Интерполяционный кубический сплайн (ИКС)

Определение

Пусть $\{x_i\}$ - интерполяционная сетка на отрезке [a,b] и (x_i,y_i) - точки данных. Интерполяционным кубическим сплайном называется функция S(x) , обладающая следующими свойствами:

1. Функция S(x) непрерывна на отрезке [a,b] вместе о своими производными S′(x) и S′′(x);

2. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ S(x) совпадает с некоторым алгебраическим многочленом третьей степени

$$P_{3,k}(x)=a_0+a_1(x-x_{k-1})+a_2(x-x_{k-1})^2+a_3(x-x_{k-1})^3$$

Две формы записи ИКС

$$S(x) \equiv P_k(x) = \sum_{k=0}^{3} a_i^{(k)} (x_k - x)^i =$$

$$a_0^{(k)} + a_1^{(k)} (x_k - x) + a_2^{(k)} (x_k - x)^2 + a_3^{(k)} (x_k - x)^3$$

$$S(x) \equiv P_k(x) = m_{k-1} \frac{(x - x_k)^2 (x - x_{k-1})}{h_k{}^2} + m_k \frac{(x - x_{k-1})^2 (x - x_k)}{h_k{}^2} +$$

$$+ y_{k-1} \frac{(x - x_k)^2 (2(x - x_{k-1}) + h_k)}{h_k{}^3} + y_k \frac{(x - x_{k-1})^2 (2(x_k - x) + h_k)}{h_k{}^3}$$

Величины m_k называются наклонами сплайна

Идея алгоритма построения ИКС

Для непрерывности S''(x) m_k следует выбирать так,

чтобы для внутренних узлов сетки выполнялось

$$P''_k(x_k) = \frac{2m_{k-1}}{h_k} + \frac{4m_k}{h_k} - 6\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{{h_k}^2}\right)$$

$$P''_{k+1}(x_k) = -\frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{4m_k}{h_{k+1}} + 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{{h_{k+1}}^2}\right)$$

Идея алгоритма построения ИКС

Получим для внутренних узлов сетки

$$h_k^{-1} m_{k-1} + 2\left(h_k^{-1} + h_{k+1}^{-1}\right) m_k + h_{k+1}^{-1} m_{k+1} =$$

$$3\left(h_k^{-2}(y_k - y_{k-1}) + h_{k+1}^{-2}(y_{k+1} - y_k)\right)$$

В частном случае, для равномерной сетки при h=1, уравнения принимают вид

$$\boxed{m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = 3(y_{k+1} - y_{k-1})}$$

k=1,2,...,N-1

Граничные условия «естественный сплайн»

Число уравнений n – 1, число неизвестных n + 1, необходимы два дополнительных условия.

Наиболее популярные варианты:

1) «естественный» сплайн ($S''(a) = 0$, $S''(b) = 0$)

$$-\frac{2m_1}{h_1}-\frac{4m_0}{h_1}+6\left(\frac{y_1-y_0}{h_1^{\,2}}\right)=0$$

$$\frac{2m_{N-1}}{h_N}+\frac{4m_N}{h_N}-6\left(\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N^{\,2}}\right)=0$$

В частном случае, для равномерной сетки с шагом h=1,

$$m_1+2m_0=3(y_1-y_0)$$

$$m_{N-1}+2m_N=3(y_N-y_{N-1})$$

Граничные условия «отсутствие узла»

2) сплайн с условием «отсутствие узла»

$$P'''_1(x_1) = P'''_2(x_1),\ P'''_N(x_{N-1}) = P'''_{N-1}(x_{N-1}),$$

$$2h_1^{-3}\,(y_0-y_1) + h_1^{-2}\,(m_0-m_1) = 2h_2^{-3}\,(y_1-y_2) + h_2^{-2}\,(m_1-m_2)$$

$$2h_{N-1}^{-3}\,(y_{N-2}-y_{N-1}) + h_{N-1}^{-2}\,(m_{N-2}-m_{N-1}) =$$

$$=2h_N^{-3}\,(y_{N-1}-y_N) + h_N^{-2}\,(m_{N-1}-m_N)$$

В частном случае, для равномерной сетки с шагом h=1,

$$\boxed{\begin{aligned} m_0 - m_2 &= 2(2y_1 - y_0 - y_2) \\ m_{N-2} - m_N &= 2(2y_{N-1} - y_N - y_{N-2}) \end{aligned}}$$

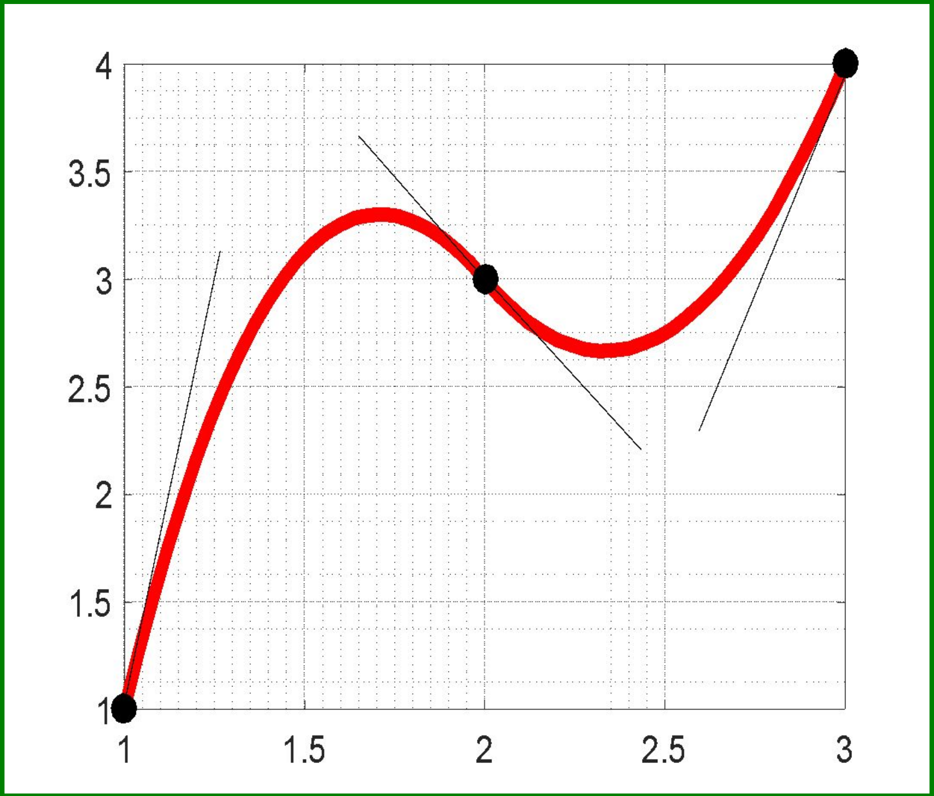
Пример 3. Построение ИКС

x	1	2	3
y	1.0	3.0	4.0

Построить «естественный» сплайн.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Пример 4. Построение ИКС

x	1	2	3
y	1.0	3.0	5.0

Построить сплайн с условием «отсутствие узла».

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha + 6 \\ \alpha \end{pmatrix}$$