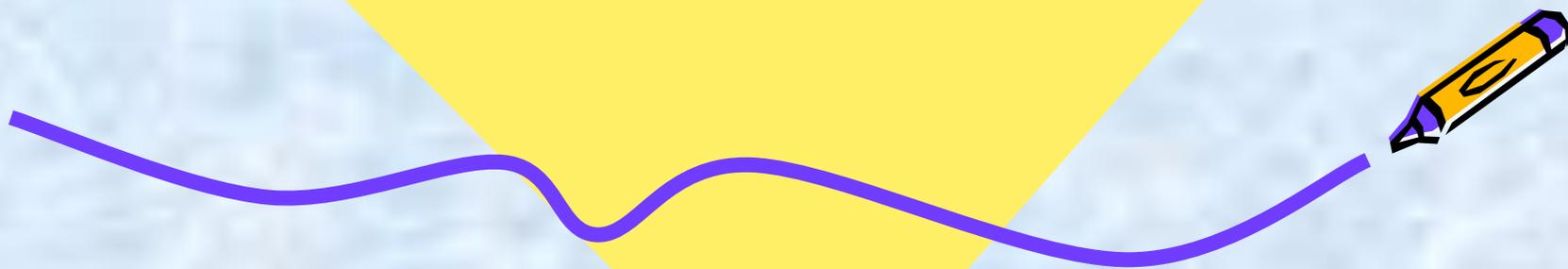


Арифметическая прогрессия



Содержание

- Понятие арифметической прогрессии
- Формула Формула n Формула n -го члена
арифметической прогрессии
- Сумма первых Сумма первых n Сумма
первых n членов арифметической прогрессии
- Тест





Понятие арифметической прогрессии





Определение.

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d , называют арифметической прогрессией, а число d - разностью арифметической прогрессии.



Пример 1. 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... - это арифметическая прогрессия, у которой

$$a_1 = 1, d = 2$$

Пример 2. 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4, ... - это арифметическая прогрессия, у которой

$$a_1 = 20, d = -3$$

Пример 3. 8, 8, 8, 8, 8, ... - это арифметическая прогрессия, у которой

$$a_1 = 8, d = 0$$



Таким образом, арифметическая прогрессия - это числовая последовательность (a_n) , заданная рекуррентно соотношениями

$$a_1 = a \quad , \quad a_n = a_{n-1} + d \\ (n = 2, 3, 4, \dots)$$



запомни



Арифметическая прогрессия является **возрастающей** последовательностью, если $d > 0$, и **убывающей**, если $d < 0$.

Для обозначения арифметической прогрессии используется знак \div .





Формула n -го члена арифметической прогрессии



Рассмотрим арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ с разностью d .

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \quad \text{И Т.Д.}$$





Для любого номера справедливо
равенство



$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Это формула n -го члена
арифметической прогрессии.





Пример. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
Известно, что $a_1 = 5, d = 4$. Найти a_{22} .
Положим $n=22$, воспользуемся формулой $a_n = a_1 + (n-1)d$, получим

$$a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 * 4 = 89.$$



Перепишем формулу n -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{в виде}$$

$$a_n = dn + (a_1 - d)$$

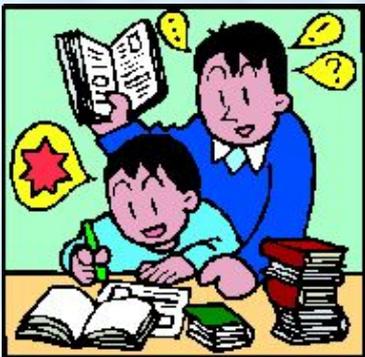
Введем обозначения:

$$a_n = y, a_1 - d = m$$

Получим $y = dn + m$

Подробнее $y = dx + m, x \in N.$





Пример. , 3, 5, 7, 9, 11, ... -

арифметическая прогрессия, у
которой $a_1 = 1, d = 2$.

Составим формулу n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

$$a_n = 1 + (n - 1) * 2,$$

$$a_n = 2n - 1$$





Арифметическую прогрессию рассматривают как линейную функцию $y = dx + m$, заданную на множестве \mathbb{N} натуральных чисел.

Угловым коэффициентом этой линейной функции равен d – разности арифметической прогрессии.





Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии



Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ -
конечная арифметическая прогрессия

S_n - сумма первых n членов
арифметической прогрессии (a_n)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n -$$

сумма членов прогрессии в порядке
возрастания их номеров.

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 -$$

сумма членов прогрессии в порядке
убывания их номеров.





Сложим эти равенства, группируя попарно слагаемые, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой из скобок записана сумма, равная сумме $a_1 + a_n$.

Всего таких скобок n . Следовательно,

$$2S = (a_1 + a_n)n,$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$



запомни



Формула суммы n членов арифметической прогрессии

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$



Пример.

Дана конечная арифметическая

прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Известно, что $a_1 = 5, d = 4, n = 22$.

Найти S_n , т.е. S_{22} .

Решение. Имеем

$$a_n = a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89.$$

Значит,

$$S_{22} = \frac{22 \cdot (a_1 + a_{22})}{2} = 11 \cdot (5 + 89) = 1034.$$



Интересно!



С формулой $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ связан один из эпизодов биографии К.Гаусса. Однажды на уроке учитель, чтобы занять первоклассников пока он будет заниматься с учениками третьего класса, велел сложить все числа от 1 до 100, надеясь, что это займет много времени. Но маленький Гаусс сразу сообразил, что $1+100=101$, $2+99=101$ и т.д. и таких чисел будет 50. осталось умножить $101 \cdot 50$. Это мальчик сделал в уме. Едва учитель закончил чтение условия, он предъявил ответ. Изумленный учитель понял, что это самый способный ученик в его практике.





1. Из предложенных последовательностей выберите ту, которая является арифметической прогрессией

- а) 2; 4; 8; 16 б) -7; -7; -7; -7 а) 2; 4; 8; 16
 б) -7; -7; -7; -7 в) 1; 3; 9; 27

2. Какая из данных арифметических прогрессий является возрастающей?

- а) 15; 12; 9; 6 б) 3; 3; 3; 3 а) 15; 12; 9; 6
 б) 3; 3; 3; 3 в) 5; 8; 11; 14

3. Найдите a_1 , если

- а) 5 б) 13 а) 5 б) 13
 в) -21

4. Найдите a_n , если $a_1 = -2, d = 3, a_n = 118$.

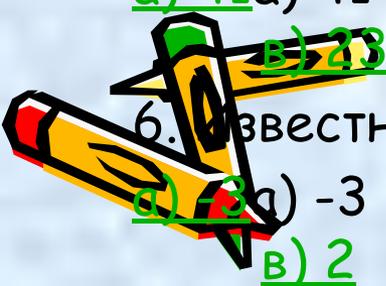
- а) 54 б) 27 а) 54 б) 27
 в) 9 а) 15 б) 15

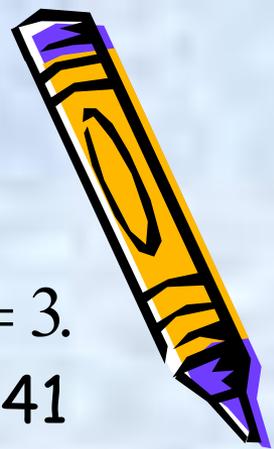
5. Известно, что

- а) 41 б) -23 а) 41 б) -23
 в) 23

6. Известно, что

- а) 3 б) 3 а) -3 б) 3
 в) 2





1. Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 8, d = 3$.

а) 294 а) 294

б) 41 а) 294

б) 41

в) 57

$$a_1 = 7, n = 8, S_8 = 14$$

2. Известно, что

. Найдите d .

а) 5 а) 5

б) 3 а) 5

б) 3

в) 9

3. Найдите сумму ~~первых~~ _{n} ~~четырнадцати~~ членов арифметической прогрессии, заданной формулой .

а) 497 а) 497

б) 511 а) 497

б)

511

в) 1022

