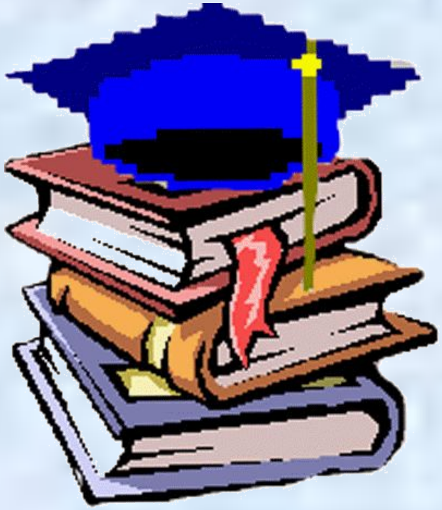
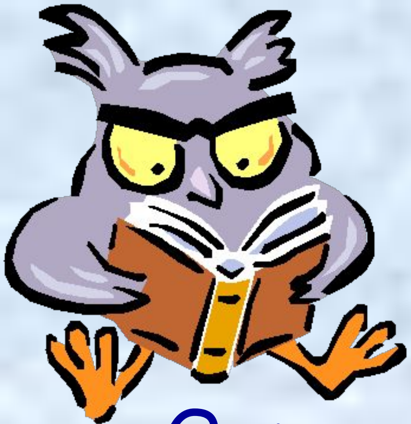
Арифметическая прогрессия

Содержание

- Понятие арифметической   прогрессии
- Формула   Формула n   Формула n-го члена арифметической прогрессии
- Сумма первых   Сумма первых n   Сумма первых n членов арифметической прогрессии
- Тест



Понятие арифметической прогрессии



Определение.

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют **арифметической прогрессией**, а число d – **разностью арифметической прогрессии**.

Пример 1. 1, 3, 5, 7, 9, 11, …- это арифметическая прогрессия, у которой

$$a_1 = 1, d = 2$$

Пример 2. 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4, … - это арифметическая прогрессия, у которой

$$a_1 = 20, d = -3$$

Пример 3. 8, 8, 8, 8, 8, … - это арифметическая прогрессия, у которой

$$a_1 = 8, d = 0$$

Таким образом, арифметическая прогрессия – это числовая последовательность (a_n) , заданная рекуррентно соотношениями

$$a_1 = a \quad , \quad a_n = a_{n-1} + d$$

$$(n = 2,3,4,...)$$

запомни

Арифметическая прогрессия является **возрастающей** последовательностью, если $d>0$, и **убывающей**, если $d<0$.

Для обозначения арифметической прогрессии используется знак $\div$.

Формула n-го члена арифметической прогрессии

Рассмотрим арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ с разностью d.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

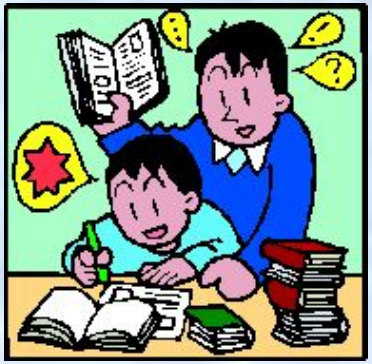
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

и т.д.

Для любого номера справедливо равенство

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Это формула n-го члена арифметической прогрессии.



Пример. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Известно, что $a_1 = 5, d = 4.$ Найти $a_{22}.$

Положим n=22, воспользуемся формулой $a_n = a_1 + (n-1)d$, получим

$$a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 * 4 = 89.$$

Перепишем формулу n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$ в виде

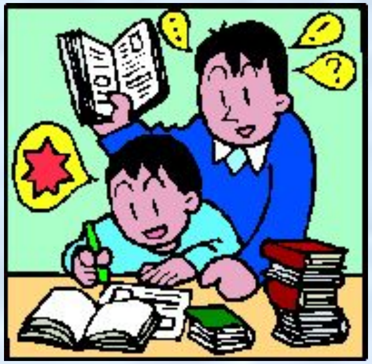
$$a_n = dn + (a_1 - d)$$

Введем обозначения:

$$a_n = y, a_1 - d = m$$

Получим $$y = dn + m$$

Подробнее $$y = dx + m, x \in N.$$



Пример. , 3, 5, 7, 9, 11, … - арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 1, d = 2$.

Составим формулу n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$a_n = 1 + (n-1) * 2,$$

$$a_n = 2n - 1$$

Арифметическую прогрессию рассматривают как линейную функцию y=dx+m, заданную на множестве N натуральных чисел.

Угловой коэффициент этой линейной функции равен d – разности арифметической прогрессии.

Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии

Пусть $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ - конечная арифметическая прогрессия

S_n - сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n)

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ - сумма членов прогрессии в порядке возрастания их номеров.

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$ - сумма членов прогрессии в порядке убывания их номеров.

Сложим эти равенства, группируя попарно слагаемые, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2})$$

$$+ \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой из скобок записана сумма, равная сумме $a_1 + a_n$.

Всего таких скобок n. Следовательно,

$$2S = (a_1 + a_n)n,$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

запомни

Формула суммы n членов арифметической прогрессии

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Пример.

Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Известно, что $a_1 = 5, d = 4, n = 22.$

Найти S_n, т.е. S_{22}.

Решение. Имеем

$$a_n = a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89.$$

Значит,

$$S_{22} = \frac{22 \cdot (a_1 + a_{22})}{2} = 11 \cdot (5 + 89) = 1034.$$

Интересно!

С формулой $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ связан один из эпизодов биографии К.Гаусса. Однажды на уроке учитель, чтобы занять первоклассников пока он будет заниматься с учениками третьего класса, велел сложить все числа от 1 до 100, надеясь, что это займет много времени. Но маленький Гаусс сразу сообразил, что 1+100=101, 2+99=101 и т.д. и таких чисел будет 50. осталось умножить 101*50. Это мальчик сделал в уме. Едва учитель закончил чтение условия, он предъявил ответ. Изумленный учитель понял, что это самый способный ученик в его практике.

1. Из предложенных последовательностей выберите ту, которая является арифметической прогрессией

а) 2; 4; 8; 16 а) 2; 4; 8; 16 б) -7; -7; -7; -7 а) 2; 4; 8; 16
б) -7; -7; -7; -7 в) 1; 3; 9; 27

2. Какая из данных арифметических прогрессий является возрастающей?

а) 15; 12; 9; 6 а) 15; 12; 9; 6 б) 3; 3; 3; 3 а) 15; 12; 9; 6
б) 3; 3; 3; 3 в) 5; 8; 11; 14

3. Найдите a_5, если $a_1 = -7, d = 3$.

а) 5 а) 5 б) 13 а) 5 б) 13
в) -21

4. Найдите a_1, если $a_4 = 18, d = -3$.

а) 54 а) 54 б) 27 а) 54 б) 27
в) 9

5. Известно, что $a_1 = -2, d = 3, a_n = 118$. Найдите n.

а) 41 а) 41 б) -23 а) 41 б) -23
в) 23

6. Известно, что $a_1 = 7, a_{15} = -35$. Найдите d.

а) -3 а) -3 б) 3 а) -3 б) 3
в) 2

1. Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 8, d = 3$.

а) 294 а) 294 б) 41 а) 294 б) 41
в) 57

2. Известно, что $a_1 = 7, n = 8, S_8 = 14$. Найдите d.

а) 5 а) 5 б) 3 а) 5 б) 3
в) 9

3. Найдите сумму первых четырнадцати членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 5n - 1$.

а) 497 а) 497 б) 511 а) 497 б) 511 в) 1022