

Интерполяционный кубический сплайн (ИКС)

Определение

Пусть $\{x_i\}$ - интерполяционная сетка на отрезке $[a, b]$ и (x_i, y_i) - точки данных. Интерполяционным кубическим сплайном называется функция $S(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. Функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными $S'(x)$ и $S''(x)$;
2. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ $S(x)$ совпадает с некоторым алгебраическим многочленом третьей степени

$$P_{3,k}(x) = a_0 + a_1(x - x_{k-1}) + a_2(x - x_{k-1})^2 + a_3(x - x_{k-1})^3$$

Две формы записи ИКС

$$S(x) \equiv P_k(x) = \sum_{i=0}^3 a_i^{(k)} (x_k - x)^i =$$

$$a_0^{(k)} + a_1^{(k)} (x_k - x) + a_2^{(k)} (x_k - x)^2 + a_3^{(k)} (x_k - x)^3$$

$$S(x) \equiv P_k(x) = m_{k-1} \frac{(x-x_k)^2 (x-x_{k-1})}{h_k^2} + m_k \frac{(x-x_{k-1})^2 (x-x_k)}{h_k^2} +$$
$$+ y_{k-1} \frac{(x-x_k)^2 (2(x-x_{k-1})+h_k)}{h_k^3} + y_k \frac{(x-x_{k-1})^2 (2(x_k-x)+h_k)}{h_k^3}$$

Величины m_k называются наклонами сплайна

Идея алгоритма построения ИКС

Для непрерывности $S''(x)$ m_k следует выбирать так, чтобы для внутренних узлов были выполнены:

$$P''_k(x_k) = \frac{2m_{k-1}}{h_k} + \frac{4m_k}{h_k} - 6 \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k^2} \right)$$

$$P''_{k+1}(x_k) = -\frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{4m_k}{h_{k+1}} + 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}^2} \right)$$

Идея алгоритма построения ИКС

Получим для внутренних узлов сетки

$$h_k^{-1}m_{k-1} + 2(h_k^{-1} + h_{k+1}^{-1})m_k + h_{k+1}^{-1}m_{k+1} = \\ 3(h_k^{-2}(y_k - y_{k-1}) + h_{k+1}^{-2}(y_{k+1} - y_k))$$

В частном случае, для равномерной сетки при $h=1$, уравнения принимают вид

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = 3(y_{k+1} - y_{k-1})$$

$$k=1,2,\dots,N-1$$

Граничные условия «естественный сплайн»

Число уравнений $n - 1$, число неизвестных $n + 1$, необходимы два дополнительных условия.

Наиболее популярные варианты:

1) «естественный» сплайн ($S''(a) = 0, S''(b) = 0$)

$$-\frac{2m_1}{h_1} - \frac{4m_0}{h_1} + 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1^2}\right) = 0$$
$$\frac{2m_{N-1}}{h_N} + \frac{4m_N}{h_N} - 6\left(\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N^2}\right) = 0$$

В частном случае, для равномерной сетки с шагом $h=1$,

$$m_1 + 2m_0 = 3(y_1 - y_0)$$
$$m_{N-1} + 2m_N = 3(y_N - y_{N-1})$$

Граничные условия «отсутствие узла»

2) сплайн с условием «отсутствие узла»

$$P'''_1(x_1) = P'''_2(x_1), P'''_N(x_{N-1}) = P'''_{N-1}(x_{N-1}),$$

$$2h_1^{-3} (y_0 - y_1) + h_1^{-2} (m_0 - m_1) = 2h_2^{-3} (y_1 - y_2) + h_2^{-2} (m_1 - m_2)$$

$$\begin{aligned} 2h_{N-1}^{-3} (y_{N-2} - y_{N-1}) + h_{N-1}^{-2} (m_{N-2} - m_{N-1}) &= \\ &= 2h_N^{-3} (y_{N-1} - y_N) + h_N^{-2} (m_{N-1} - m_N) \end{aligned}$$

В частном случае, для равномерной сетки с шагом $h=1$,

$$\begin{aligned} m_0 - m_2 &= 2(2y_1 - y_0 - y_2) \\ m_{N-2} - m_N &= 2(2y_{N-1} - y_N - y_{N-2}) \end{aligned}$$

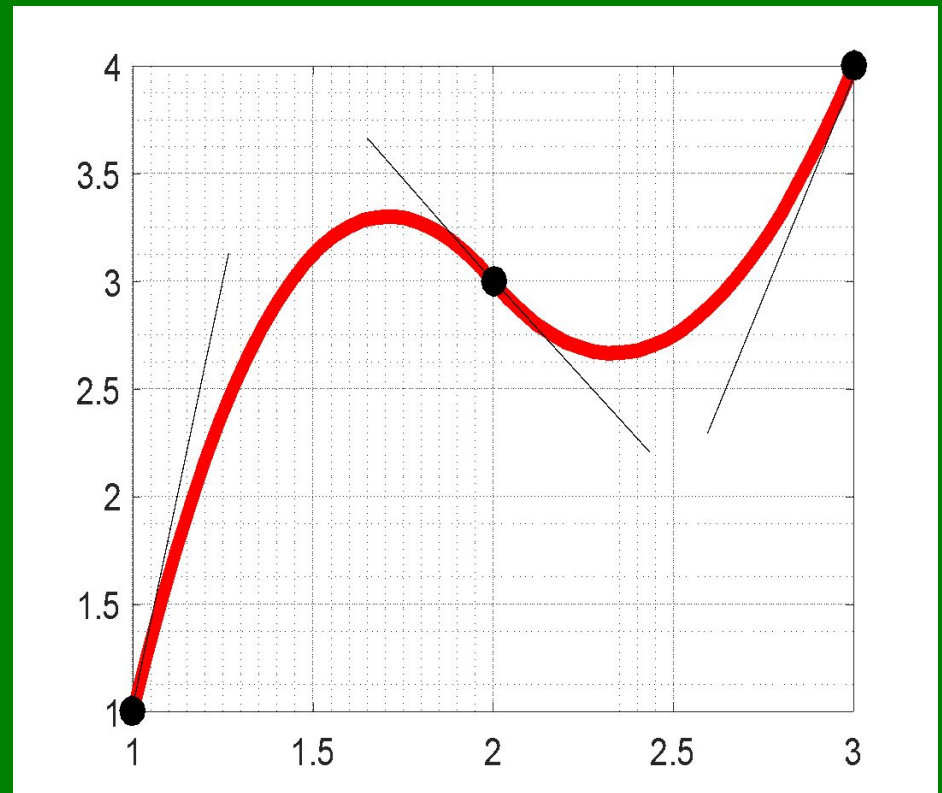
Пример 3. Построение ИКС

x	1	2	3
y	1.0	3.0	4.0

Построить «естественный» сплайн.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Пример 4. Построение ИКС

x	1	2	3
y	1.0	3.0	5.0

Построить сплайн с условием «отсутствия узла».

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha + 6 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

