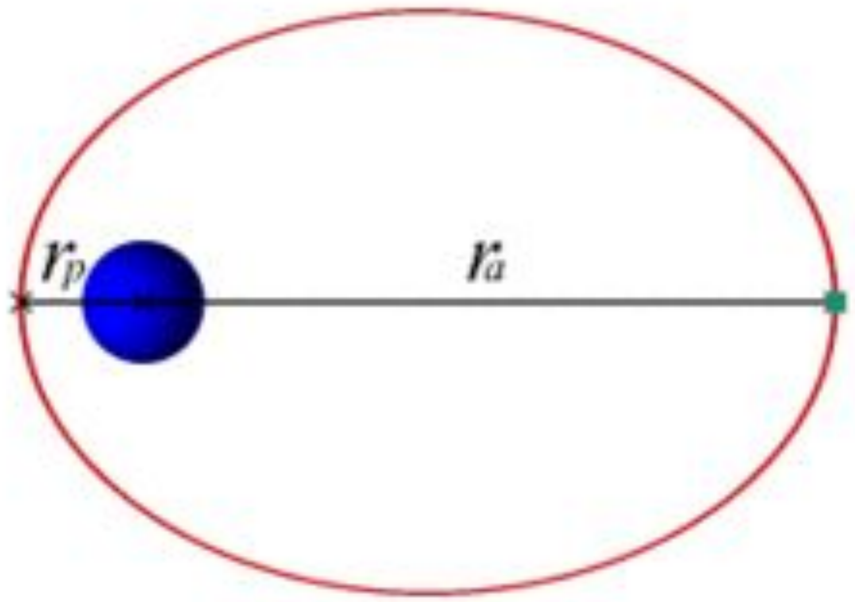
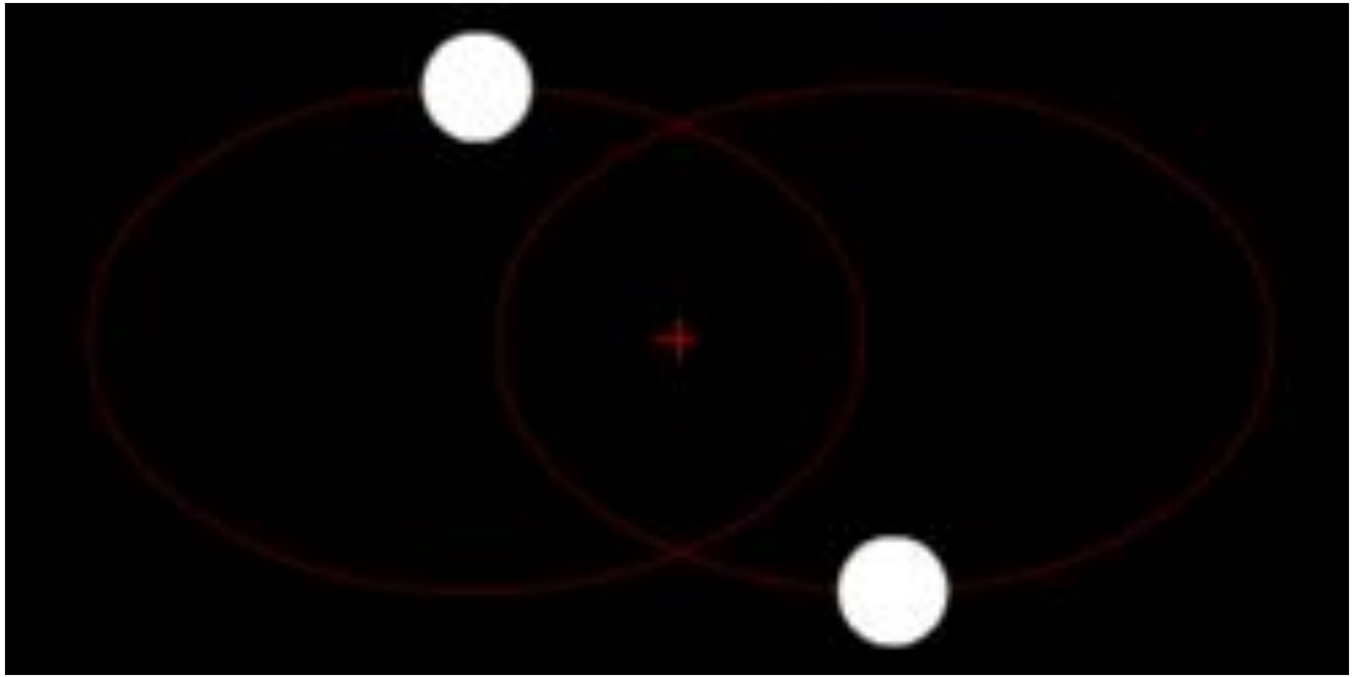
Эллиптическая орбита

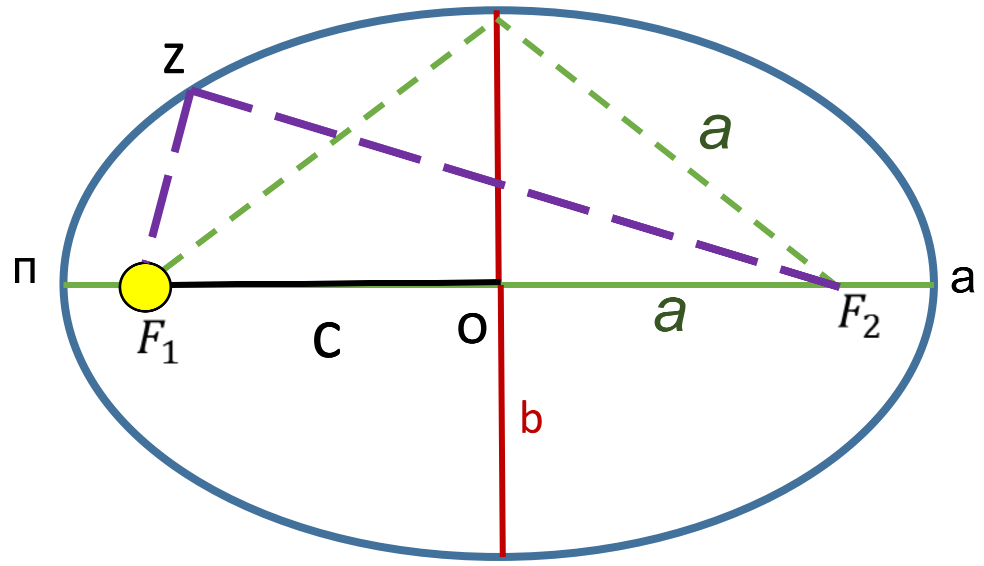
Что это?

Эллиптическая орбита — орбита с эксцентриситетом $0<e<1$.





Параметры, свойства и детали эллипса

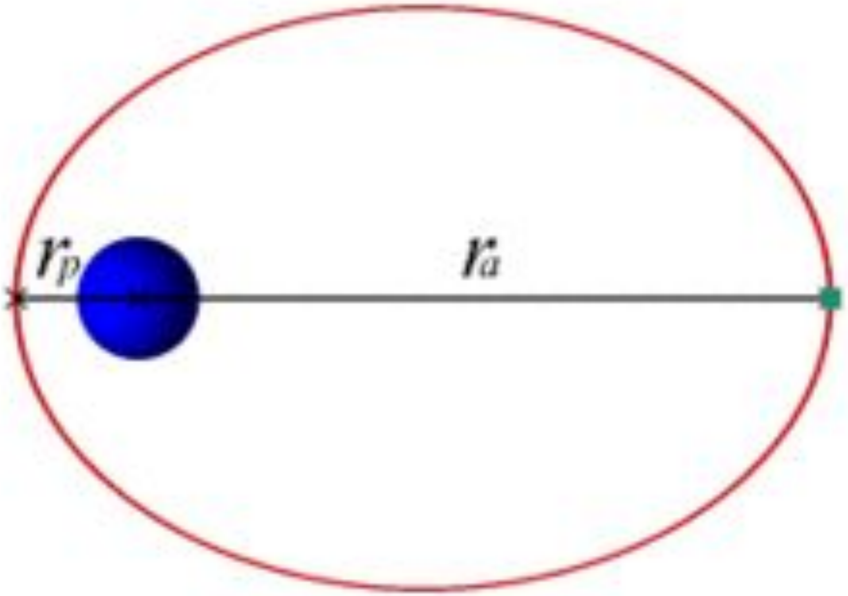


$пF_1$ – перигелий
aF_2 – афелий
a – большая полуось
b – малая полуось
c – фокальный параметр
F_1, F_2 – фокусы эллипса
o – центр эллипса

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$|zF_1| + |zF_2| = 2a$$
$$e = \frac{c}{a}$$

$$F_1 o = F_2 o = ae$$
$$пF_1 = a - c = a - ae = a(1 - e)$$
$$пF_2 = a + c = a + ae = a(1 + e)$$

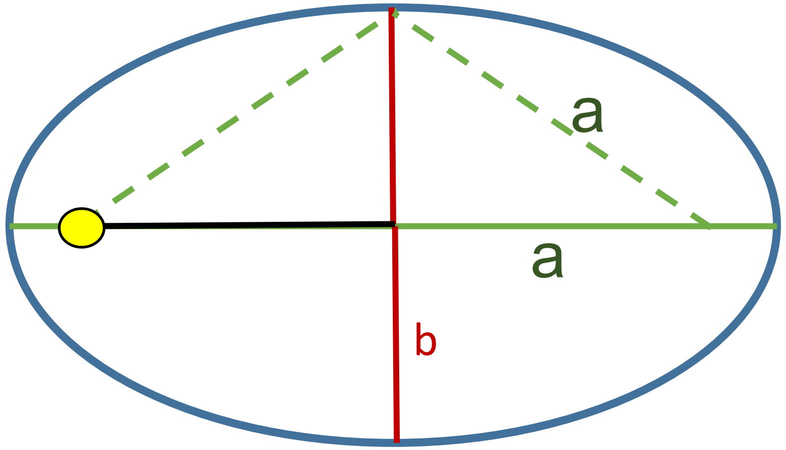
Как считать e?



$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 1 - \frac{2}{\frac{r_a}{r_p} + 1}$$

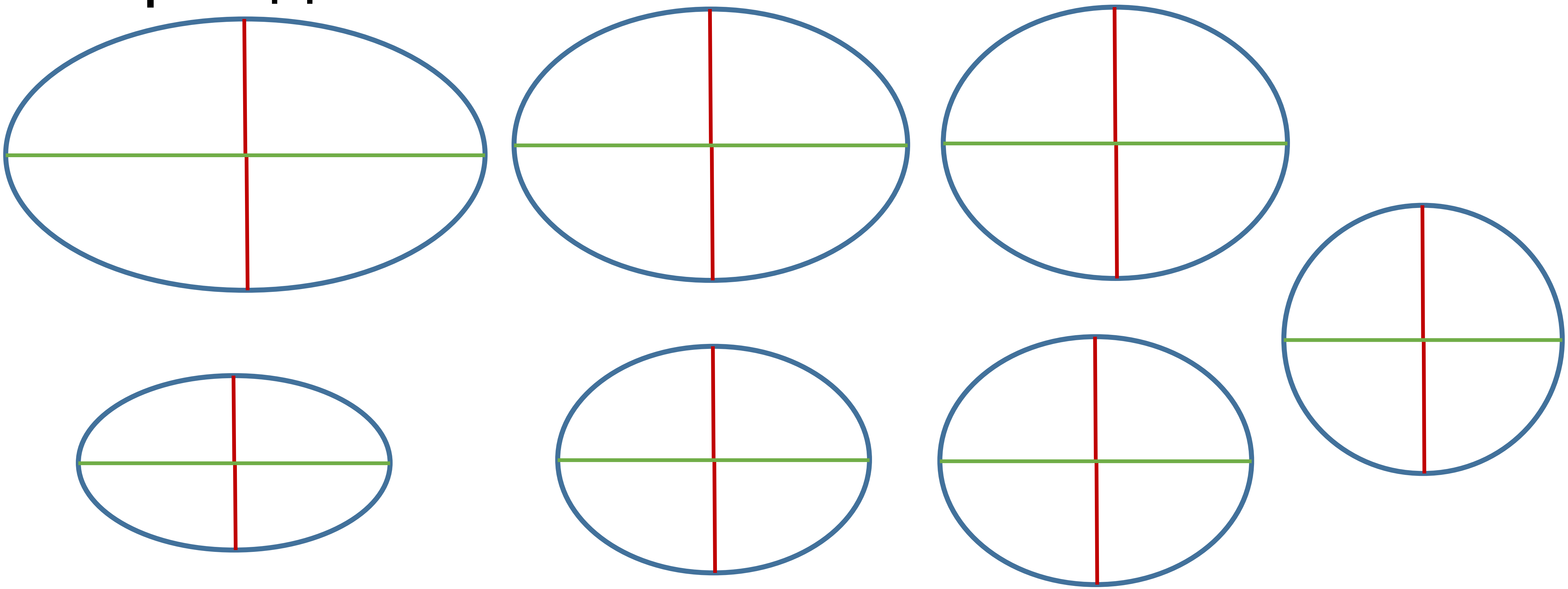
$$e = \frac{c}{a}, \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



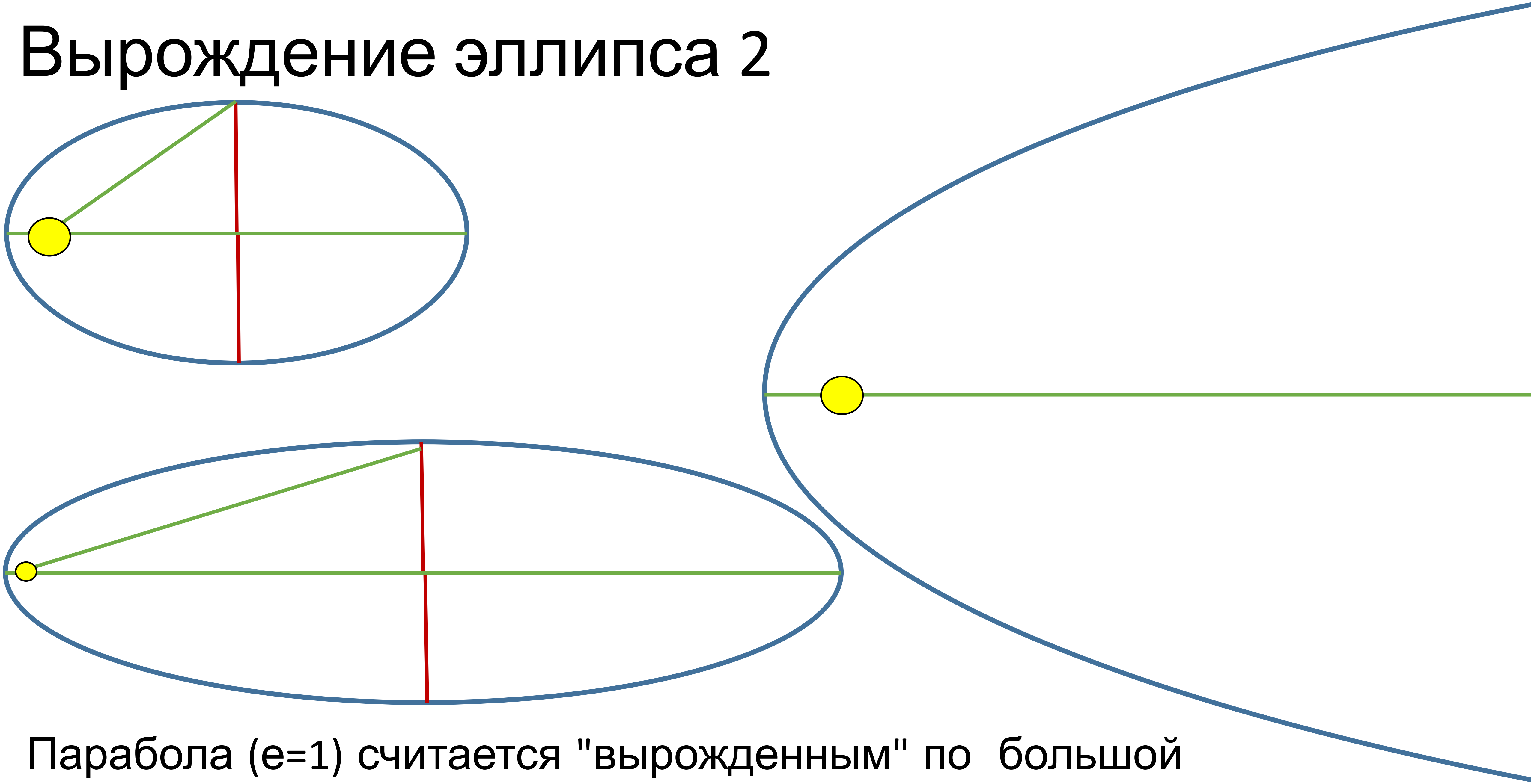
aF_1 – перигелий
aF_2 – афелий
a – большая полу ось
b – малая полу ось
c – фокальный параметр
F_1, F_2 – фокусы элипса

Вырождение эллипса 1



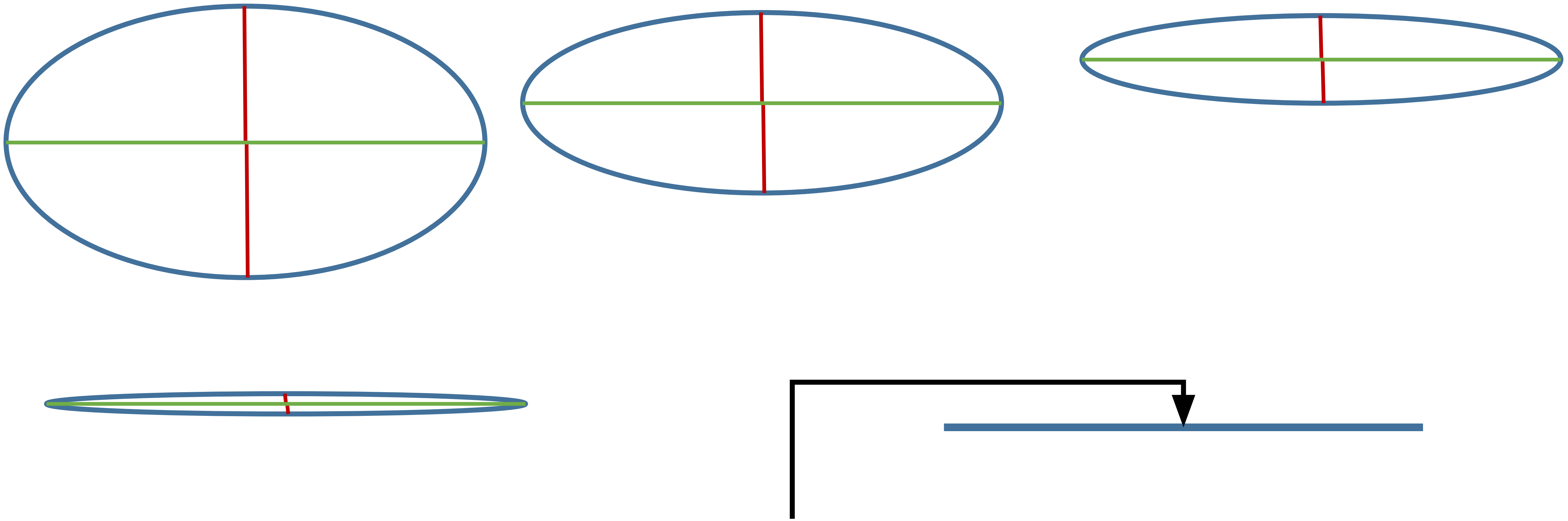
Круговая орбита (е=0) считается частным (вырожденным по большой оси в малую сторону или по малой оси в большую сторону) случаем эллиптической орбиты.

Вырождение эллипса 2



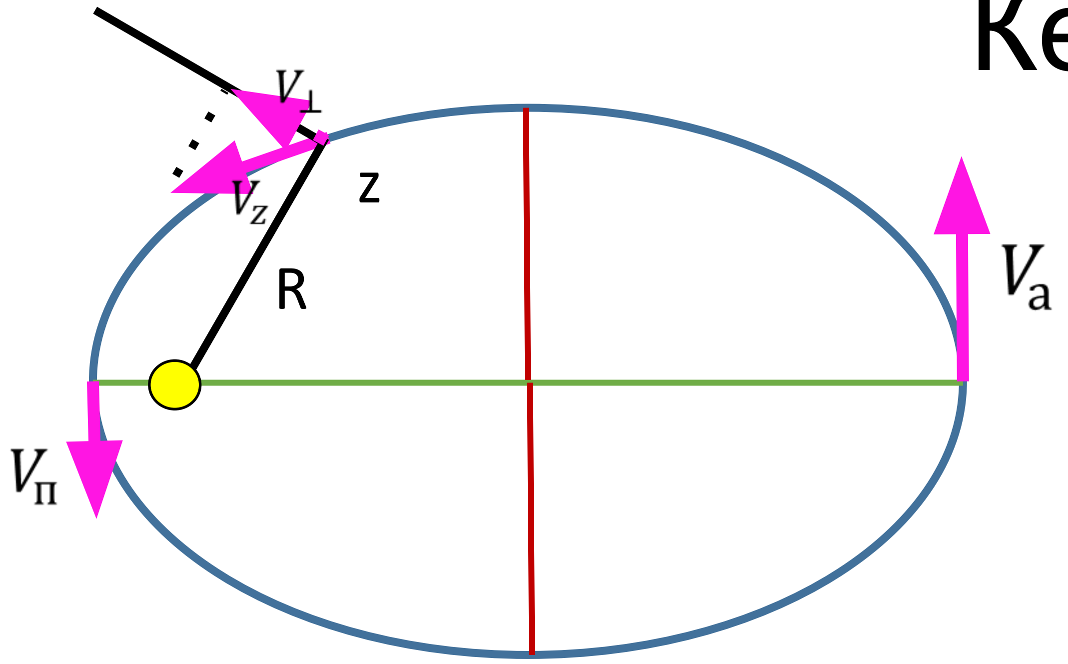
Парабола (e=1) считается "вырожденным" по большой оси в большую сторону случаем эллипса.

Вырождение эллипса 3



Радиальная орбита (e=1) считается вырожденным по малой оси в меньшую сторону случаем эллиптической орбиты.

Характеристики орбиты. 2 закон Кеплера



2 закон Кеплера:

$$V_\perp * R = const$$

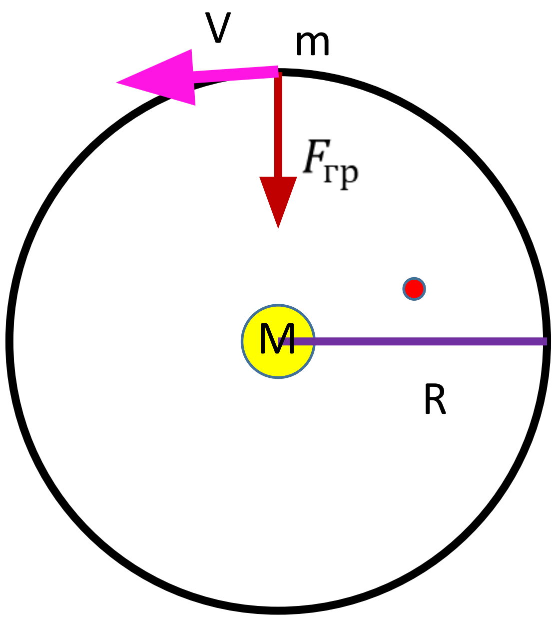
$$V_п > V_a$$

$$V_п * R_п = V_a * R_a$$

$$V_п * \cancel{a} * (1 - e) = V_a * \cancel{a} * (1 + e)$$

$$\frac{V_п}{V_a} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

Характеристики орбиты. 3 закон Кеплера



$$F = ma$$

$$a = a_ц = \frac{V^2}{R} \qquad F = F_{гр} = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mV^2}{R}$$

$$V^2 = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2} = \frac{\cancel{m}}{\cancel{R}} * \frac{4\pi^2 * R^{\cancel{2}}}{T^2}$$

Характеристики орбиты. 3 закон Кеплера

$$\frac{G * M * T^2}{R^3} = 4\pi^2 \Rightarrow \frac{T^2 * M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G} = const$$

Для эллипса:

$$\frac{T^2 * M}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} = const$$

Для тел, вращающихся вокруг одного массивного объекта

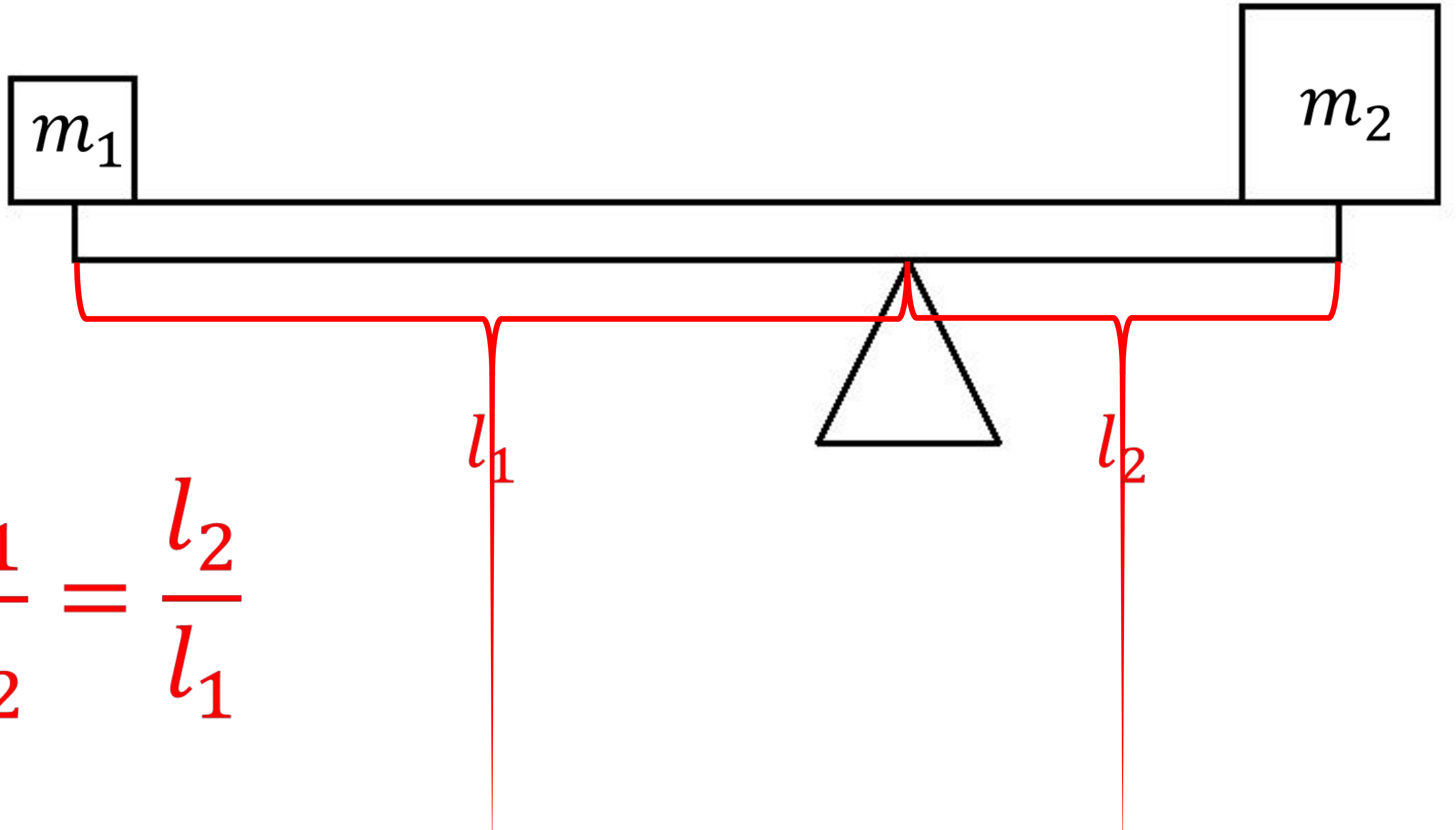
$$\frac{T_1^2 * M}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G} = \frac{T_2^2 * M}{a_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Для Солнечной системы:

$$\frac{T_i^2}{a_i^3} = 1\,\frac{\text{год}^2}{\text{а. е.}^3}$$

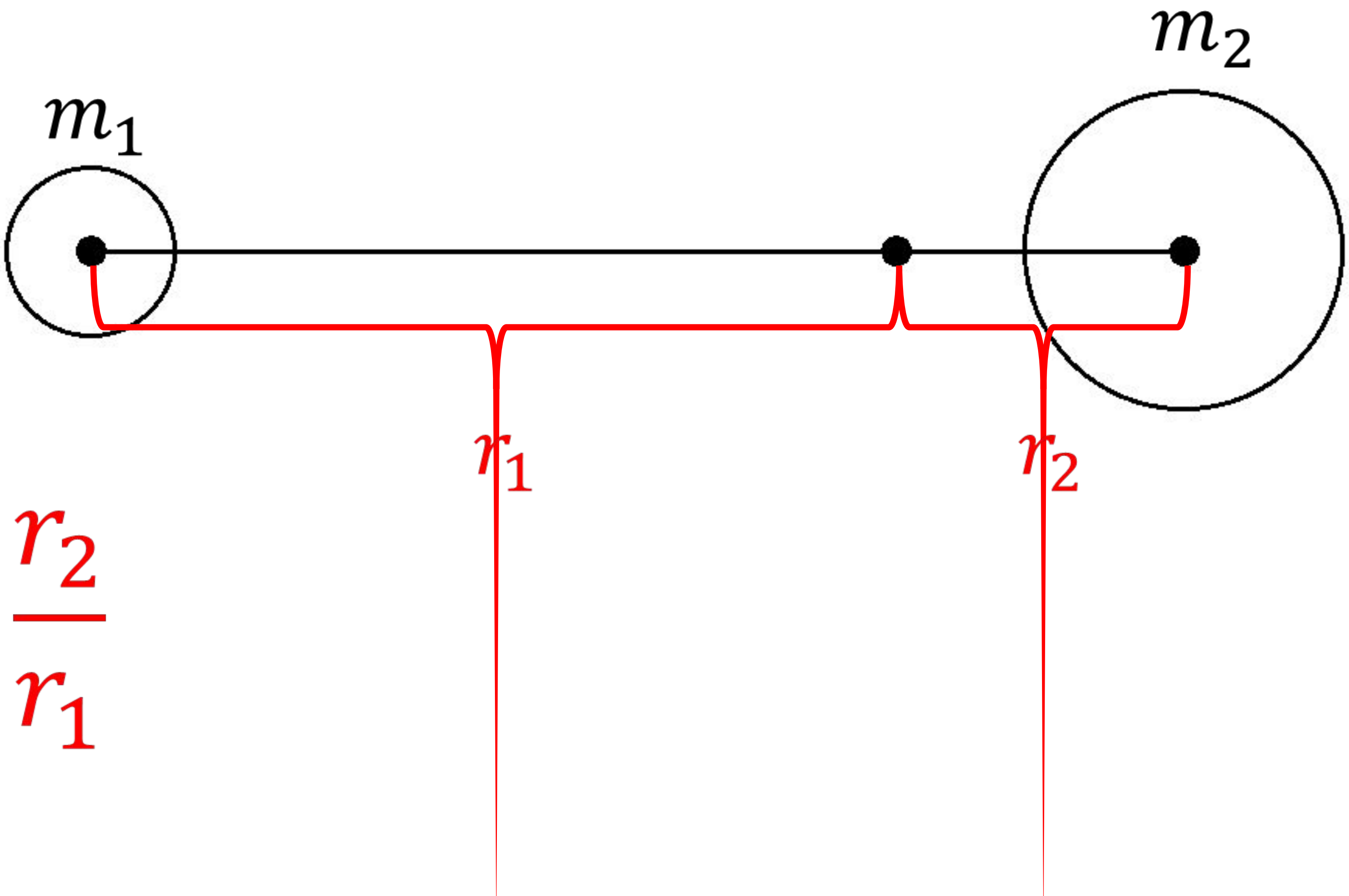
Характеристики орбиты.
3 общий закон Кеплера

ЦЕНТР МАСС



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

ЦЕНТР МАСС

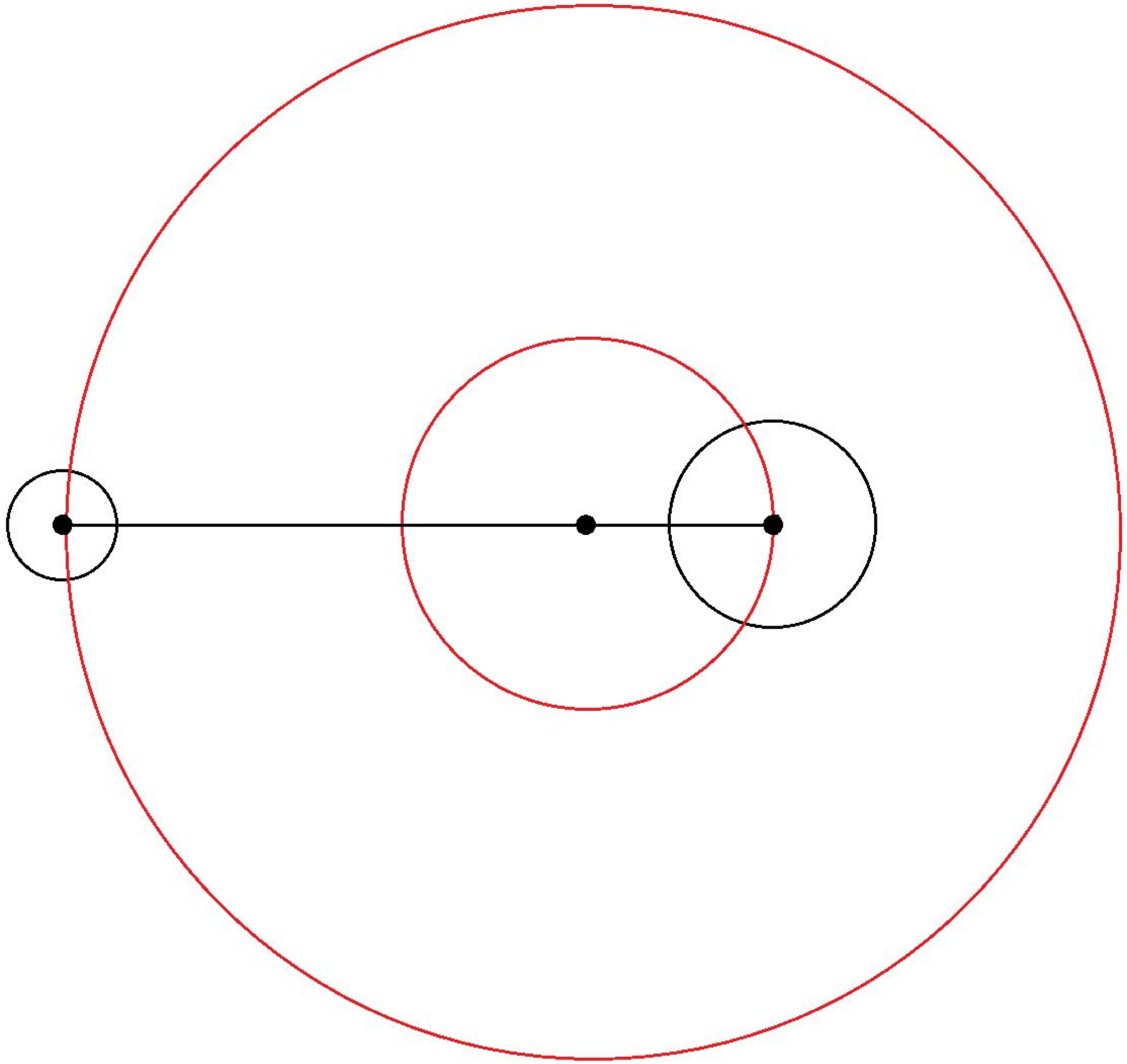


$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

СКОРОСТИ

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



МИНУТКА ШАМАНИЗМА

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} r_2 = \dfrac{m_1}{m_2} r_1 \\ r_1 + r_2 = R \end{array}\right\} r_1 + \frac{m_1}{m_2} r_1 = R$$

$$r_1 * \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = R$$

$$r_1 \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2}\right) = R \longrightarrow r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R$$

МИНУТКА ШАМАНИЗМА

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_1^2}{r_1} m_1 = G\,\frac{m_1 m_2}{R^2} \\ v_i = \omega r_i \end{aligned}\right\} \longrightarrow \omega^2 r_1 m_1 = G\,\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\,\frac{m_2}{m_1 + m_2} R = G\,\frac{m_2}{R^2} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{m_1 + m_2} = \frac{G}{R^2}$$

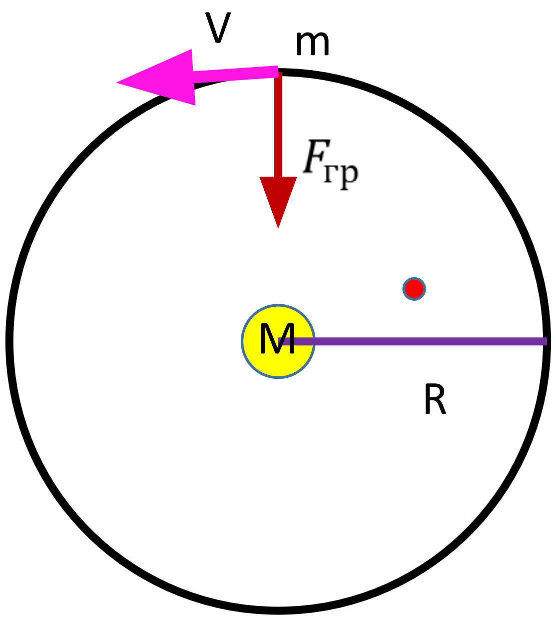
ОБОБЩЕННЫЙ III КЕПЛЕР

$$\frac{T^2 * (m_1 + m_2)}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$

Для эллипса:

$$\frac{T^2 * (m_1 + m_2)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$

Характеристики орбиты. Скорости.



$$F = ma$$

$$a = a_{ц} = \frac{V^2}{R} \qquad F = F_{гр} = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}V^2}{\cancel{R}} \Rightarrow V_{кр} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\mathrm{E}_{\text{к}1} + \mathrm{E}_{\text{пот}1} = \mathrm{E}_{\text{к}2} + \mathrm{E}_{\text{пот}2} \Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}$$

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}, R = a \ \Rightarrow \qquad \frac{m}{2} * \frac{GM}{a} - \frac{GMm}{a} = \frac{mv_{\text{п}}^2}{2} - \frac{GMm}{a * (1 - e)} \bigg| * \frac{2}{m}$$

$$\frac{GM}{a} - \frac{2GM}{a} = v_{\text{п}}^2 - \frac{2GM}{a * (1 - e)} \Rightarrow v_2^2 = \frac{2GM}{a * (1 - e)} - \frac{GM}{a}$$

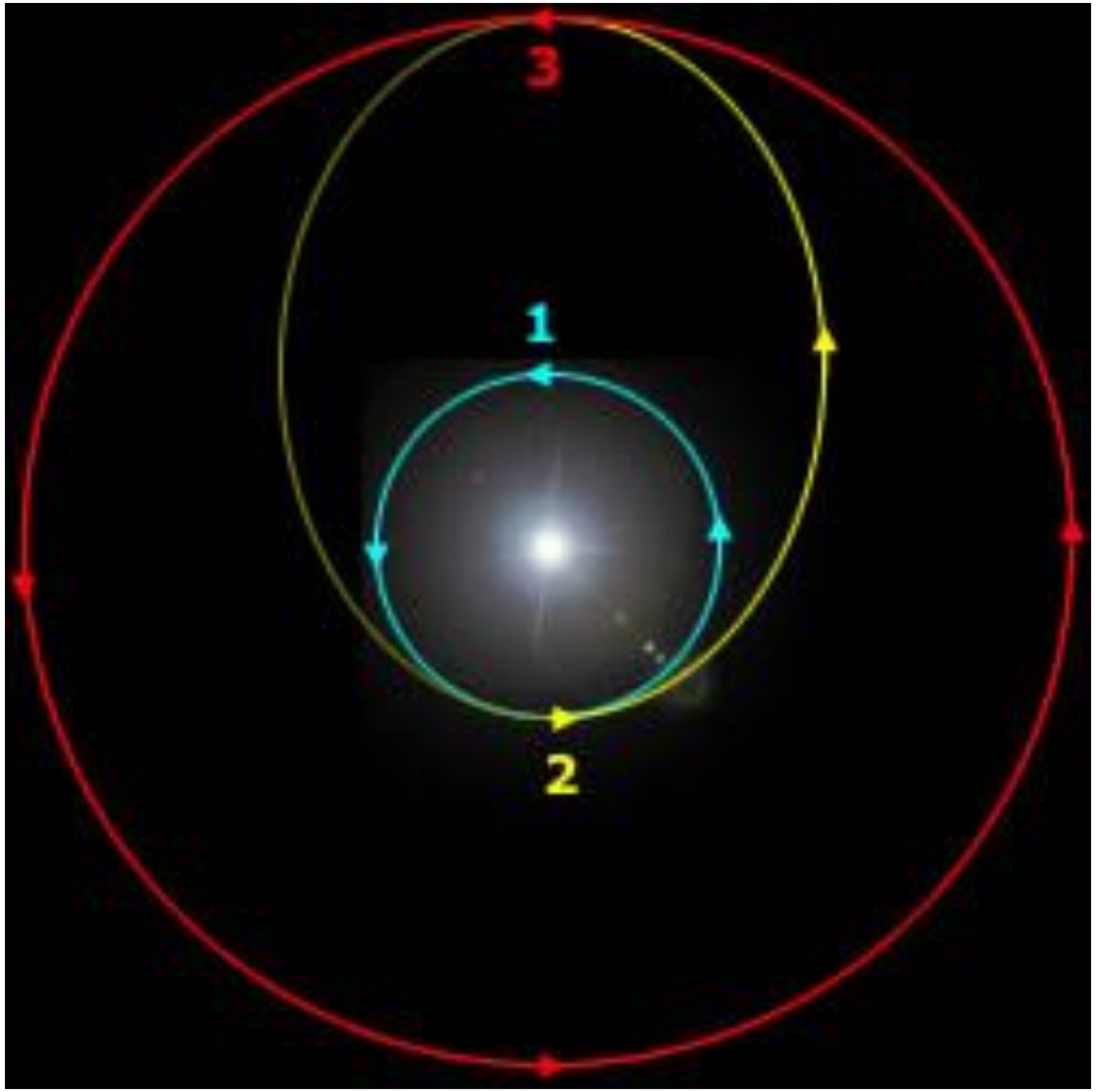
$$v_{\text{п}}^2 = \frac{2GM}{a * (1 - e)} - \frac{GM * (1 \pm e)}{a * (1 \pm e)} = GM * \frac{2 - (1 - e)}{a * (1 - e)}$$

$$v_{\text{П}}^2 = GM * \frac{2-(1-e)}{a*(1-e)} = GM * \frac{2-1+e}{a*(1-e)} = \frac{GM}{a} * \frac{1+e}{1-e} = \frac{GM}{r_{\text{П}}} * (1+e)$$

$$v_a^2 = GM * \frac{2-(1+e)}{a*(1+e)} = GM * \frac{2-1-e}{a*(1+e)} = \frac{GM}{a} * \frac{1-e}{1+e} = \frac{GM}{r_a} * (1-e)$$

$$v_{\text{П}} = \sqrt{\frac{GM}{a} * \frac{1+e}{1-e}} \qquad v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} * \frac{1-e}{1+e}}$$

Интересные эллиптические орбиты

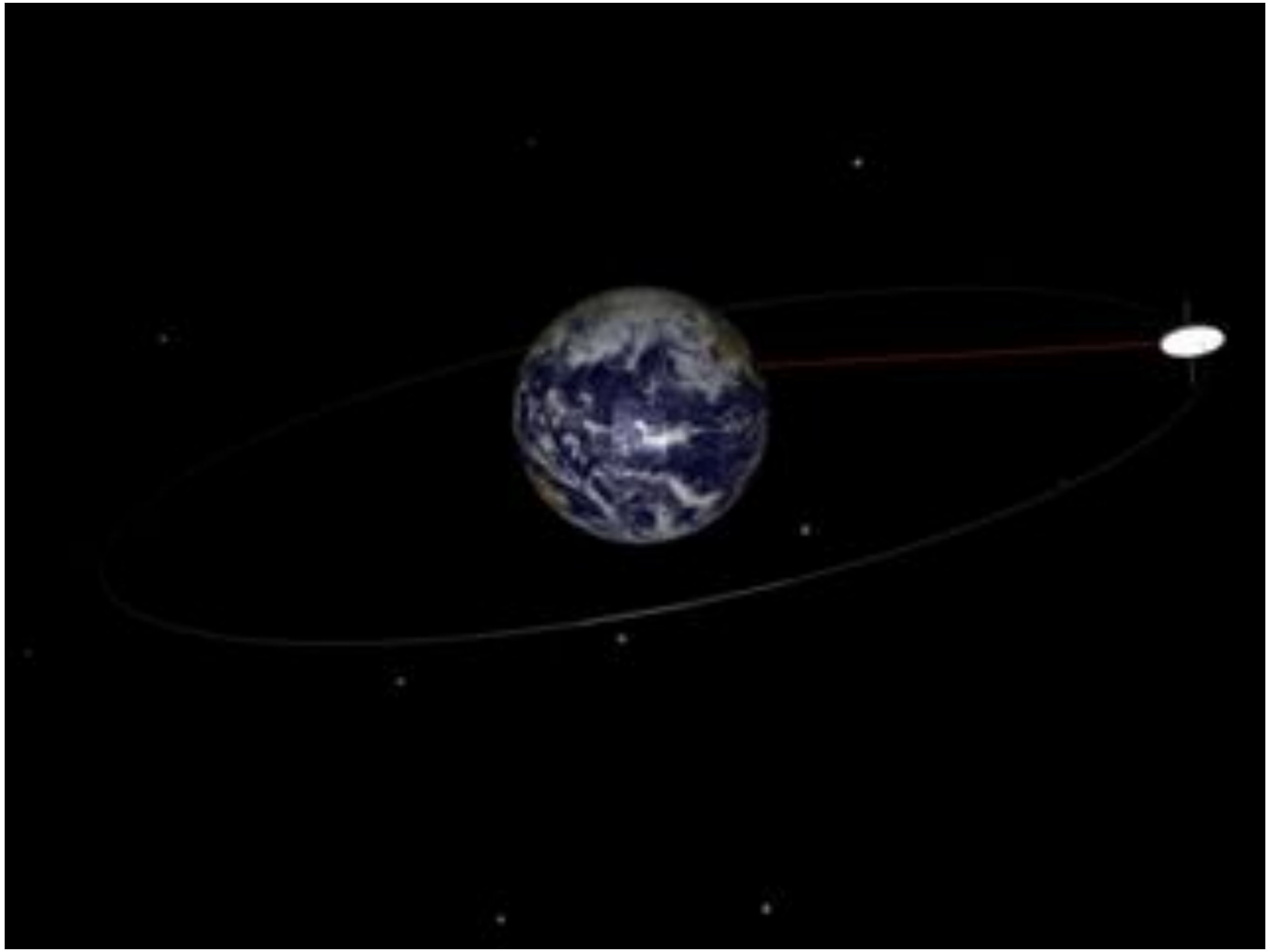


Гомановская орбита предназначена для быстрых низкоэнергетических межпланетных перелётов

$$a_2 = a_1 + a_3$$

$$T_{\text{перелёта}} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2 * a_2^3}{G * M}}$$

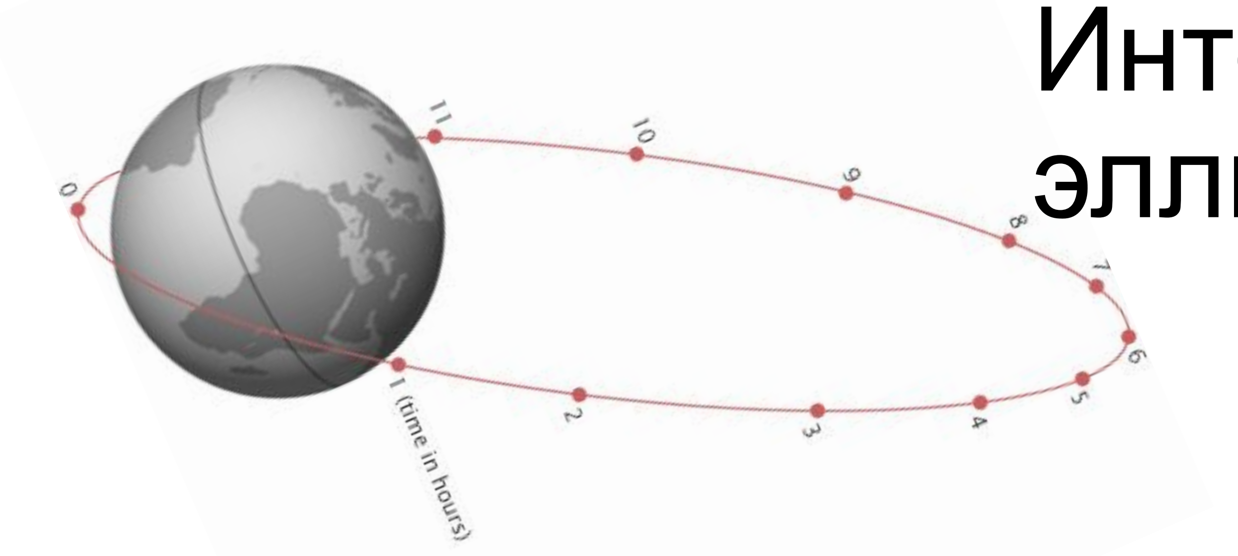
Интересные эллиптические орбиты



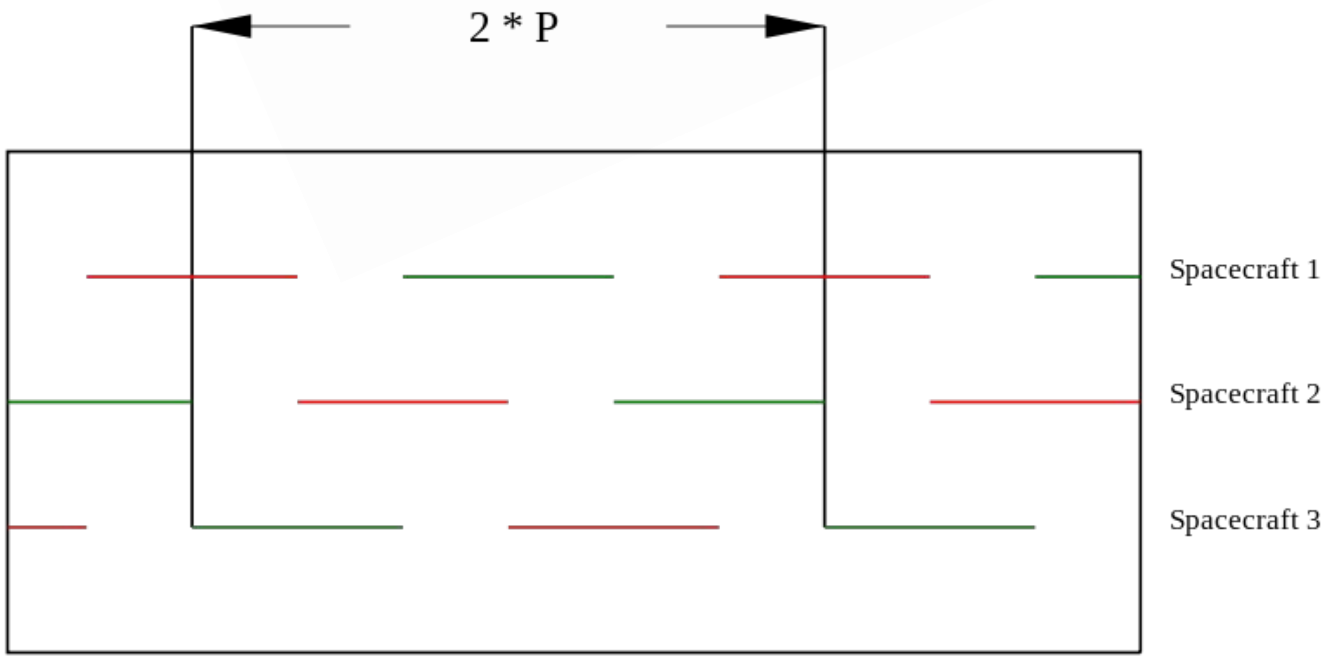
Геосинхронная орбита предназначена для спутников

$$T = 1\text{сут}, \qquad a = ?$$

Интересные эллипти



Трасса орбиты



Зоны видимости трёх спутников в северном полушарии. P — период обращения спутника, зелёная линия — работа над Евразией, красная линия — работа над Северной Америкой

Максимальные и минимальные расстояния от Солнца до ближайших тел.


Расстояние от Солнца в а.е.
0 а.е.
10 а.е.
20 а.е.
30 а.е.
Меркурий
Венера
Земля
Марс
Юпитер
Сатурн
Уран
Нептун
Планеты
Комета Галлея
Кометы
Церера
Карликовая планета
Солнце
Млн км от Солнца
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000

Расстояние
от Солнца в а.е.
30 а.е.
40 а.е.
50 а.е.
Нептун
Планеты
Кометы
Плутон
Хаумеа
Карликовая
планета
Макемаке
Млн км
от Солнца
4500
5000
5500
6000
6500
7000
7500


Расстояние
от Солнца в а.е.
40 а.е.
50 а.е.
60 а.е.
70 а.е.
80 а.е.
90 а.е.
Планеты
Кометы
Карликовая
планета
Плутон
Хаумеа
Макемаке
Эрида
Млн км
от Солнца
5500
6000
6500
7000
7500
8000
8500
9000
9500
10000
10500
11000
11500
12000
12500
13000
13500
14000
14500

Задачи

Сколько лететь по Гомановской орбите от Земли до Венеры?
Найдите скорости в афелии и перигелии.

Задачи

Каков период системы из двух ЧД, массами 100 тыс. и 4,3*10^6 Мс? Орбиту считать круговой с а=200 а.е.

Задачи

Посчитать апо- и перицентрические расстояния и скорости Урана

Задачи

Сколько минимально по времени лететь по Гомановской орбите от Меркурия до Юпитера?