

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Методы решения некоторых дифференциальных уравнений первого порядка

План лекции

1. Дифференциальные уравнения. Определение решения.
2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.
4. Уравнения с разделяющимися переменными.
5. Линейные уравнения. Метод подстановки. Метод вариации постоянной.
6. Уравнение Бернулли.
7. Уравнение в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения. Определение решения

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются *дифференциальными* (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.).

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется уравнение

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{или} \quad y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

где x — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, n — порядок уравнения.

Определение 2. Решением дифференциального уравнения называется n раз дифференцируемая функция $\varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество.

Определение 3. Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение называется порядком этого уравнения.

Пример.

а) $y''' - 3y'' + 2y = 0$ - дифференциальное уравнение третьего порядка.

б) $x^2y' + 5xy = y^2$ - дифференциальное уравнение первого порядка.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Постановка задачи: Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V . Найти зависимость скорости от времени.

Решение:

Пусть t – время, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки (независимая переменная).

Тогда $V = V(t)$ - функция от t .

Воспользуемся Вторым законом Ньютона (основным законом механики)

$$F = m \cdot a,$$

где $a = V'(t)$ -ускорение движущегося тела;

F -результатирующая сила, действующая на тело в процессе движения;

m -масса тела.

В нашем случае: $F = -kV^2$, $k > 0$ - коэффициент пропорциональности («-» указывает на то, что скорость тела уменьшается).

Тогда имеем: $mV' = -kV^2$ или $V' = -\frac{k}{m}V^2$,

где функция $V(t)$ - решение дифференциального уравнения.

Другие задачи

- **закон изменения массы радия в зависимости от времени** («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m,$$

где $k > 0$ - коэффициент пропорциональности, $m(t)$ - масса радия в момент t ;

- **«закон охлаждения тел»**, т. е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - t_0),$$

где $T(t)$ - температура тела в момент времени t , k - коэффициент пропорциональности, t_0 - температура воздуха (среды охлаждения);

- **закон изменения давления воздуха** в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p,$$

где $p(h)$ - атмосферное давление воздуха на высоте h , $k > 0$.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Основные понятия

Определение 4. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = F(x, y).$$

Примеры: $y' = xe^y$, $y' = \frac{y \ln x}{x}$, $y' = x + y$

Определение 5. *Решением дифференциального уравнения первого порядка* называется функция $y = \varphi(x)$ один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.

Определение 6. *Общим решением дифференциального уравнения* называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения задается формулой

$$y = \varphi(x, C) \quad \text{или} \quad \varphi = (x, y, C) = 0$$

Определение 7. *Частным решением дифференциального уравнения* называется общее решение при некотором значении $C = C_0$ (C - постоянная величина).

● Дифференциальное уравнение первого порядка. Основные понятия

Определение 8. Задачей Коши мы будем называть - задачу отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема 1. (существования и единственности решения задачи Коши):

Если в уравнении $y' = f(x; y)$ функция $f(x; y)$ и ее частная производная $f'_y(x; y)$ непрерывны в некоторой области D по y , содержащей точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Определение 9. Интегральной кривой (интегральной кривой поля направлений) называется график решения дифференциального уравнения. Поэтому геометрический смысл общего решения дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых на плоскости xOy , в зависимости от произвольной постоянной величины C , а частное решение представляет собой одну интегральную кривую, которая проходит через точку с координатами $(x_0; y_0)$.

Геометрический смысл теоремы 1 состоит в том, что при выполнении ее условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка.

Основные понятия

Пример: Решить уравнение $y' = x$, при условии $y(0) = 1$.

Решение. Общим решением дифференциального уравнения является функция

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

где C -произвольная постоянная.

Используя условие $y(0) = 1$, имеем

$$1 = \frac{0^2}{2} + C \rightarrow C = 1.$$

Тогда частное решение задачи имеет следующий вид:

$$y_{\text{ч.р}} = \frac{x^2}{2} + 1$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 10. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

где $f(x)$, $g(y)$ непрерывные функции.

Метод разделения переменных

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Big| \cdot \frac{dx}{g(y)}$$

Имеем

$$\left[\begin{array}{l} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \\ g(y) \neq 0 \\ g(y) = 0. \end{array} \right.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C,$$

откуда находим решение в виде

$$y = \varphi(x, C)$$

или

$$\varphi(x, y, C) = 0.$$

● **Уравнения с разделяющимися переменными**
Пример 1. Решить уравнение

$$y' = xy^2$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \quad \Bigg| \cdot \frac{dx}{y^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dy}{y^2} = xdx \\ y \neq 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Имеем, что $y = 0$ - решение уравнения, проверяется подстановкой в уравнение.

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + 2C}$$

Отметим, что решение $y = 0$ не получается из этой формулы ни при каком C , поэтому общее решение определяется их совокупностью

$$\left[\begin{array}{l} y = -\frac{2}{x^2 + 2C} \\ y = 0 \end{array} \right.$$

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{x}$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Bigg| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\left[\begin{cases} \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ y \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \right.$$

Имеем, что $y = 0$ - решение уравнения, проверяется подстановкой в уравнение.

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Потенцируем:

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C}, e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|} \cdot e^C, \text{ пусть } e^C = C_1,$$

$$|y| = |x| \cdot C_1, \text{ пусть } C_1 = \pm C_2$$

$$y = x \cdot C_2.$$

Если $C_2 = 0$, то $y = 0$, поэтому общее решение уравнения $y_{00} = x \cdot C_2$

Линейные уравнения

Определение: Уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

где $p(x), f(x)$ - непрерывные функции, называются **линейным дифференциальным уравнением первого порядка.**

Если $f(x) = 0$, то уравнение (1) называется **линейным однородным уравнением.**

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется **линейным неоднородным уравнением.**

Метод подстановки

Рассмотрим уравнение вида: $y' + p(x)y = f(x)$ (1)

Пусть $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставим y и y' в уравнение (1).

Имеем: $u'v + uv' + p(x)u \cdot v = f(x)$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$$

$v' + p(x)v = 0$ – это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \left| \cdot \frac{dx}{v} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dv}{v} = -p(x)dx, \\ v' \neq 0 \\ v = 0 \end{array} \right.$$

Метод подстановки

Интегрируем:
$$\int \frac{dv}{v} = - \int p(x)dx \rightarrow \ln|v| = - \int p(x)dx + C.$$

Потенцируем:
$$e^{\ln|v|} = e^{- \int p(x)dx + C}$$

$$|v| = e^{- \int p(x)dx + C} \cdot C_1, \text{ где } C_1 = e^C.$$

Общее решение однородного уравнения

$$v = e^{- \int p(x)dx} \cdot C_2, \text{ где } C_2 = \pm C_1.$$

- ## Метод подстановки

Подставим в уравнение (1) значение v , получим

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 + u(-p(x)) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 + p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 = f(x)$$

$$u' = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot C_3, \text{ где } C_3 = \frac{1}{C_2}$$

$$u = \int f(x) e^{\int p(x)dx} \cdot C_3 dx + C_4,$$

Отсюда имеем:

$$y = u \cdot v = \left(\int f(x) e^{\int p(x)dx} \cdot C_3 dx + C_4 \right) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2$$

Метод подстановки

Пример: Решить уравнение $y' - y = e^x$

Решение:

$$y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uv = e^x$$

$$u'v + u(v' - v) = e^x$$

$$(v' - v) = 0 \rightarrow \frac{dv}{dx} = v \left| \frac{dx}{v} \right.$$

$$\frac{dv}{v} = dx$$

$$\ln|v| = x + C$$

$$|v| = e^x \cdot C_1, \text{ где } C_1 = e^C$$

$$v_{0.0} = e^x \cdot C_2, \text{ где } C_2 = \pm C,$$

$$u' \cdot e^x \cdot C_2 + u \cdot e^x \cdot C_2 - u \cdot e^x \cdot C_2 = e^x$$



Метод подстановки

$$u'e^x C_2 = e^x \rightarrow u' C_2 = 1$$

$$u' = C_3, \quad \text{где} \quad C_3 = \frac{1}{C_2}$$

$$u = C_3 x + C_4$$

Отсюда имеем:

$$y = u \cdot v \rightarrow y_{\text{о.н}} = (C_3 x + C_4) \cdot e^x \cdot C_2$$

Метод вариации постоянной

Рассмотрим уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

1. Пусть $f(x) = 0$, тогда уравнение (1) примет вид

$$y' + p(x)y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \left| \frac{dx}{y} \right.$$
$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx \rightarrow \ln|y| = - \int p(x)dx + C_1$

Потенцируем: $|y| = e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2, C_2 = e^{C_1}$

$$y_{0.0} = e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3, C_3 = \pm C_2,$$

где $y_{0.0}$ – общее решение однородного уравнения.

Метод вариации постоянной

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{o.n} = e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) \quad (2)$$

Подставим $y_{o.n}$ в уравнение (1), получим:

$$(e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x))' + p(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$(-\int p(x)dx)' \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) + e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3'(x) + p(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$-p(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) + e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3'(x) + p(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot C_3'(x) = f(x)$$

$$C_3'(x) = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Метод вариации постоянной



$$C_3(x) = f(x)e^{\int p(x)dx} dx \cdot C_4$$

3. Подставим $C_3(x)$ в равенство (2), получим:

$$y_{o.n} = e^{-\int p(x)dx} \cdot [f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_4]$$

-общее решение неоднородного уравнения.

Метод вариации постоянной

Пример 1: Решить уравнение:

$$y' + 3y = e^{2x}$$

1. Рассмотрим уравнение $y' + 3y = 0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его и найдем общее решение однородного уравнения.

$$\frac{dy}{dx} = -3y \quad \left| \frac{dx}{y} \right.$$

$$\frac{dy}{y} = -3dx$$

$$\ln|y| = -3x + C_1$$

$$|y| = e^{-3x} \cdot C_2$$

$$y_{0.0} = e^{-3x} \cdot C_3$$

Метод вариации постоянной

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{o.n} = e^{-3x} \cdot C_3(x)$$

Подставим $y_{o.n}$ в искомое уравнение, получим:

$$-3e^{-3x} \cdot C_3(x) + e^{-3x} \cdot C_3'(x) + 3e^{-3x} \cdot C_3(x) = e^{2x}$$

$$e^{-3x} \cdot C_3'(x) = e^{2x}$$

$$C_3'(x) = e^{5x}$$

$$C_3(x) = \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C_4$$

Подставим $C_3(x)$ в $y_{o.n}$, получим

$$y_{o.n} = e^{-3x} \cdot \left(\frac{1}{5} e^{5x} + C_4 \right)$$

Метод вариации постоянной

Пример 2. Решить уравнение:

Решение:

$$y' + y \cos x = \sin 2x$$

1. Рассмотрим уравнение $y' + y \cos x = 0$. Решим его:

$$\frac{dy}{dx} = -y \cos x \quad \Bigg| \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -\cos x \, dx$$

$$\ln|y| = -\sin x + C_1$$

$$|y| = e^{-\sin x} \cdot C_2$$

$$y_{0.0} = e^{-\sin x} \cdot C_3$$

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{0.H} = e^{-\sin x} \cdot C_3(x)$$

Метод вариации постоянной

Подставим $y_{0.H}$ в искомое уравнение:

$$-\cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot C_3(x) + e^{-\sin x} \cdot C_3'(x) + \cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot C_3(x) = \sin 2x$$

$$e^{-\sin x} \cdot C_3'(x) = \sin 2x$$

$$C_3'(x) = e^{\sin x} \cdot \sin 2x$$

$$C_3(x) = \int e^{\sin x} \sin 2x \, dx = \int e^{\sin x} 2 \sin x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int e^t \cdot t \, dt = \left| \begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = e^t \end{array} \right| = 2 \left[te^t - \int e^t dt \right] =$$

$$= 2te^t - 2e^t + C_4 = 2 \sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_4$$

Подставим $C_3(x)$ в $y_{0.H}$, получим:

$$y_{0.H} = e^{-\sin x} [2 \sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_4] = 2 \sin x - 2 + C_4 \cdot e^{-\sin x}$$

Уравнение Бернулли

Определение 11. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = Q(x) \cdot y^n, n \neq 1$$

-называется **уравнением Бернулли**, где $p(x)$, $Q(x)$ - непрерывные функции.

Уравнение Бернулли сводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка, следующей подстановкой:

$$z = y^{1-n}$$

$$z' = (1 - n) \cdot y^{1-n-1} \cdot y'$$

$$z' = \frac{(1 - n)y'}{y^n} \rightarrow y' = \frac{y^n \cdot z'}{(1 - n)}$$

$$\frac{y^n \cdot z'}{(1 - n)} + p(x)y = Q(x) \cdot y^n \quad \Bigg| \cdot \frac{(1 - n)}{y^n}$$

$$z' + p(x)(1 - n) \cdot y^{1-n} = Q(x)(1 - n)$$

$$z' + p(x)(1 - n) \cdot z = Q(x)(1 - n)$$

-линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Уравнение Бернулли

Пример: Решить уравнение

Решение:

$$y' - 2xy = 3x^3y^2 \quad (1)$$
$$p(x) = -2x, \quad Q(x) = 3x^3, \quad n = 2$$

$$z = y^{-1} = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{z}$$

$$z' = -y^2 \cdot y' = -\frac{y'}{y^2} \rightarrow y' = -y^2 \cdot z' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$-\frac{z'}{z^2} - 2x \cdot \frac{1}{z} = 3x^3 \cdot \frac{1}{z^2} \mid \cdot (-z^2)$$

$$z' + 2xz = -3x^3 \quad (2)$$

Метод вариации произвольной постоянной:

$$z' + 2xz = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -2xz \left| \frac{dx}{z} \right.$$

$$\frac{dz}{z} = -2xdx$$

Уравнение Бернулли

$$\ln|z| = -x^2 + C$$

$$e^{\ln|z|} = e^{-x^2+C}$$

$$|z| = e^{-x^2} \cdot C_1, \text{ где } C_1 = e^C$$

$$z_{0,0} = e^{-x^2} \cdot C_2, \quad C_2 = \pm C_1$$

$$z_{0,H} = e^{-x^2} \cdot C_2(x)$$

Подставим $z_{0,H}$ в уравнение (2):

$$-2x \cdot e^{-x^2} \cdot C_2(x) + e^{-x^2} \cdot C_2'(x) + 2x \cdot e^{-x^2} \cdot C_2(x) = -3x^3$$

$$e^{-x^2} \cdot C_2'(x) = -3x^3$$

$$C_2'(x) = -3x^3 \cdot e^{x^2}$$

Уравнение Бернулли

- $$C_2(x) = \int -3x^3 \cdot e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2=t \\ 2x dx=dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{3}{2} \int e^t t dt =$$
$$= \left| \begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = e^t \end{array} \right| = -\frac{3}{2} [te^t - e^t] = -\frac{3}{2} [x^2 e^{x^2} - e^{x^2}] + C_3$$

Тогда

$$\frac{1}{y} = z_{0.н} = e^{-x^2} \left[\left(-\frac{3}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) \right) + C_3 \right]$$
$$y = \frac{1}{e^{-x^2} \left[\left(-\frac{3}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) \right) + C_3 \right]}$$

● Уравнение в полных дифференциалах

Определение 12. Уравнение вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где правая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$ в некоторой области называется **уравнением в полных дифференциалах**.

То есть: $dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = F'_x dx + F'_y dy$

Если

$$P'_y = Q'_x, \text{ то есть } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

То

$$\begin{cases} F'_x = P(x, y) \rightarrow F(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y) \\ F'_y = Q(x, y) \rightarrow \left[\int P(x, y)dx + C(y) \right]_y = Q(x, y) \rightarrow \end{cases}$$

$$C'(y) = Q(x, y) - \left[\int P(x, y) dx \right]_y'$$

$$C(y) = \int (Q(x, y) - \left[\int P(x, y) dx \right]_y') dy + C_1$$

Подставим $C(y)$ в $F(x, y)$. Получим:

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + \int (Q(x, y) - \left[\int P(x, y) dx \right]_y') dy + C_1$$

Данное уравнение принимает вид $dF(x, y) = 0$, а его общее решение определяется уравнением:

$$F(x, y) = C_2 \text{ или } \int P(x, y) dx + \int (Q(x, y) - \left[\int P(x, y) dx \right]_y') dy + C_1 = C_2$$

пусть $C_2 - C_1 = C_3$, тогда

$$\int P(x, y) dx + \int (Q(x, y) - \left[\int P(x, y) dx \right]_y') dy = C_3$$

Уравнение в полных дифференциалах

Пример: Решить уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

Решение:

Здесь $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$

Имеем $\frac{\partial P}{\partial y} = P'_y = 12xy$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = Q'_x = 12xy$

то есть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

То выражение $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$.

То есть $dF(x, y) = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$

Уравнение в полных дифференциалах

Тогда

$$F'_x = P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$$

$$F(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2 + C(y)$$

Но $F'_y = Q(x, y)$, тогда имеем:

$$(x^3 + 3x^2y^2 + C(y))'_y = 6x^2y + 4y^3$$

$$6x^2y + C'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$C'(y) = 4y^3$$

$$C(y) = \int 4y^3 dy = y^4 + C_1$$

Подставим $C(y)$ в $F(x, y)$, получим :

$$F(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^4 + C_1$$

Данное уравнение принимает вид $dF(x, y) = 0$, а его общее решение определяется уравнением:

$$F(x, y) = C_2 \quad \text{или} \quad x^3 + 3x^2y + y^4 + C_1 = C_2$$

Пусть $C_2 - C_1 = C_3$, тогда $x^3 + 3x^2y + y^4 = C_3$