

# **Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Методы решения некоторых дифференциальных уравнений первого порядка**

## **План лекции**

1. Дифференциальные уравнения. Определение решения.
2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.
4. Уравнения с разделяющимися переменными.
5. Линейные уравнения. Метод подстановки. Метод вариации постоянной.
6. Уравнение Бернулли.
7. Уравнение в полных дифференциалах.

# Дифференциальные уравнения. Определение решения

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются *дифференциальными* (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.).

**Определение 1.** Дифференциальным уравнением называется уравнение

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{или} \quad y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

где  $x$  — независимая переменная,  $y(x)$  — неизвестная функция,  $n$  — порядок уравнения.

**Определение 2.** Решением дифференциального уравнения называется  $n$  раз дифференцируемая функция  $\varphi(x)$ , обращающая уравнение в тождество.

**Определение 3.** Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение называется порядком этого уравнения.

**Пример.**

а)  $y''' - 3y'' + 2y = 0$  - дифференциальное уравнение третьего порядка.

б)  $x^2y' + 5xy = y^2$  - дифференциальное уравнение первого порядка.

# Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

**Постановка задачи:** Материальная точка массы  $m$  замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости  $V$ . Найти зависимость скорости от времени.

**Решение:**

Пусть  $t$  – время, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки (независимая переменная).

Тогда  $V = V(t)$ - функция от  $t$ .

Воспользуемся Вторым законом Ньютона (основным законом механики)

$$F = m \cdot a,$$

где  $a = V'(t)$ -ускорение движущегося тела;

$F$ -результатирующая сила, действующая на тело в процессе движения;

$m$ -масса тела.

В нашем случае:  $F = -kV^2$ ,  $k > 0$ - коэффициент пропорциональности («-» указывает на то, что скорость тела уменьшается).

Тогда имеем:  $mV' = -kV^2$  или  $V' = -\frac{k}{m}V^2$ ,

где функция  $V(t)$ - решение дифференциального уравнения.

## Другие задачи

- **закон изменения массы радия в зависимости от времени** («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m,$$

где  $k > 0$  - коэффициент пропорциональности,  $m(t)$  - масса радия в момент  $t$ ;

- **«закон охлаждения тел»**, т. е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - t_0),$$

где  $T(t)$  - температура тела в момент времени  $t$ ,  $k$  - коэффициент пропорциональности,  $t_0$  - температура воздуха (среды охлаждения);

- **закон изменения давления воздуха** в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p,$$

где  $p(h)$  - атмосферное давление воздуха на высоте  $h$ ,  $k > 0$ .

# Дифференциальные уравнения первого порядка.

## Основные понятия

**Определение 4.** *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = F(x, y).$$

Примеры:  $y' = xe^y$ ,  $y' = \frac{y \ln x}{x}$ ,  $y' = x + y$

**Определение 5.** *Решением дифференциального уравнения первого порядка* называется функция  $y = \varphi(x)$  один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.

**Определение 6.** *Общим решением дифференциального уравнения* называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения задается формулой

$$y = \varphi(x, C) \quad \text{или} \quad \varphi = (x, y, C) = 0$$

**Определение 7.** *Частным решением дифференциального уравнения* называется общее решение при некотором значении  $C = C_0$  ( $C$ - постоянная величина).

## ● Дифференциальное уравнение первого порядка. Основные понятия

**Определение 8. Задачей Коши** мы будем называть - задачу отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка удовлетворяющего заданному начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

**Теорема 1. (существования и единственности решения задачи Коши):**

Если в уравнении  $y' = f(x; y)$  функция  $f(x; y)$  и ее частная производная  $f'_y(x; y)$  непрерывны в некоторой области  $D$  по  $y$ , содержащей точку  $(x_0; y_0)$ , то существует единственное решение  $y = \varphi(x)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

**Определение 9. Интегральной кривой (интегральной кривой поля направлений)** называется график решения дифференциального уравнения. Поэтому геометрический смысл общего решения дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых на плоскости  $xOy$ , в зависимости от произвольной постоянной величины  $C$ , а частное решение представляет собой одну интегральную кривую, которая проходит через точку с координатами  $(x_0; y_0)$ .

**Геометрический смысл теоремы 1** состоит в том, что при выполнении ее условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку  $(x_0; y_0)$ .

# Дифференциальное уравнение первого порядка.

## Основные понятия

**Пример:** Решить уравнение  $y' = x$ , при условии  $y(0) = 1$ .

**Решение.** Общим решением дифференциального уравнения является функция

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

где  $C$ -произвольная постоянная.

Используя условие  $y(0) = 1$ , имеем

$$1 = \frac{0^2}{2} + C \rightarrow C = 1.$$

Тогда частное решение задачи имеет следующий вид:

$$y_{\text{ч.р}} = \frac{x^2}{2} + 1$$

# Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 10.** Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

где  $f(x)$ ,  $g(y)$  непрерывные функции.

**Метод разделения переменных**

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Big| \cdot \frac{dx}{g(y)}$$

Имеем

$$\left[ \begin{array}{l} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \\ g(y) \neq 0 \\ g(y) = 0. \end{array} \right.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C,$$

откуда находим решение в виде

$$y = \varphi(x, C)$$

или

$$\varphi(x, y, C) = 0.$$



● **Уравнения с разделяющимися переменными**  
**Пример 1.** Решить уравнение

$$y' = xy^2$$

**Решение:**

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y^2}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{dy}{y^2} = xdx \\ y \neq 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Имеем, что  $y = 0$  - решение уравнения, проверяется подстановкой в уравнение.

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + 2C}$$

Отметим, что решение  $y = 0$  не получается из этой формулы ни при каком  $C$ , поэтому общее решение определяется их совокупностью

$$\left[ \begin{array}{l} y = -\frac{2}{x^2 + 2C} \\ y = 0 \end{array} \right.$$

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

**Пример 2.** Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{x}$$

**Решение:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\left[ \begin{cases} \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ y \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \right.$$

Имеем, что  $y = 0$  - решение уравнения, проверяется подстановкой в уравнение.

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Потенцируем:

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C}, e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|} \cdot e^C, \text{ пусть } e^C = C_1,$$

$$|y| = |x| \cdot C_1, \text{ пусть } C_1 = \pm C_2$$

$$y = x \cdot C_2.$$

Если  $C_2 = 0$ , то  $y = 0$ , поэтому общее решение уравнения  $y_{00} = x \cdot C_2$

# Линейные уравнения

**Определение: Уравнение вида**

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

где  $p(x), f(x)$  - непрерывные функции, называются **линейным дифференциальным уравнением первого порядка.**

Если  $f(x) = 0$ , то уравнение (1) называется **линейным однородным уравнением.**

Если  $f(x) \neq 0$ , то уравнение (1) называется **линейным неоднородным уравнением.**

## Метод подстановки

Рассмотрим уравнение вида:  $y' + p(x)y = f(x)$  (1)

Пусть  $y = u \cdot v$ , тогда  $y' = u'v + uv'$ .

Подставим  $y$  и  $y'$  в уравнение (1).

Имеем:  $u'v + uv' + p(x)u \cdot v = f(x)$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$$

$v' + p(x)v = 0$  – это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \left| \cdot \frac{dx}{v} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{dv}{v} = -p(x)dx, \\ v' \neq 0 \\ v = 0 \end{array} \right.$$

## Метод подстановки

Интегрируем: 
$$\int \frac{dv}{v} = - \int p(x)dx \rightarrow \ln|v| = - \int p(x)dx + C.$$

Потенцируем: 
$$e^{\ln|v|} = e^{- \int p(x)dx + C}$$

$$|v| = e^{- \int p(x)dx + C} \cdot C_1, \text{ где } C_1 = e^C.$$

Общее решение однородного уравнения

$$v = e^{- \int p(x)dx} \cdot C_2, \text{ где } C_2 = \pm C_1.$$

- **Метод подстановки**

Подставим в уравнение (1) значение  $v$ , получим

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 + u(-p(x)) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 + p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 = f(x)$$

$$u' = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot C_3, \text{ где } C_3 = \frac{1}{C_2}$$

$$u = \int f(x) e^{\int p(x)dx} \cdot C_3 dx + C_4,$$

Отсюда имеем:

$$y = u \cdot v = \left( \int f(x) e^{\int p(x)dx} \cdot C_3 dx + C_4 \right) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2$$



## Метод подстановки

Пример: Решить уравнение  $y' - y = e^x$

Решение:

$$y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uv = e^x$$

$$u'v + u(v' - v) = e^x$$

$$(v' - v) = 0 \rightarrow \frac{dv}{dx} = v \left| \frac{dx}{v} \right.$$

$$\frac{dv}{v} = dx$$

$$\ln|v| = x + C$$

$$|v| = e^x \cdot C_1, \text{ где } C_1 = e^C$$

$$v_{o.o} = e^x \cdot C_2, \text{ где } C_2 = \pm C,$$

$$u' \cdot e^x \cdot C_2 + u \cdot e^x \cdot C_2 - u \cdot e^x \cdot C_2 = e^x$$



## Метод подстановки

$$u'e^x C_2 = e^x \rightarrow u' C_2 = 1$$

$$u' = C_3, \quad \text{где} \quad C_3 = \frac{1}{C_2}$$

$$u = C_3 x + C_4$$

Отсюда имеем:

$$y = u \cdot v \rightarrow y_{\text{о.н}} = (C_3 x + C_4) \cdot e^x \cdot C_2$$

## Метод вариации постоянной

Рассмотрим уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

1. Пусть  $f(x) = 0$ , тогда уравнение (1) примет вид

$$y' + p(x)y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \left| \frac{dx}{y} \right.$$
$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Интегрируем:  $\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx \rightarrow \ln|y| = - \int p(x)dx + C_1$

Потенцируем:  $|y| = e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2, C_2 = e^{C_1}$

$$y_{0.0} = e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3, C_3 = \pm C_2,$$

где  $y_{0.0}$  – общее решение однородного уравнения.

## Метод вариации постоянной

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{o.H} = e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) \quad (2)$$

Подставим  $y_{o.H}$  в уравнение (1), получим:

$$(e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x))' + p(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$(-\int p(x)dx)' \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) + e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3'(x) + p(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$-p(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) + e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3'(x) + p(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3'(x) = f(x)$$

$$C_3'(x) = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

# Метод вариации постоянной



$$C_3(x) = f(x)e^{\int p(x)dx} dx \cdot C_4$$

3. Подставим  $C_3(x)$  в равенство (2), получим:

$$y_{o.n} = e^{-\int p(x)dx} \cdot [f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_4]$$

-общее решение неоднородного уравнения.

# Метод вариации постоянной

**Пример 1:** Решить уравнение:

$$y' + 3y = e^{2x}$$

1. Рассмотрим уравнение  $y' + 3y = 0$ . Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его и найдем общее решение однородного уравнения.

$$\frac{dy}{dx} = -3y \quad \Bigg| \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -3dx$$

$$\ln|y| = -3x + C_1$$

$$|y| = e^{-3x} \cdot C_2$$

$$y_{0.0} = e^{-3x} \cdot C_3$$

## Метод вариации постоянной

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{o.n} = e^{-3x} \cdot C_3(x)$$

Подставим  $y_{o.n}$  в искомое уравнение, получим:

$$-3e^{-3x} \cdot C_3(x) + e^{-3x} \cdot C_3'(x) + 3e^{-3x} \cdot C_3(x) = e^{2x}$$

$$e^{-3x} \cdot C_3'(x) = e^{2x}$$

$$C_3'(x) = e^{5x}$$

$$C_3(x) = \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C_4$$

Подставим  $C_3(x)$  в  $y_{o.n}$ , получим

$$y_{o.n} = e^{-3x} \cdot \left( \frac{1}{5} e^{5x} + C_4 \right)$$

## Метод вариации постоянной

**Пример 2.** Решить уравнение:

**Решение:**  $y' + y \cos x = \sin 2x$

1. Рассмотрим уравнение  $y' + y \cos x = 0$ . Решим его:

$$\frac{dy}{dx} = -y \cos x \quad \Bigg| \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -\cos x \, dx$$

$$\ln|y| = -\sin x + C_1$$

$$|y| = e^{-\sin x} \cdot C_2$$

$$y_{0.0} = e^{-\sin x} \cdot C_3$$

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{o.n} = e^{-\sin x} \cdot C_3(x)$$



## Метод вариации постоянной

Подставим  $y_{0.H}$  в искомое уравнение:

$$-\cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot C_3(x) + e^{-\sin x} \cdot C_3'(x) + \cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot C_3(x) = \sin 2x$$

$$e^{-\sin x} \cdot C_3'(x) = \sin 2x$$

$$C_3'(x) = e^{\sin x} \cdot \sin 2x$$

$$C_3(x) = \int e^{\sin x} \sin 2x \, dx = \int e^{\sin x} 2 \sin x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int e^t \cdot t \, dt = \left| \begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = e^t \end{array} \right| = 2 \left[ te^t - \int e^t dt \right] =$$

$$= 2te^t - 2e^t + C_4 = 2 \sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_4$$

Подставим  $C_3(x)$  в  $y_{0.H}$ , получим:

$$y_{0.H} = e^{-\sin x} [2 \sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_4] = 2 \sin x - 2 + C_4 \cdot e^{-\sin x}$$

## Уравнение Бернулли

**Определение 11.** Уравнение вида

$$y' + p(x)y = Q(x) \cdot y^n, n \neq 1$$

-называется **уравнением Бернулли**, где  $p(x)$ ,  $Q(x)$  - непрерывные функции.

Уравнение Бернулли сводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка, следующей подстановкой:

$$z = y^{1-n}$$

$$z' = (1 - n) \cdot y^{1-n-1} \cdot y'$$

$$z' = \frac{(1 - n)y'}{y^n} \rightarrow y' = \frac{y^n \cdot z'}{(1 - n)}$$

$$\frac{y^n \cdot z'}{(1 - n)} + p(x)y = Q(x) \cdot y^n \quad \Bigg| \cdot \frac{(1 - n)}{y^n}$$

$$z' + p(x)(1 - n) \cdot y^{1-n} = Q(x)(1 - n)$$

$$z' + p(x)(1 - n) \cdot z = Q(x)(1 - n)$$

-линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

# Уравнение Бернулли

**Пример:** Решить уравнение

**Решение:**

$$y' - 2xy = 3x^3 y^2 \quad (1)$$
$$p(x) = -2x, \quad Q(x) = 3x^3, \quad n = 2$$

$$z = y^{-1} = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{z}$$

$$z' = -y^2 \cdot y' = -\frac{y'}{y^2} \rightarrow y' = -y^2 \cdot z' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$-\frac{z'}{z^2} - 2x \cdot \frac{1}{z} = 3x^3 \cdot \frac{1}{z^2} \mid \cdot (-z^2)$$

$$z' + 2xz = -3x^3 \quad (2)$$

Метод вариации произвольной постоянной:

$$z' + 2xz = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -2xz \left| \frac{dx}{z} \right.$$

$$\frac{dz}{z} = -2x dx$$

## Уравнение Бернулли

$$\ln|z| = -x^2 + C$$

$$e^{\ln|z|} = e^{-x^2+C}$$

$$|z| = e^{-x^2} \cdot C_1, \text{ где } C_1 = e^C$$

$$z_{0,0} = e^{-x^2} \cdot C_2, \quad C_2 = \pm C_1$$

$$z_{0,H} = e^{-x^2} \cdot C_2(x)$$

Подставим  $z_{0,H}$  в уравнение (2):

$$-2x \cdot e^{-x^2} \cdot C_2(x) + e^{-x^2} \cdot C_2'(x) + 2x \cdot e^{-x^2} \cdot C_2(x) = -3x^3$$

$$e^{-x^2} \cdot C_2'(x) = -3x^3$$

$$C_2'(x) = -3x^3 \cdot e^{x^2}$$

## Уравнение Бернулли

- $$C_2(x) = \int -3x^3 \cdot e^{x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x^2=t \\ 2x dx=dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{3}{2} \int e^t t dt =$$
$$= \left. \begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = e^t \end{array} \right| = -\frac{3}{2} [te^t - e^t] = -\frac{3}{2} [x^2 e^{x^2} - e^{x^2}] + C_3$$

Тогда

$$\frac{1}{y} = z_{0.н} = e^{-x^2} \left[ \left( -\frac{3}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) \right) + C_3 \right]$$
$$y = \frac{1}{e^{-x^2} \left[ \left( -\frac{3}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) \right) + C_3 \right]}$$

## ● Уравнение в полных дифференциалах

**Определение 12.** Уравнение вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где правая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $F(x, y)$  в некоторой области называется **уравнением в полных дифференциалах**.

То есть:  $dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = F'_x dx + F'_y dy$

Если

$$P'_y = Q'_x, \text{ то есть } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

То

$$\begin{cases} F'_x = P(x, y) \rightarrow F(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y) \\ F'_y = Q(x, y) \rightarrow \left[ \int P(x, y)dx + C(y) \right]_y = Q(x, y) \rightarrow \end{cases}$$

$$C'(y) = Q(x, y) - \left[ \int P(x, y) dx \right]_y'$$

$$C(y) = \int (Q(x, y) - \left[ \int P(x, y) dx \right]_y') dy + C_1$$

Подставим  $C(y)$  в  $F(x, y)$ . Получим:

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + \int (Q(x, y) - \left[ \int P(x, y) dx \right]_y') dy + C_1$$

Данное уравнение принимает вид  $dF(x, y) = 0$ , а его общее решение определяется уравнением:

$$F(x, y) = C_2 \text{ или } \int P(x, y) dx + \int (Q(x, y) - \left[ \int P(x, y) dx \right]_y') dy + C_1 = C_2$$

пусть  $C_2 - C_1 = C_3$ , тогда

$$\int P(x, y) dx + \int (Q(x, y) - \left[ \int P(x, y) dx \right]_y') dy = C_3$$

# Уравнение в полных дифференциалах

**Пример:** Решить уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

**Решение:**

Здесь  $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ ,  $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$

Имеем  $\frac{\partial P}{\partial y} = P'_y = 12xy$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = Q'_x = 12xy$

то есть  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

То выражение  $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $F(x, y)$ .

То есть  $dF(x, y) = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$



## Уравнение в полных дифференциалах

Тогда

$$F'_x = P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$$

$$F(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2) dx = x^3 + 3x^2y^2 + C(y)$$

Но  $F'_y = Q(x, y)$ , тогда имеем:

$$(x^3 + 3x^2y^2 + C(y))'_y = 6x^2y + 4y^3$$

$$6x^2y + C'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$C'(y) = 4y^3$$

$$C(y) = \int 4y^3 dy = y^4 + C_1$$

Подставим  $C(y)$  в  $F(x, y)$ , получим :

$$F(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^4 + C_1$$

Данное уравнение принимает вид  $dF(x, y) = 0$ , а его общее решение определяется уравнением:

$$F(x, y) = C_2 \quad \text{или} \quad x^3 + 3x^2y + y^4 + C_1 = C_2$$

Пусть  $C_2 - C_1 = C_3$ , тогда  $x^3 + 3x^2y + y^4 = C_3$