

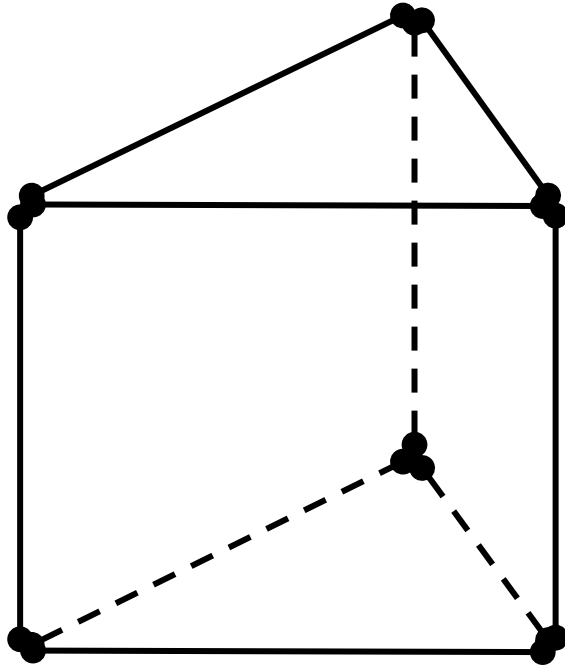
Геометрия 11

76 Объём прямой призмы

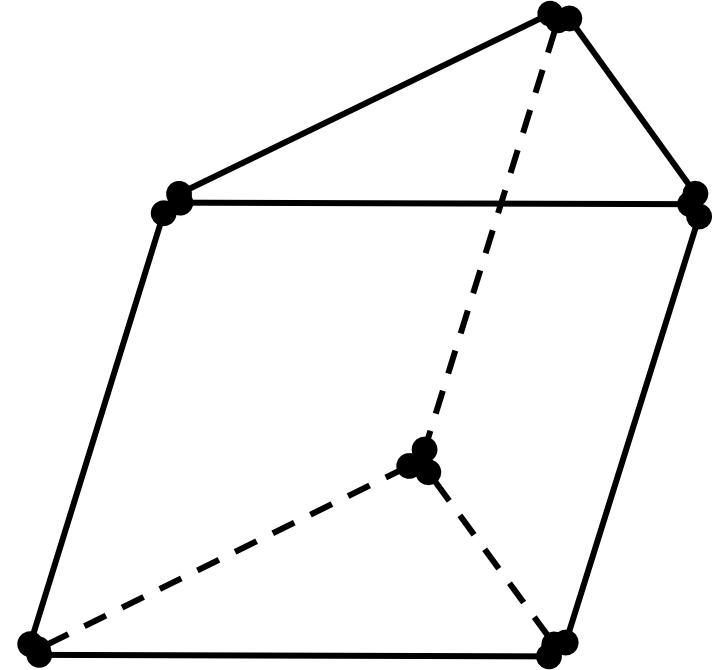
14:23, вторник, 7 декабря 2021 г.

Автор: Алчинов и. о.

Виды призм:

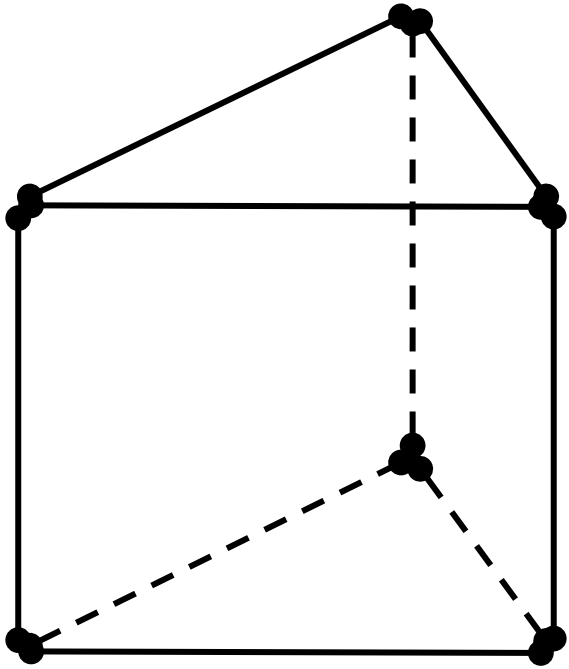


Прямая
призма

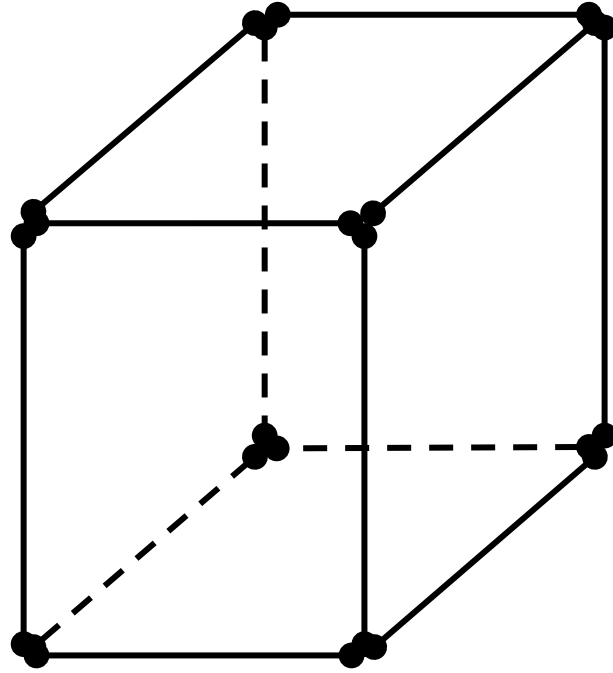


Наклонная
призма

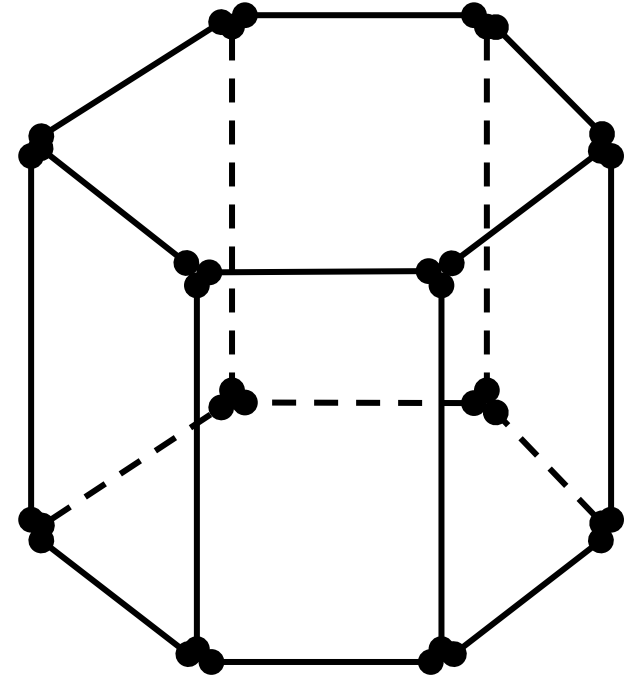
1. В **прямой призме** боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания.
2. Боковыми гранями являются **прямоугольники**.



Треугольная
призма

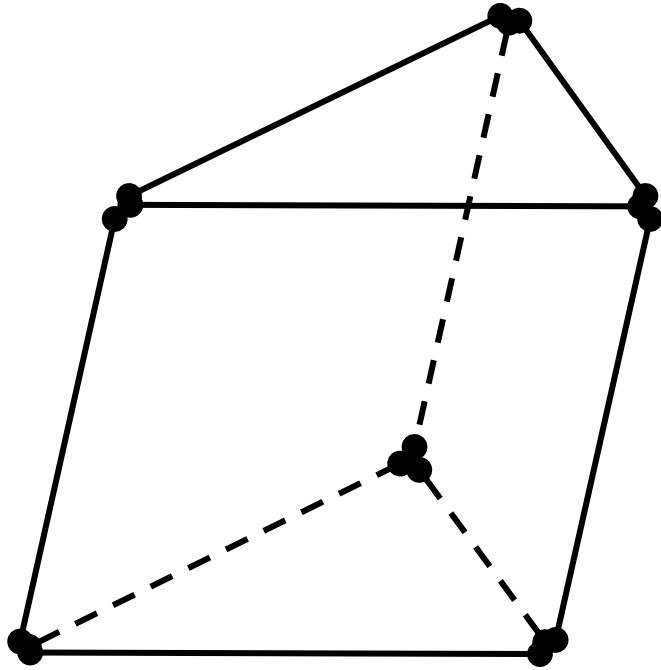


Четырёхугольная
призма

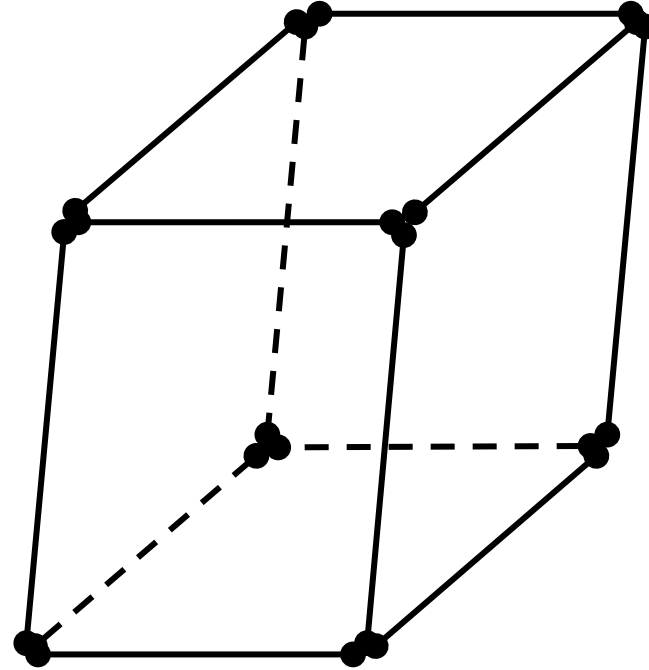


Шестиугольная
призма

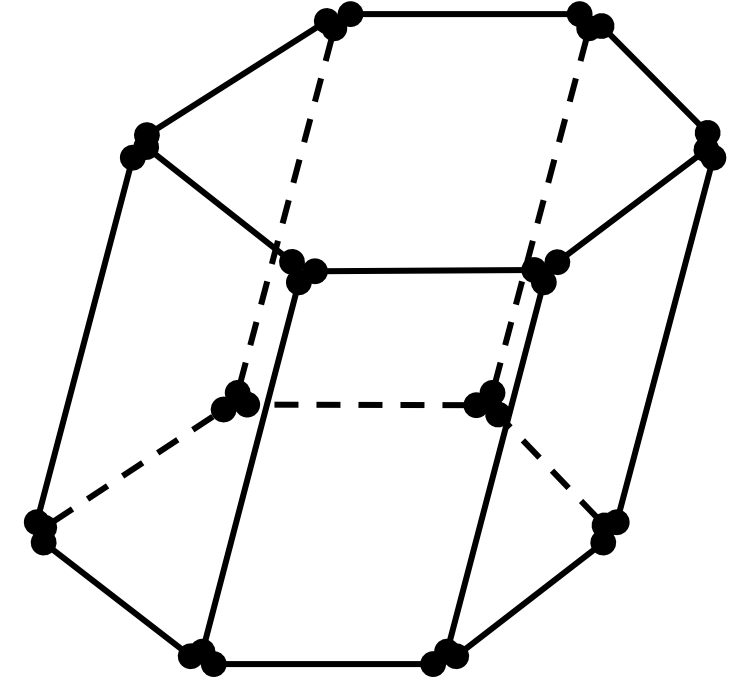
1. В **наклонной призме** боковые рёбра не перпендикулярны плоскости основания.
2. Боковыми гранями являются **параллелограммами**.



Треугольная
призма

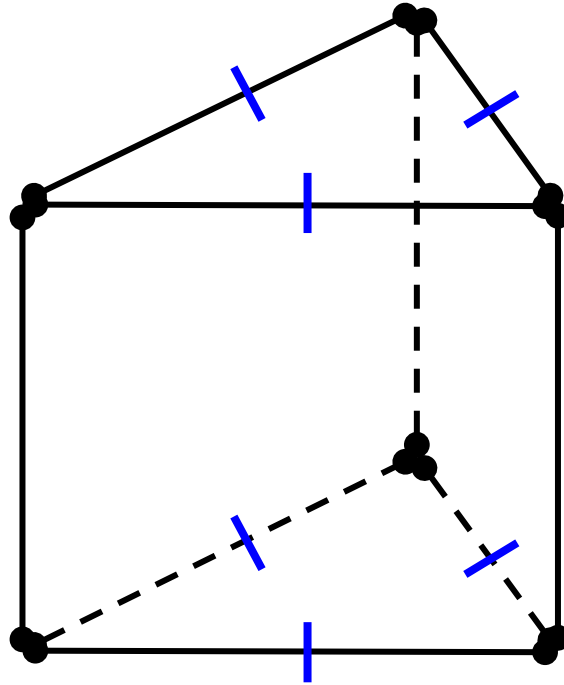


Четырёхугольная
призма

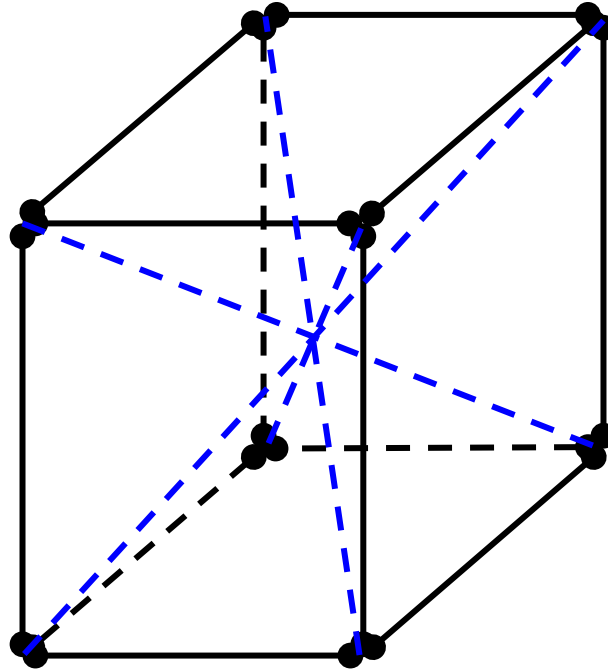


Шестиугольная
призма

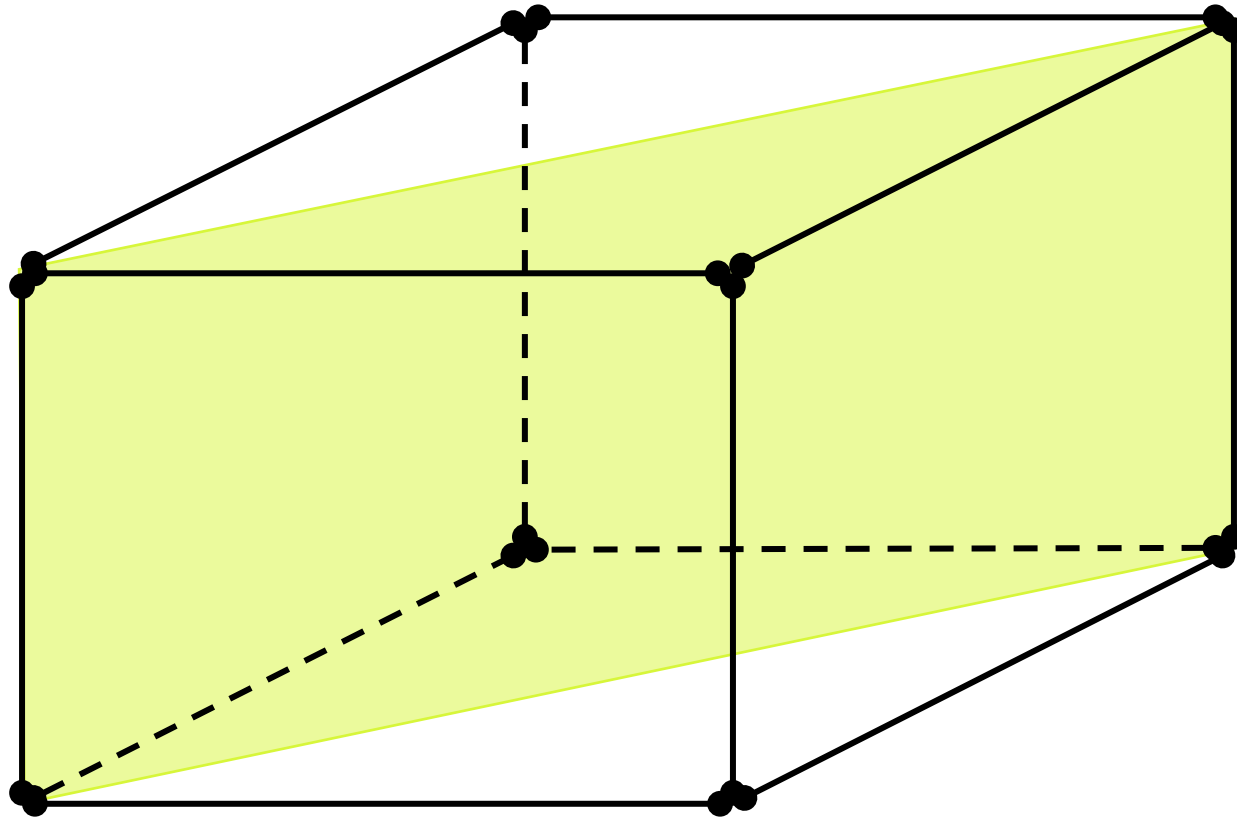
В основании **правильной призмы** лежит **правильный многоугольник**



Диагональ призмы — это отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани.

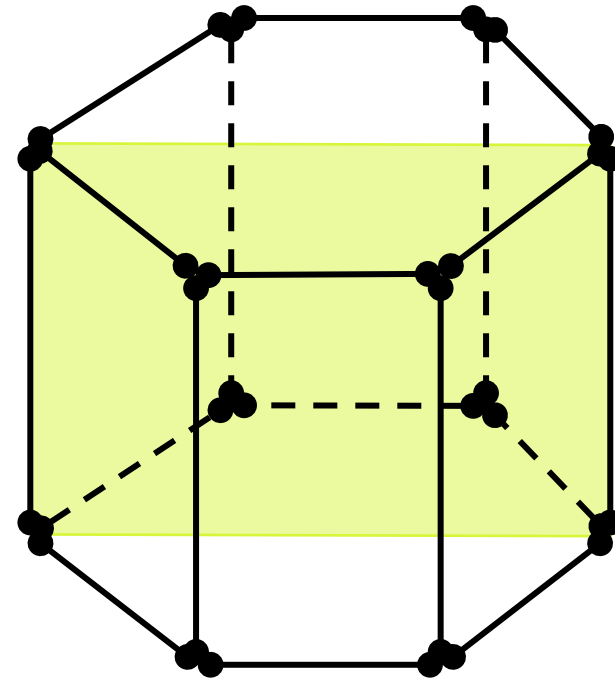
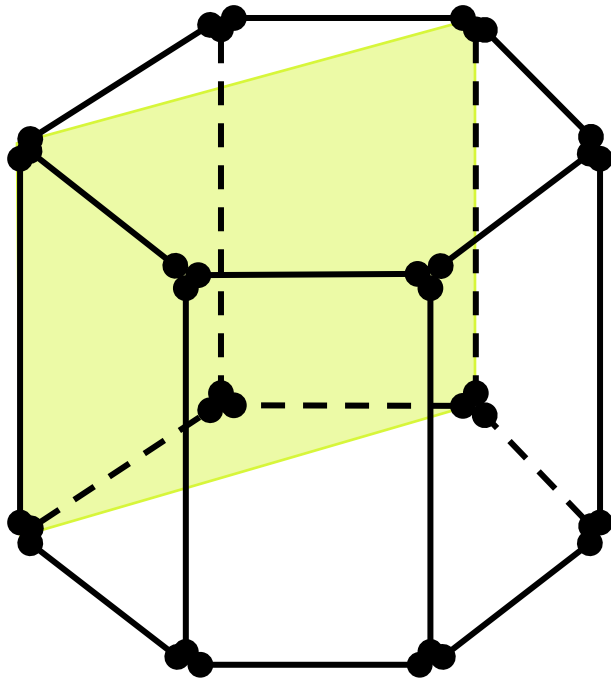


Диагональное сечение призмы — это сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащие одной грани.



У шестиугольной призмы диагонали бывают двух видов — короткие и длинные.

В связи с этим существуют два вида диагональных сечений шестиугольной призмы.



Объём любой призмы:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

(площадь основания на высоту)

Площадь боковой поверхности прямой призмы:

$$S_{\text{бок}} = P \cdot h$$

(периметр на высоту)

Площадь поверхности призмы:

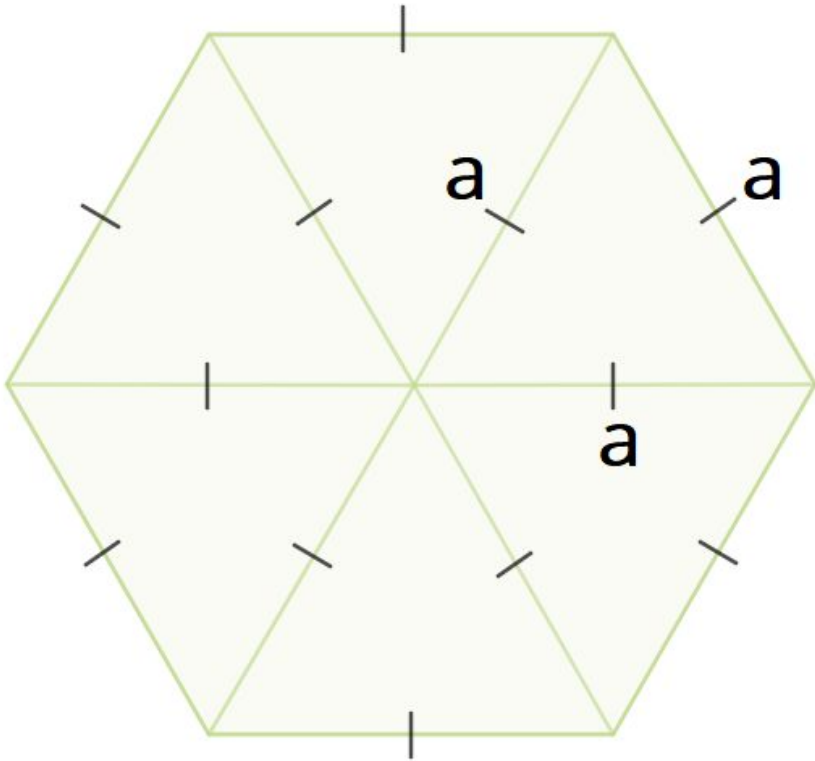
$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

(сумма площадей всех граней)

Важные формулы нахождения площади n-угольников

Квадрат	a^2		
Прямоугольник	$a \cdot b$		
Ромб	$a \cdot b \cdot \sin \alpha$	$a \cdot h$	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Параллелограмм	$a \cdot b \cdot \sin \alpha$	$a \cdot h$	
Равносторонний треугольник	$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$		
Прямоугольный треугольник	$\frac{a \cdot b}{2}$	$\frac{a \cdot h}{2}$	
Произвольный треугольник	$\frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$	$\frac{a \cdot h}{2}$	$\sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$
Трапеция	$\frac{a + b}{2} \cdot h$		

Формула нахождения площади правильного шестиугольника



Правильный шестиугольник состоит из 6 правильных треугольников.

$$S_{\text{прав. ш.}} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

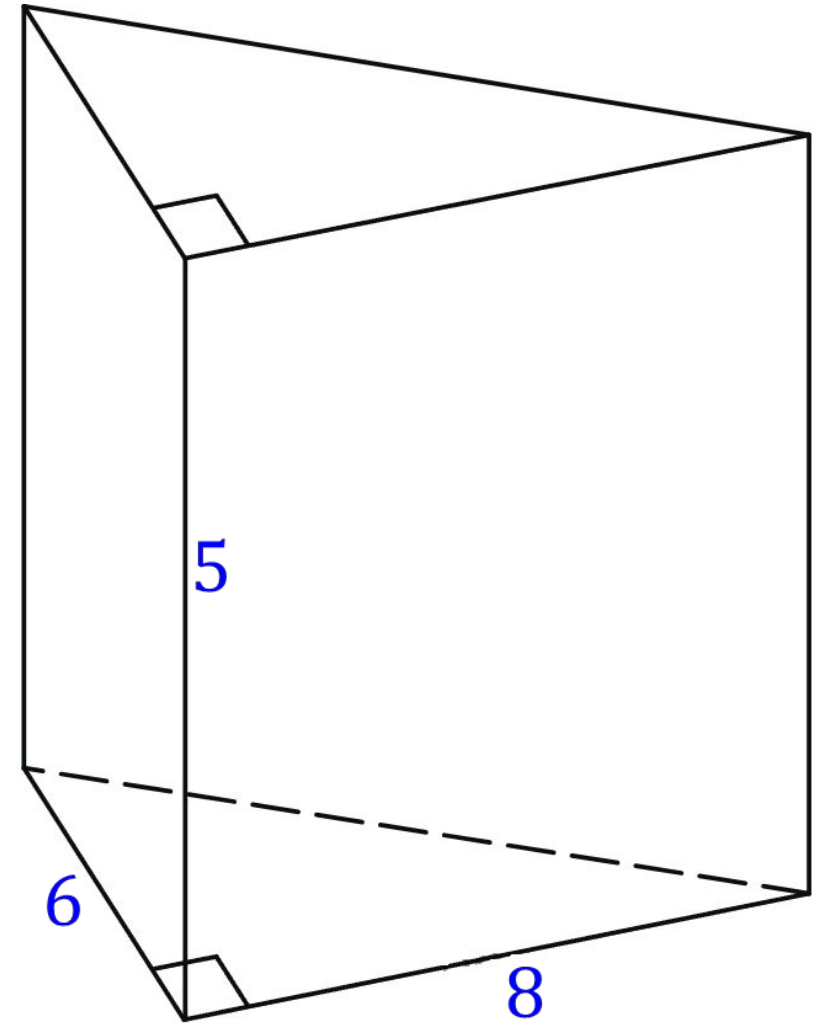
где a — сторона шестиугольника

№6 Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем

призмы.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = 24 \cdot 5 = 120$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8$$

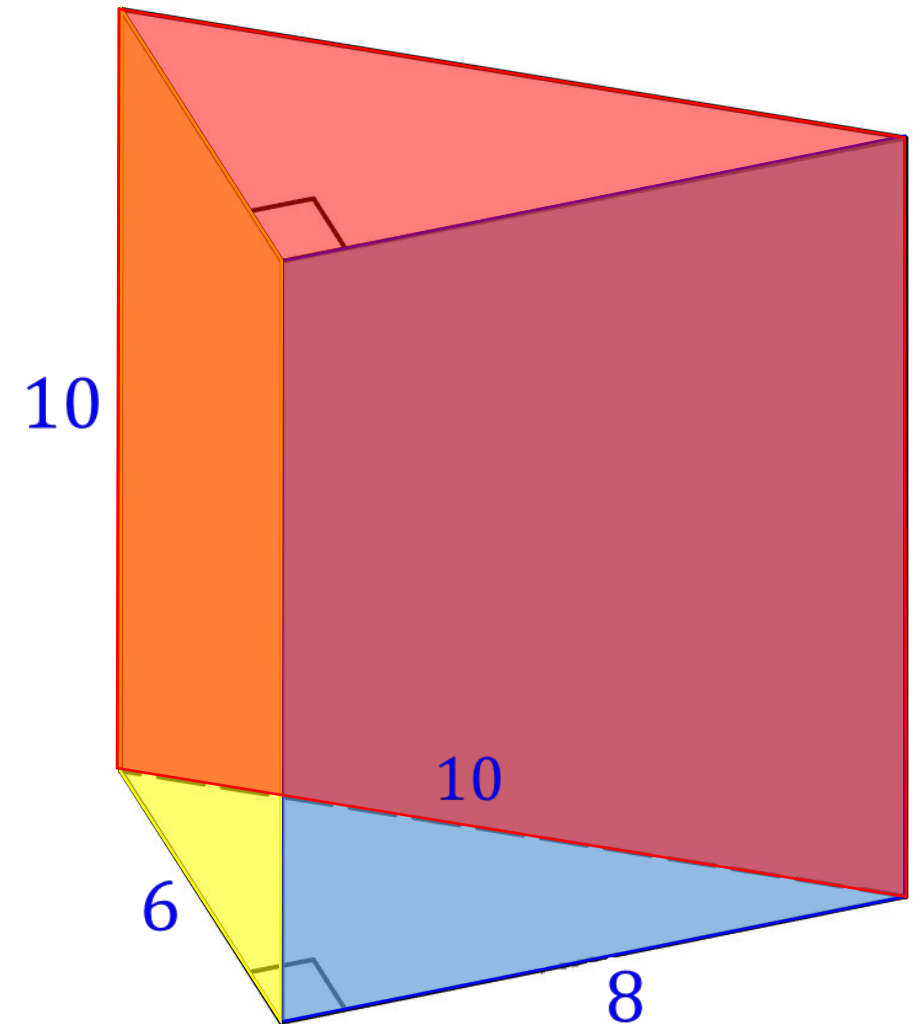


№11 Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь ее поверхности.

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot 24 + 240 = 288$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

$$S_{\text{бок}} = \underbrace{10 \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 10}_{P \cdot h} = 240$$



№13 Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20. Площадь ее поверхности равна 1380. Найдите высоту призмы.

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + \underbrace{S_{\text{бок}}}_{P \cdot h}$$

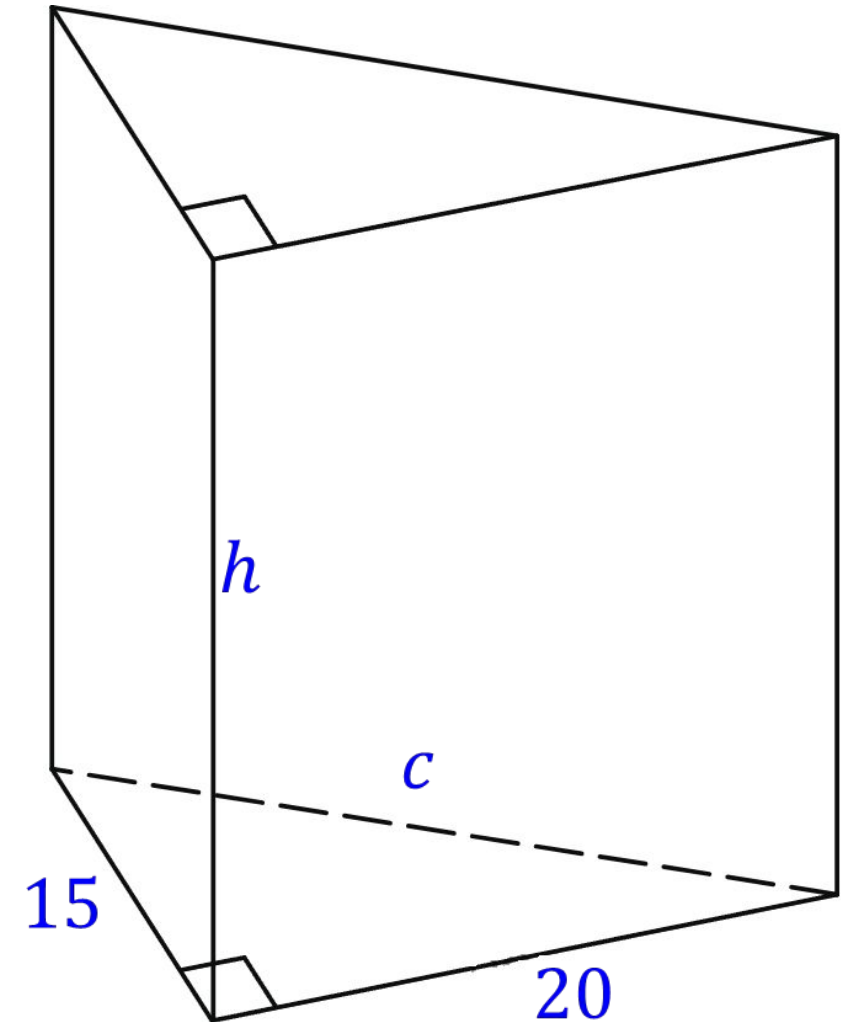
$$c = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$$

$$1380 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 + (15 + 20 + 25) \cdot h$$

$$1380 = 300 + 60h$$

$$1080 = 60h$$

$$h = 18$$



Самостоятельная работа №1

- 1) Нахождение объёма треугольной призмы
- 2) Нахождение площади боковой поверхности треугольной призмы
- 3) Нахождение всей площади поверхности треугольной призмы

№1 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см³ воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объем детали.

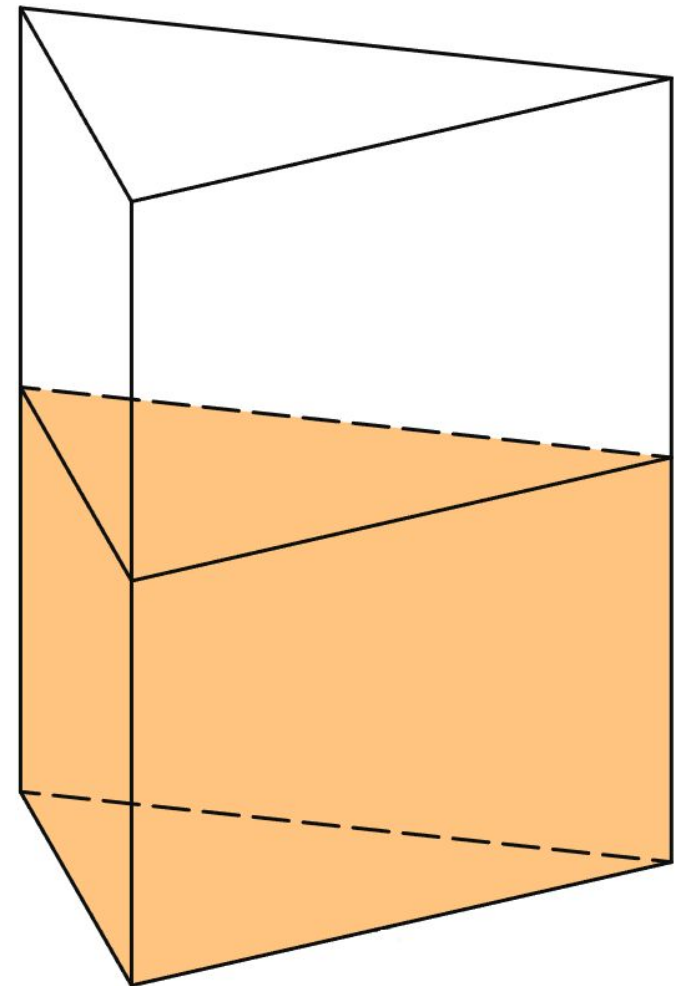
Ответ выразите в см³.

Был уровень: 25 см

Изменение уровня: 2 см

Часть которую ищем $\frac{2}{25}$

$$V_{\text{дет}} = \frac{2}{25} \cdot 2300 = 184$$



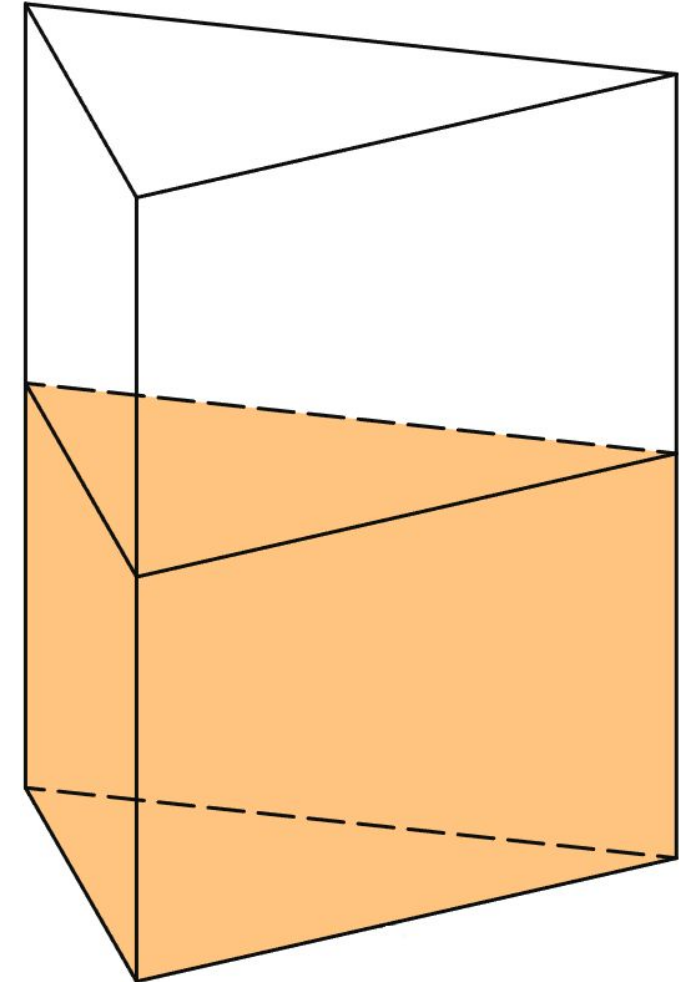
№2 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.

$$V = S \cdot h = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot h \rightarrow h = \frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$$

Изменение:
$$h_2 = \frac{4V}{\sqrt{3}(4a)^2} = \frac{4V}{16\sqrt{3}a^2}$$

в 16 раз меньше

$$h_2 = 80 : 16 = \underline{5 \text{ см}}$$



№8 Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

1) Высота в треугольнике уменьшилась в 2

раза

2) Основание в треугольнике уменьшилось в 2

раза

3) Значит площадь треугольника уменьшилась в 4

раза

4) Высота призмы не

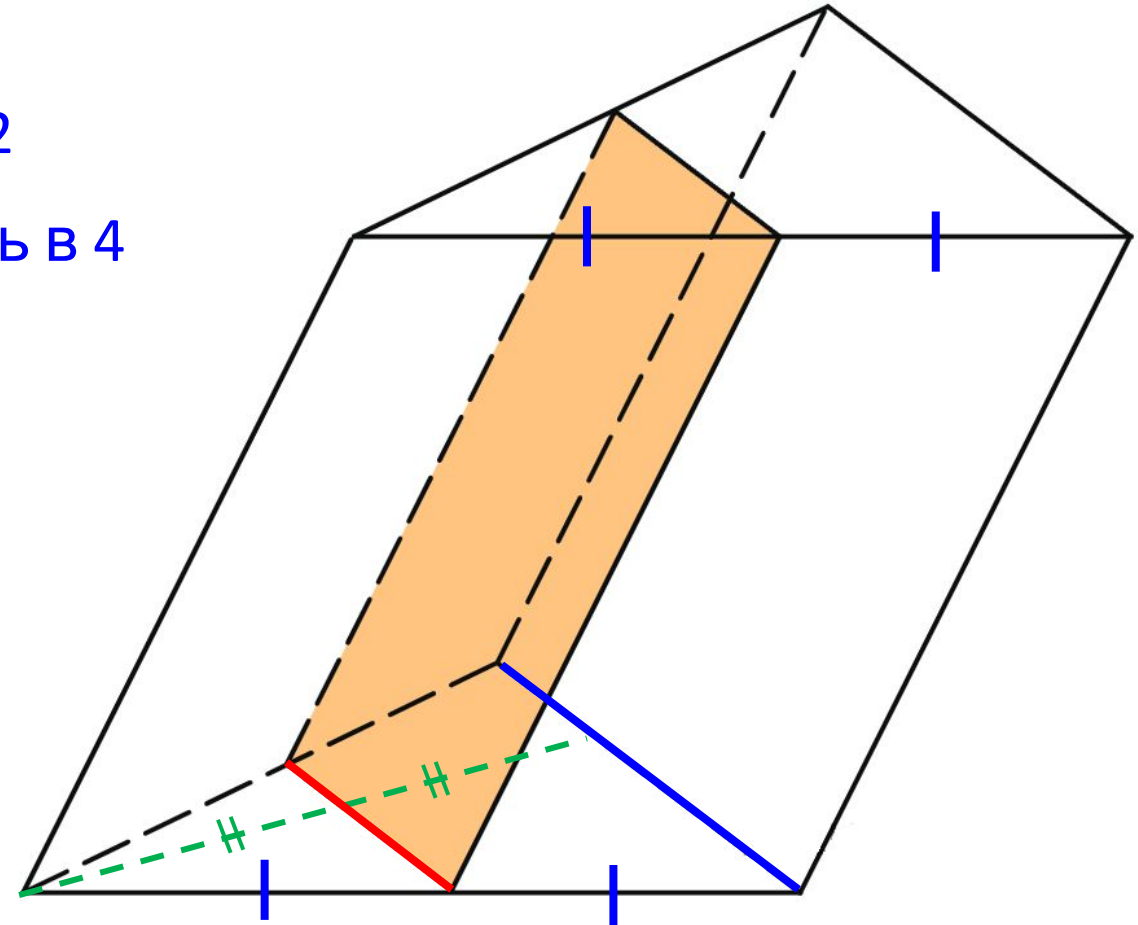
изменилась

5) Объем уменьшился в 4

раза

Ответ:

8

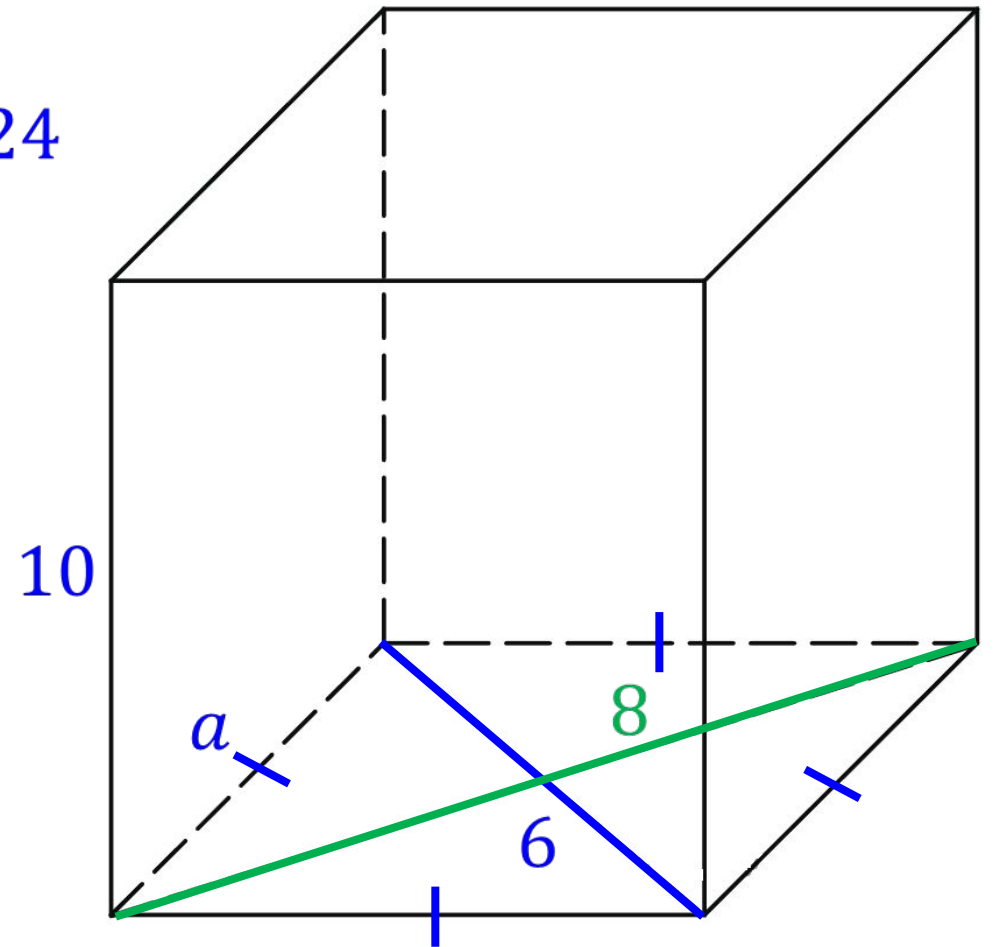


№4 Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, а боковое ребро призмы равно 10.

Сторона ромба: $a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Площадь ромба: $S_p = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$

$$\begin{aligned} S_{\text{полн}} &= 2 \cdot S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \\ &= 2 \cdot 24 + 4 \cdot S_{\text{гр}} = \\ &= 48 + 4 \cdot 10 \cdot 5 = \mathbf{248} \end{aligned}$$



№12 В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 16 и 30. Площадь ее поверхности равна 2588. Найдите боковое ребро этой призмы.

Сторона ромба: $a = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$

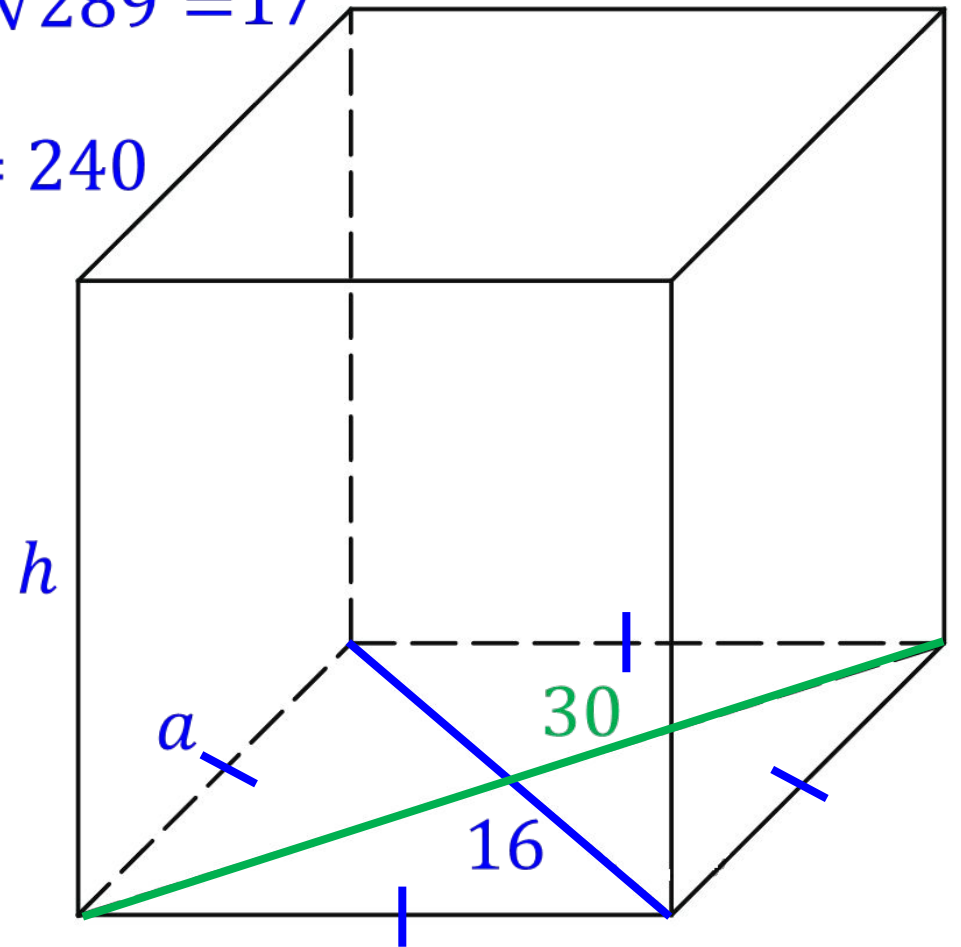
Площадь ромба: $S_p = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 30 = 240$

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_p + S_{\text{бок}}$$
$$4 \cdot S_{\text{гр}} = 4 \cdot 17 \cdot h$$

$$2588 = 2 \cdot 240 + 4 \cdot 17 \cdot h$$

$$2108 = 68 \cdot h$$

$$h = 31$$

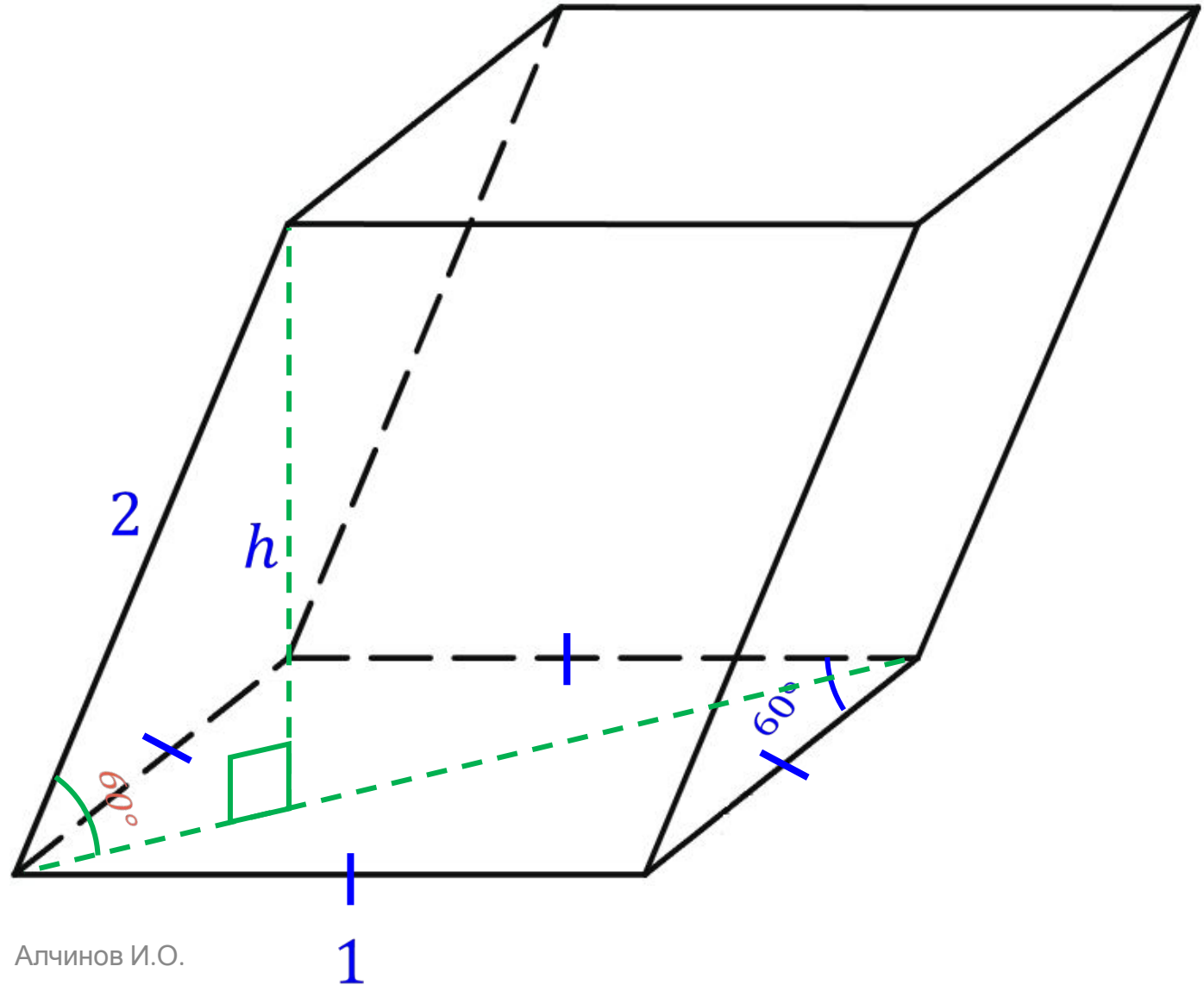


№7 Гранью призмы является ромб со стороной 1 и острым углом 60° .
Одно из ребер призмы составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2.
Найдите объем призмы.

$$S_{\text{осн}} = 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 1,5$$



Самостоятельная работа №2

1) Нахождение объёма четырехугольной призмы

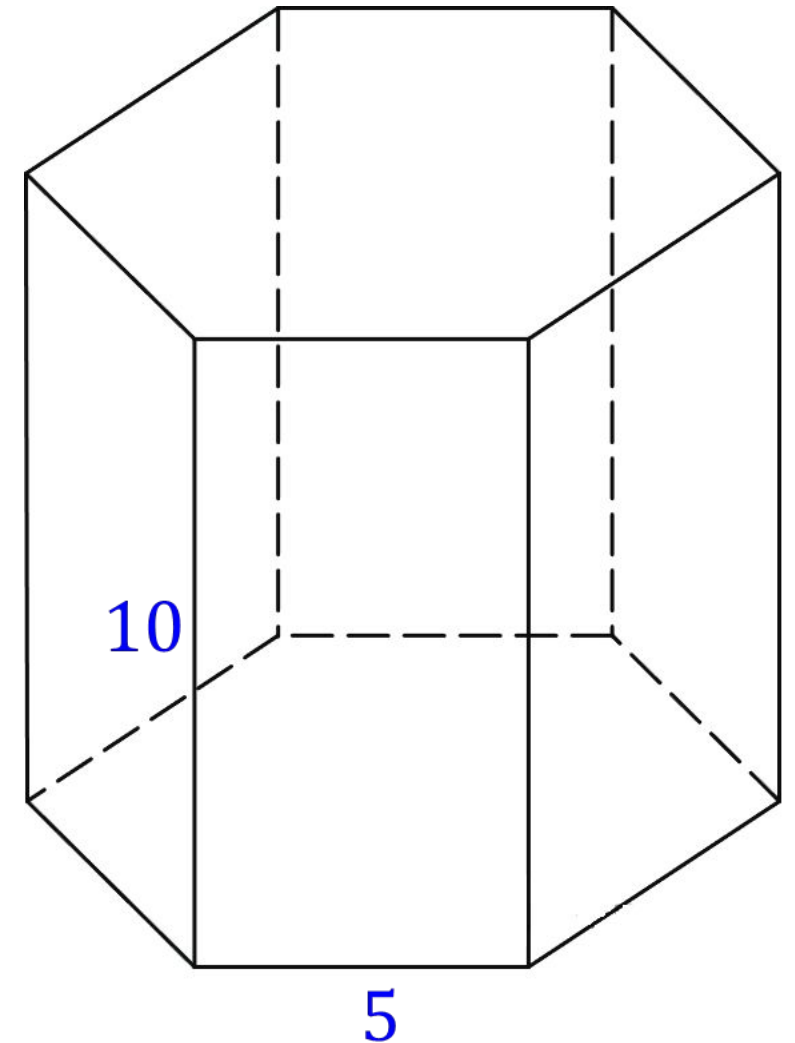
2) Нахождение площади боковой поверхности четырехугольной призмы.

3) Нахождение всей площади поверхности четырехугольной призмы

№3 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 10.

Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей всех ее боковых граней:

$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot S_{\text{гр}} = 6 \cdot 10 \cdot 5 = 300$$



№5 Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

$$S_{\text{осн}} = 20^2$$

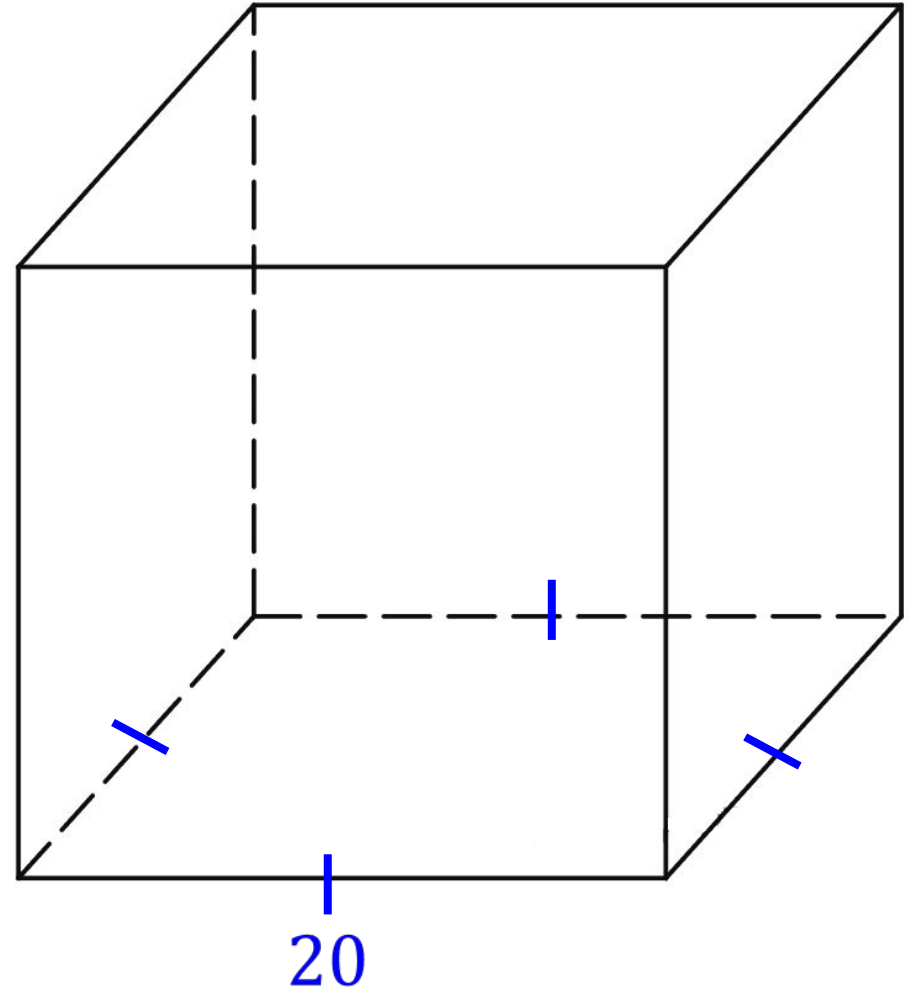
$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot 20 \cdot h$$

$$1760 = 2 \cdot 400 + 80h$$

$$1760 = 800 + 80h$$

$$960 = 80h \quad | : 80$$

$$h = 12$$



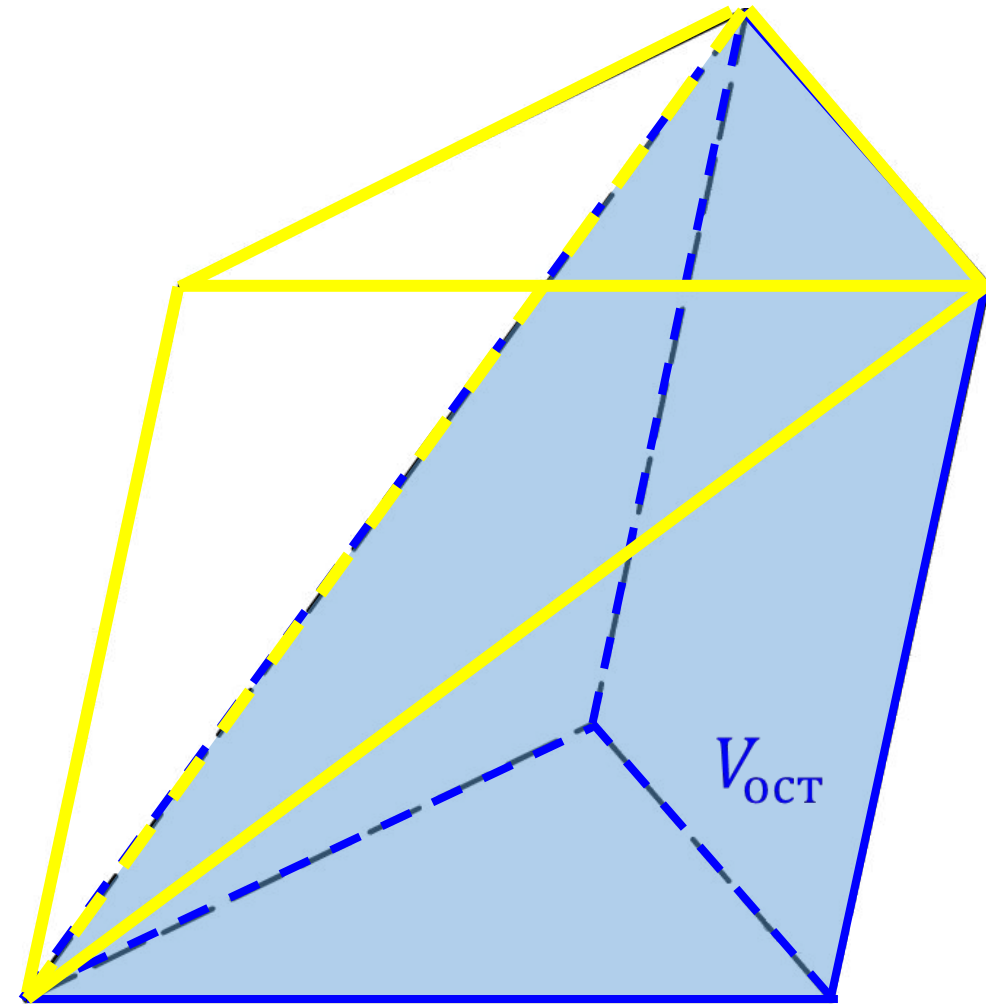
№10 От треугольной призмы, объем которой равен 6, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.

$$V = 6$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot V = 2$$

$$V_{\text{ост}} = V - V_{\text{пир}} = 4$$

$V_{\text{пир}}$



№14 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

1) Фронтальная грань в два раза

больше

2) Тыловая грань в два раза

больше

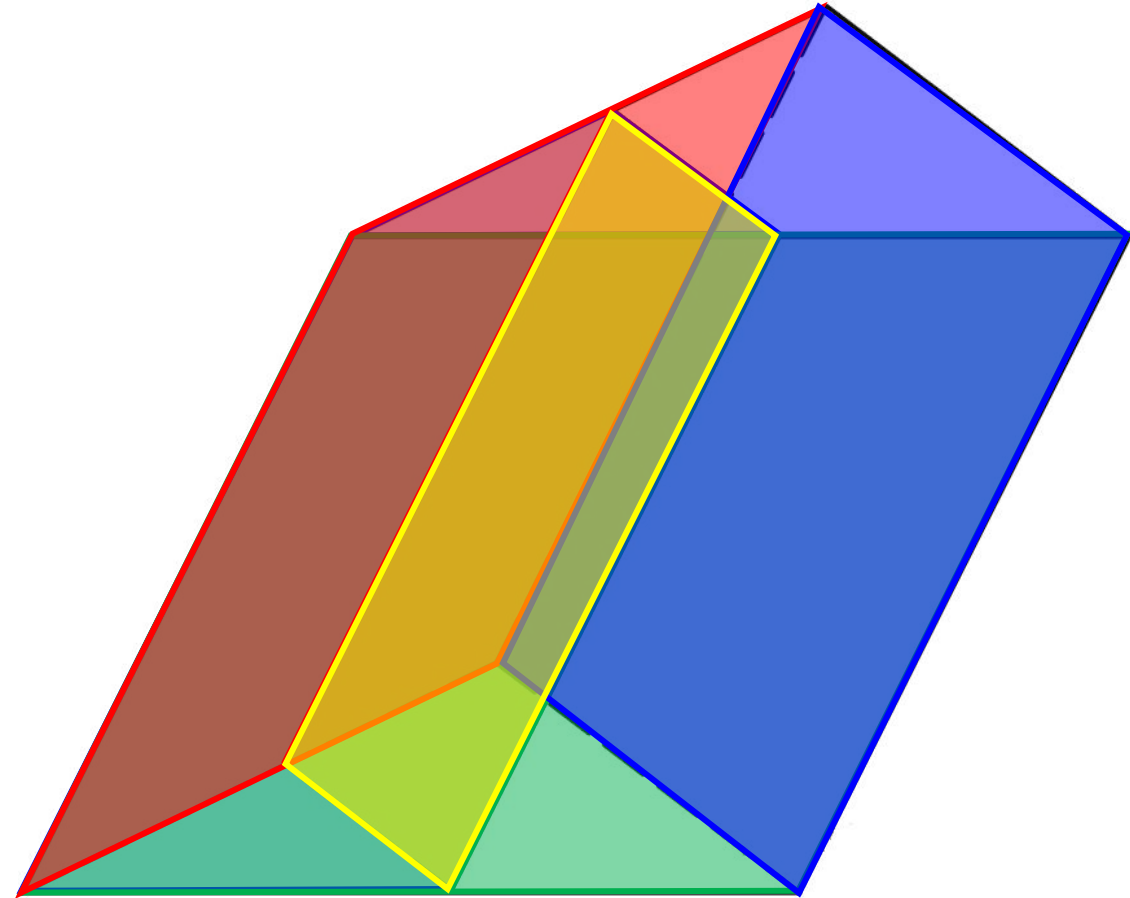
3) Правая грань в два раза

больше

4) Боковая поверхность в два раза

больше

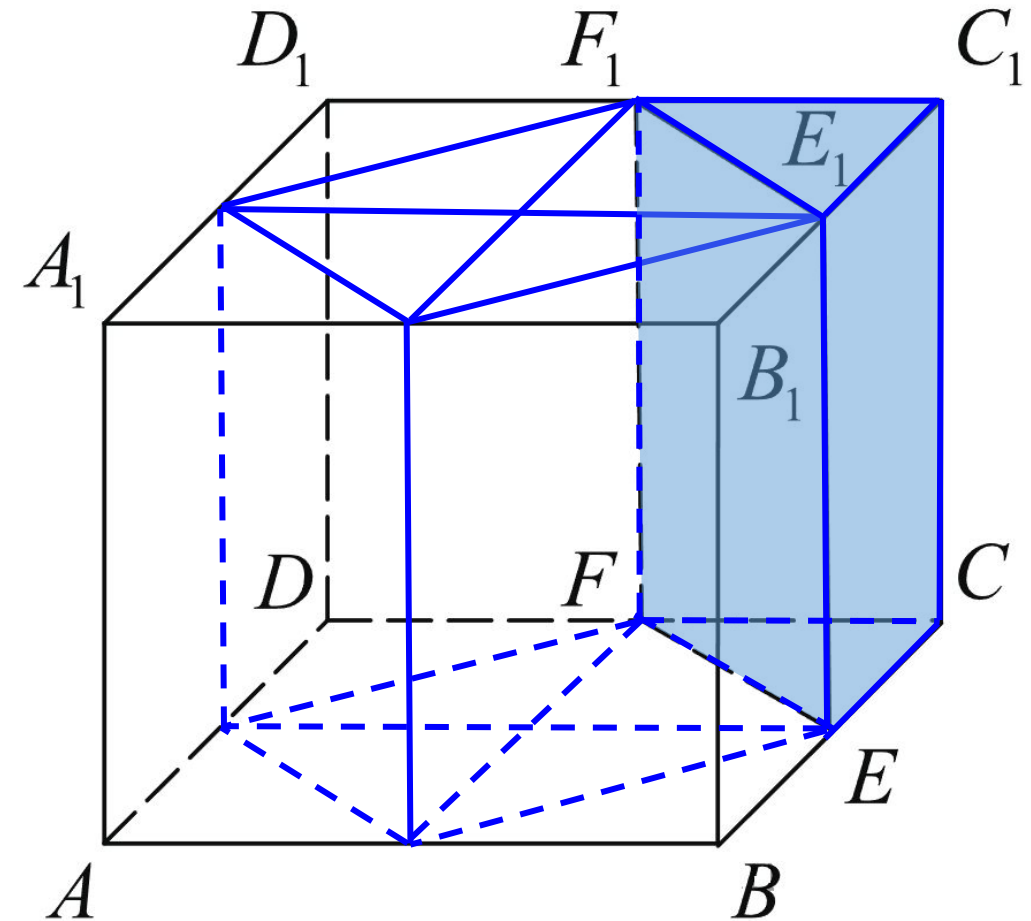
Ответ: 16



№15 Объём куба равен 12. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

В кубе помещается 8 треугольных призм

$$V_{\text{призмы}} = V_{\text{куб}} : 8 = 1,5$$

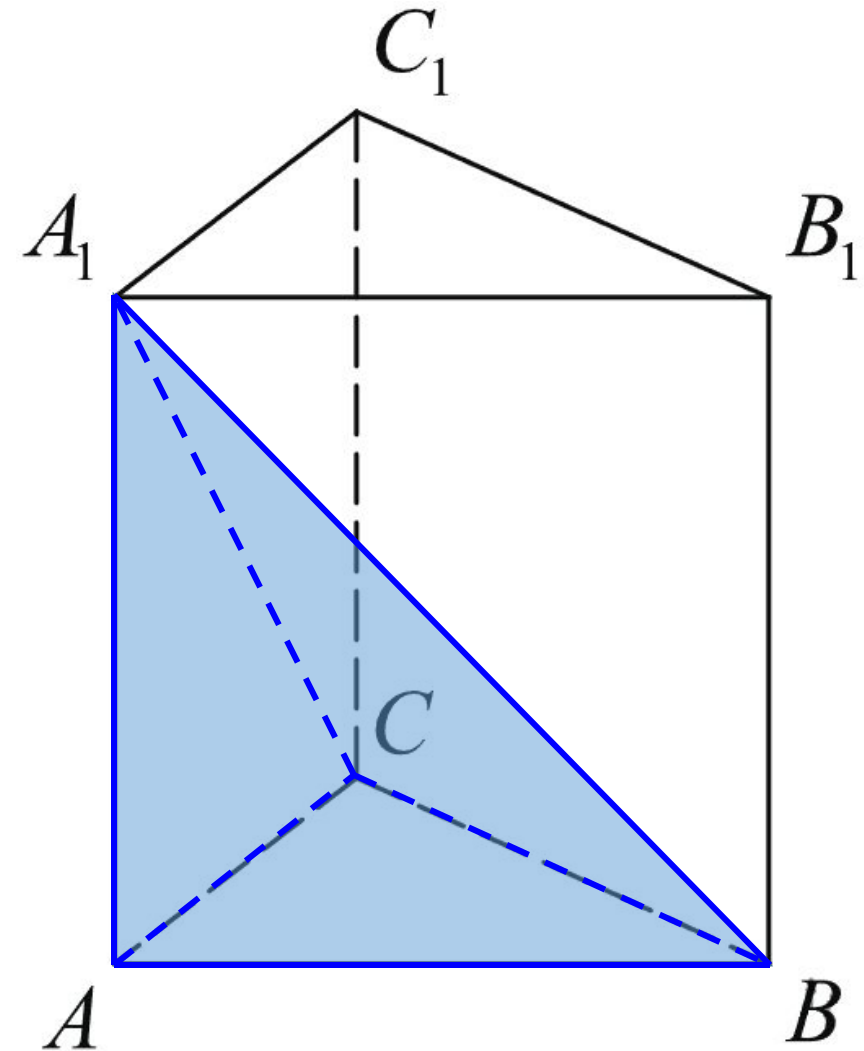


№16 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки

A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.

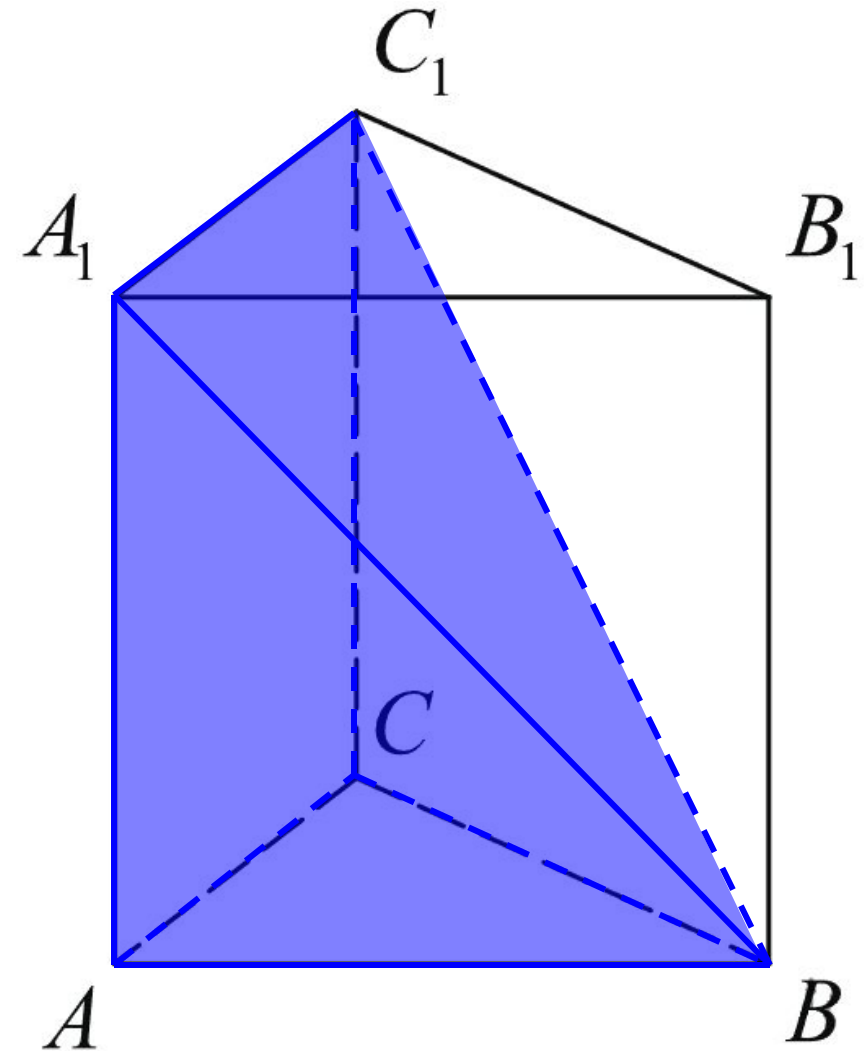
Требуется найти объем пирамиды, основание и высота которой совпадают с основанием и высотой данной треугольной призмы.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2$$



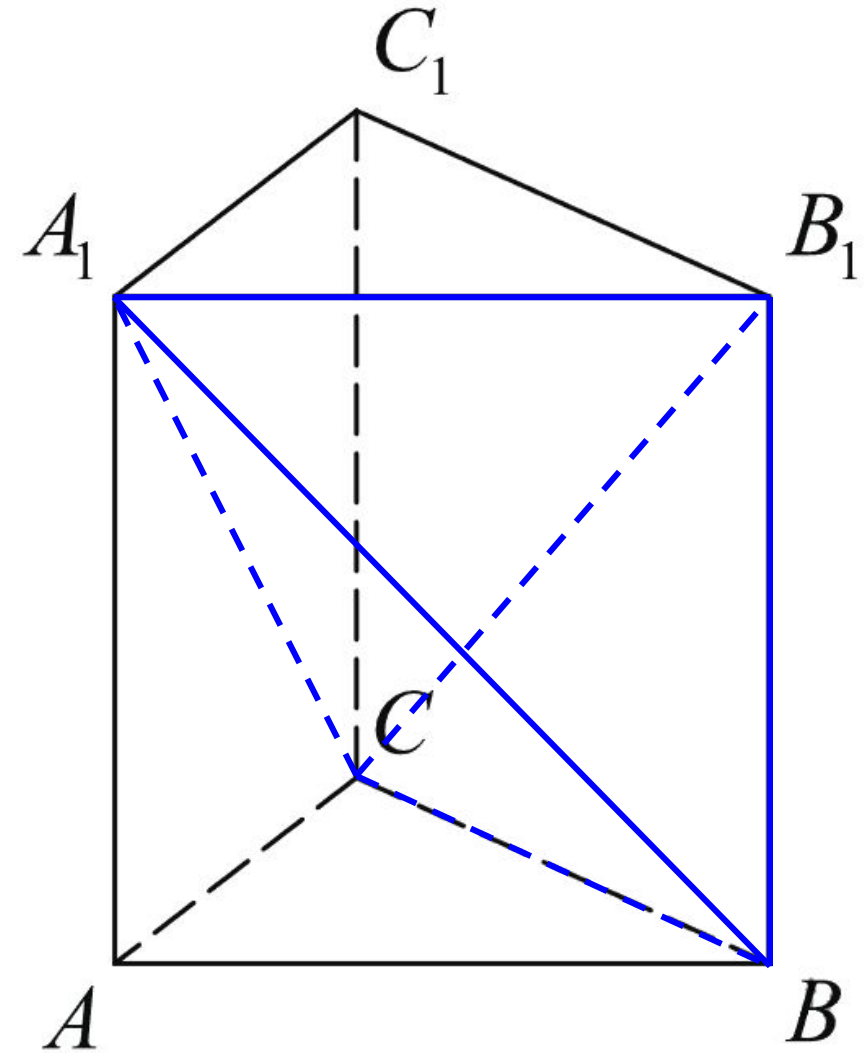
№17 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 15, а боковое ребро равно 6.

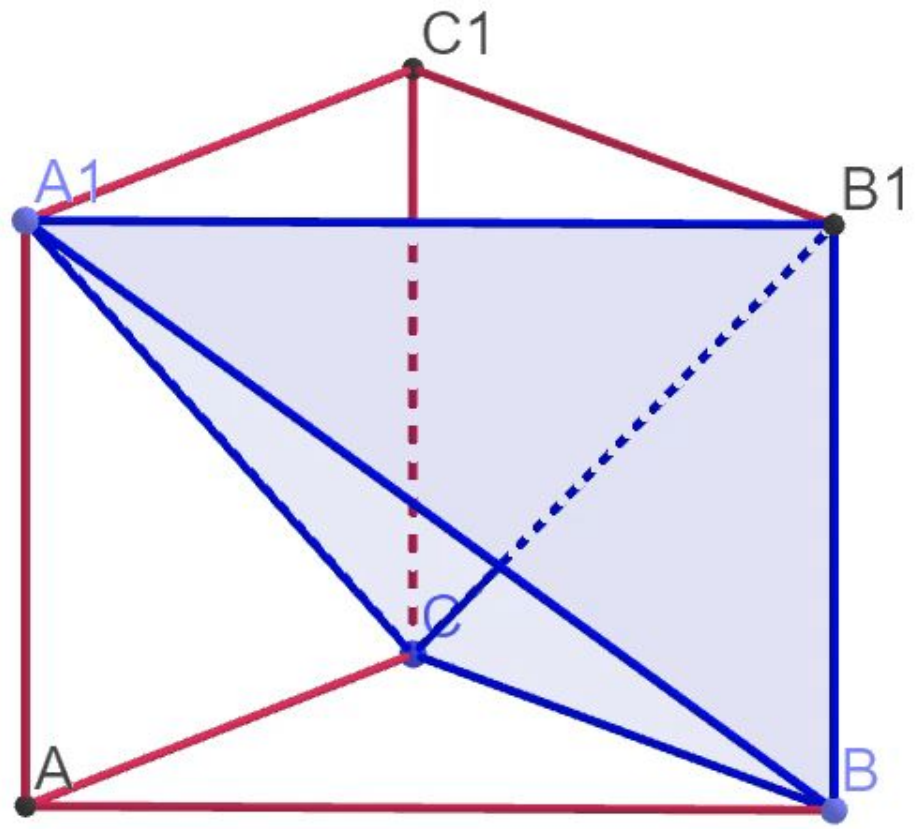
$$V_{\text{мнг}} = V - V_{\text{пир}} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V = \frac{2}{3} \cdot 15 \cdot 6 = 60$$



№18 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки

A_1, B_1, B, C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

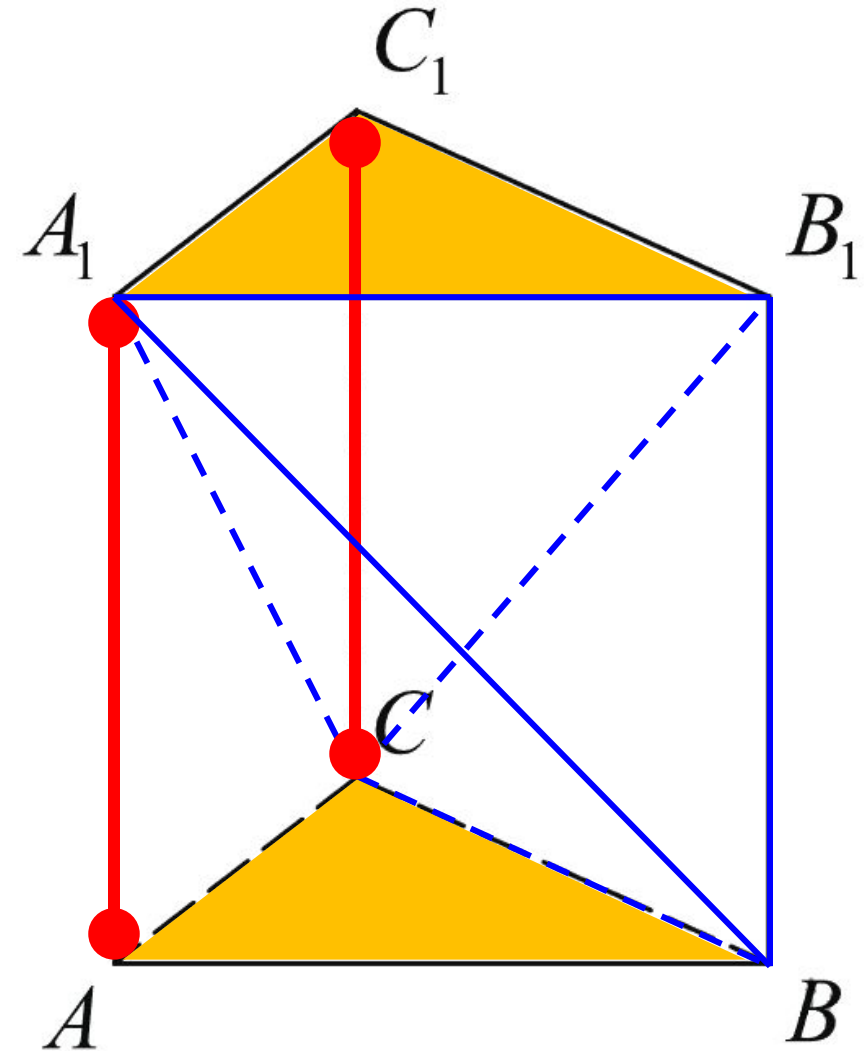




№18 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки

A_1, B_1, B, C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

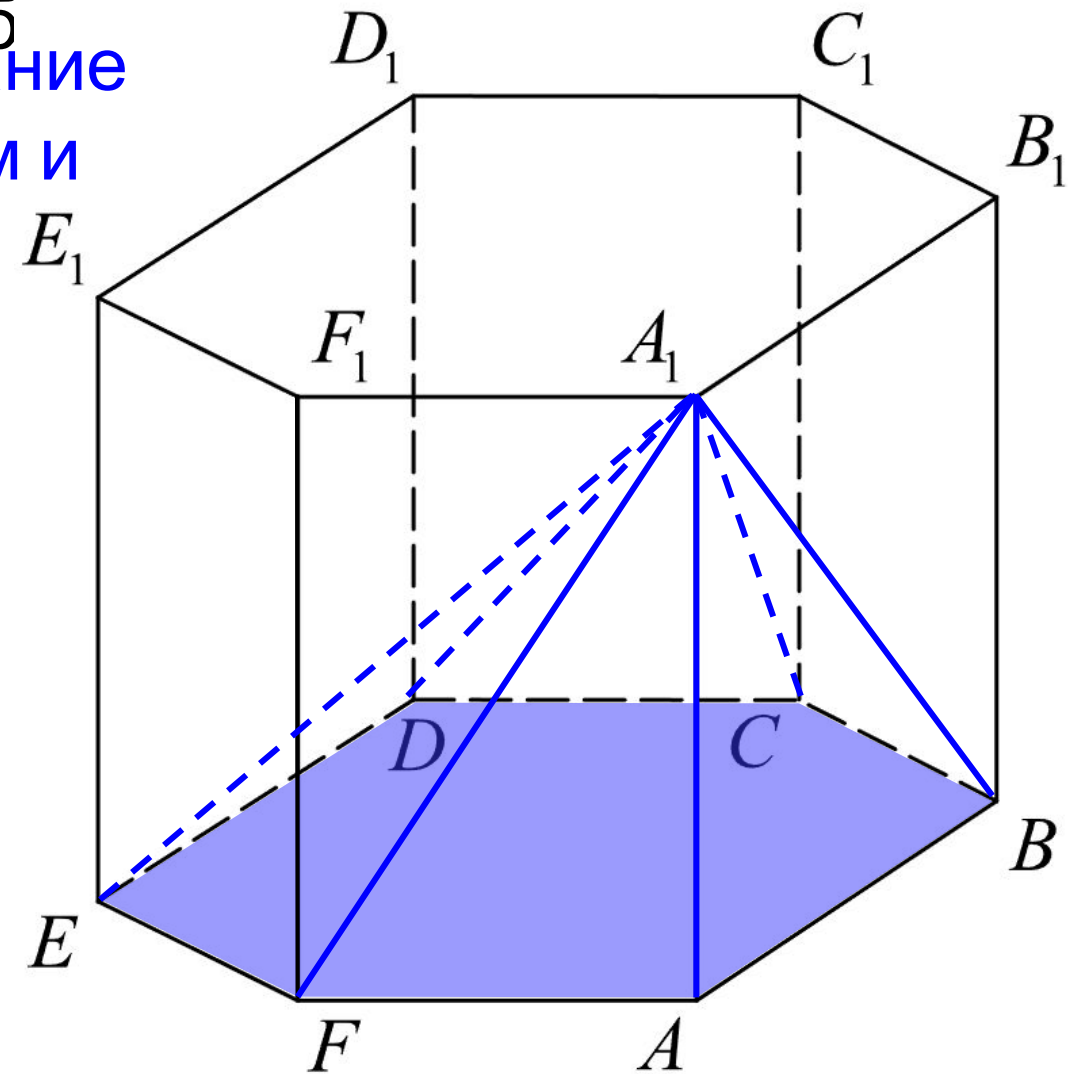
$$\begin{aligned} V_{A_1B_1BC} &= V - \underbrace{V_{A_1ABC}}_{\frac{1}{3}V} - \underbrace{V_{CA_1B_1C_1}}_{\frac{1}{3}V} \\ &= 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$



№19 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки

A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 500, а h требуется найти объем пирамиды, основание и высота которой совпадают с основанием и высотой данной призмы.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 500 \cdot 120 = 20000$$



№20 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки

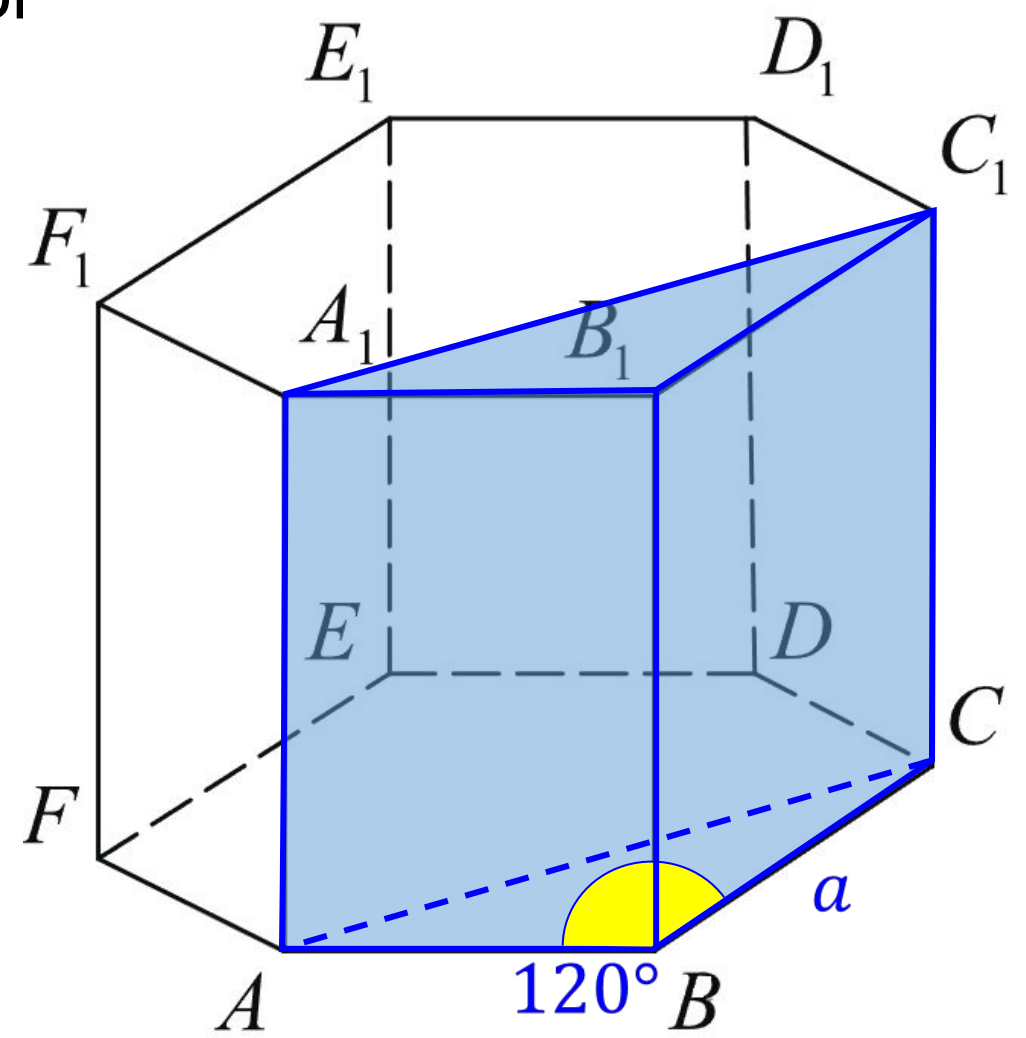
A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 54, а боковая ребро равно 5

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{осн}} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABC} = S_{\text{осн}} : 6 = 54 : 6 = 9$$

$$V_{\text{тр.пр.}} = S_{ABC} \cdot h = 9 \cdot 5 = 45$$

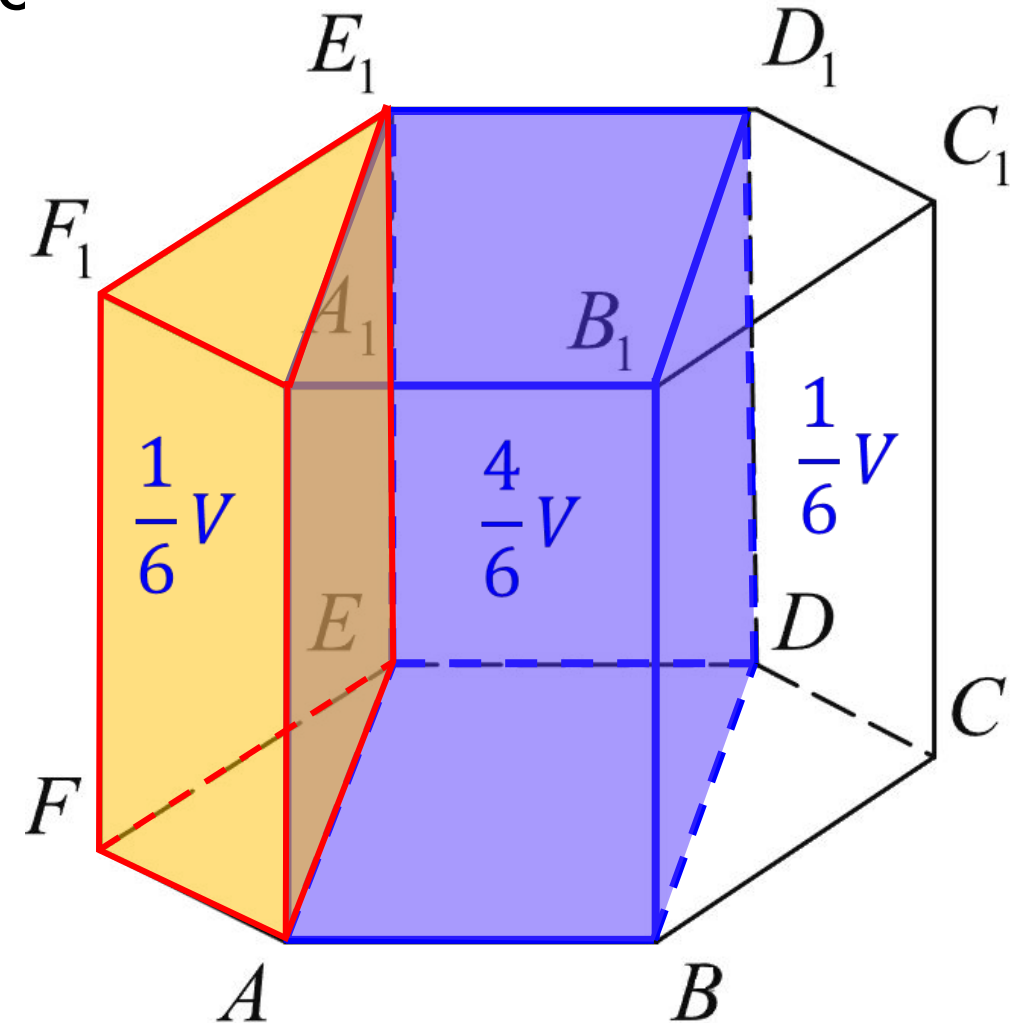


№21 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки

$A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1$ правильной шестиугольной призмы

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 96, а боковое ребро равно 12.

$$V_{\text{чт.пр.}} = \frac{4}{6} V = \frac{4}{6} \cdot 96 \cdot 12 = 768$$

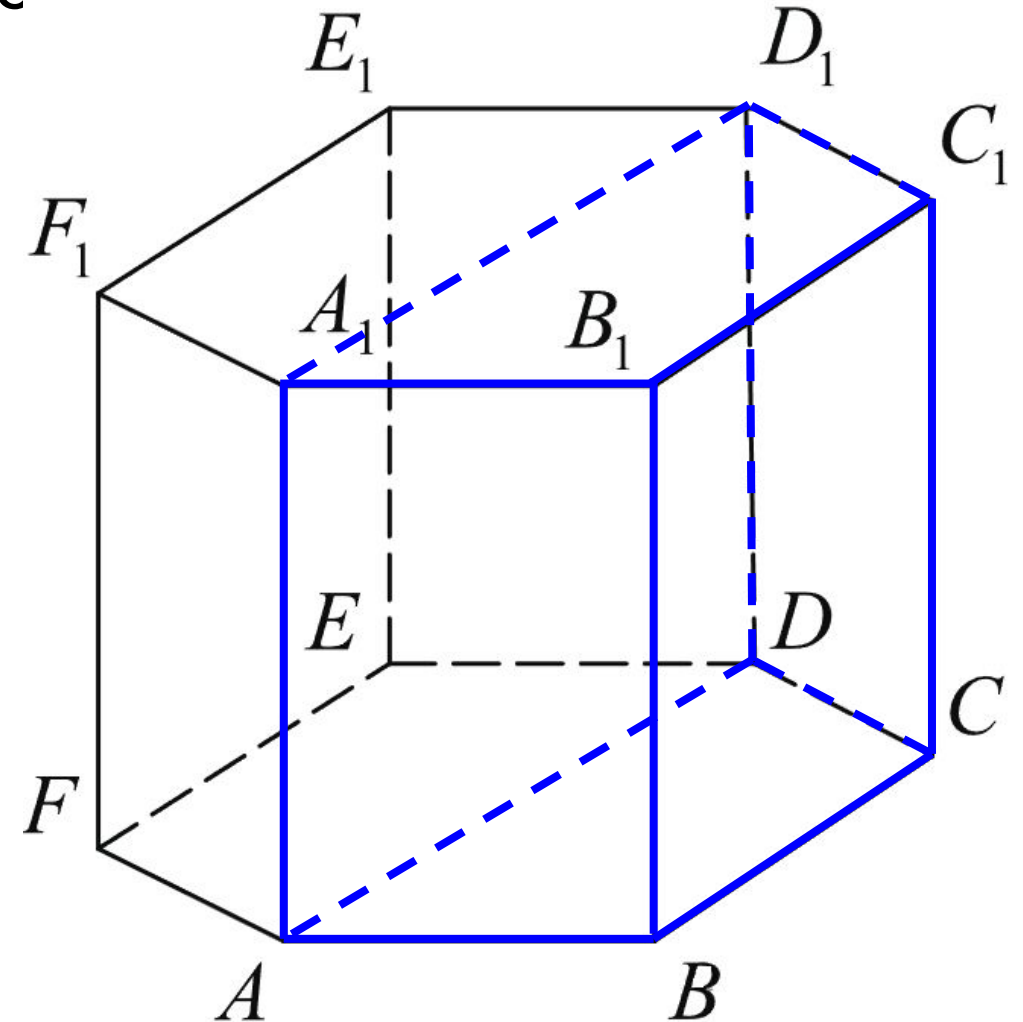


№22 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки

$A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ правильной шестиугольной призмы

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна $90,8$, а боковое ребро равно $15,5$.

$$V_{\text{чт.пр.}} = \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} \cdot 90,8 \cdot 15,5 = 703,7$$

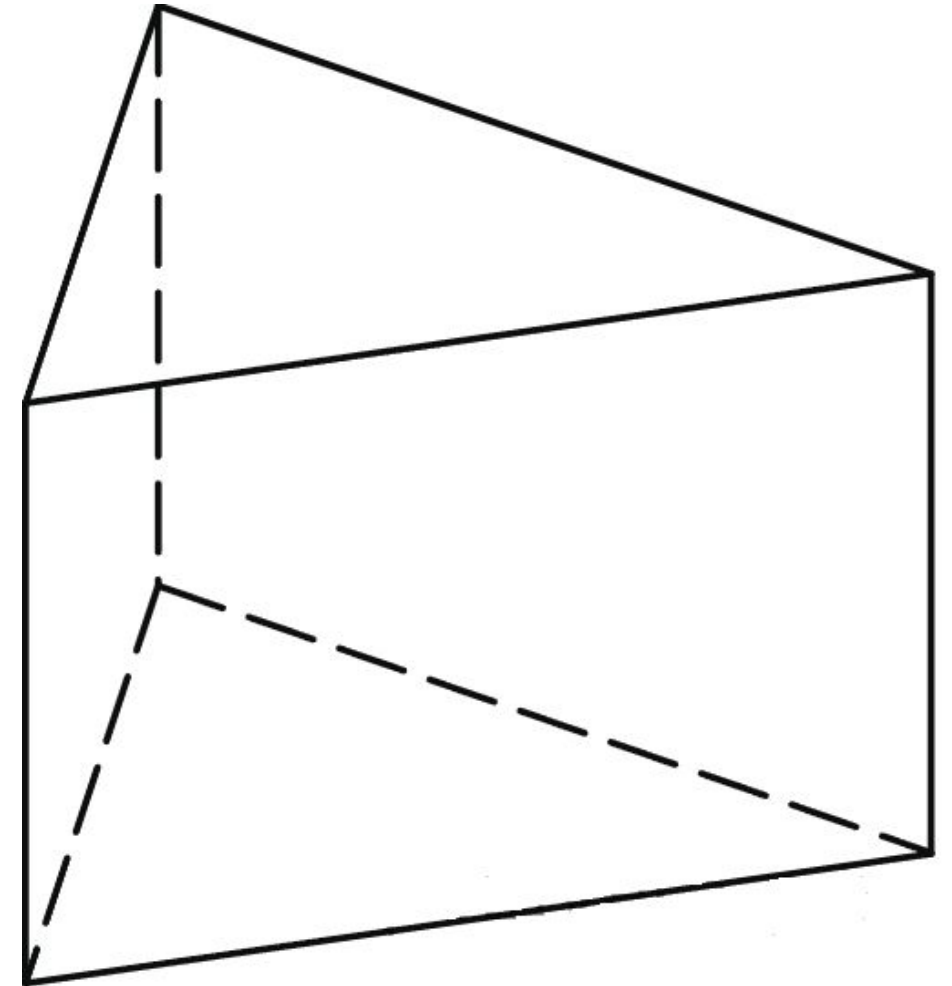


№23 Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 6. Какой станет площадь поверхности призмы, если все её рёбра увеличатся в три раза, а форма останется прежней?

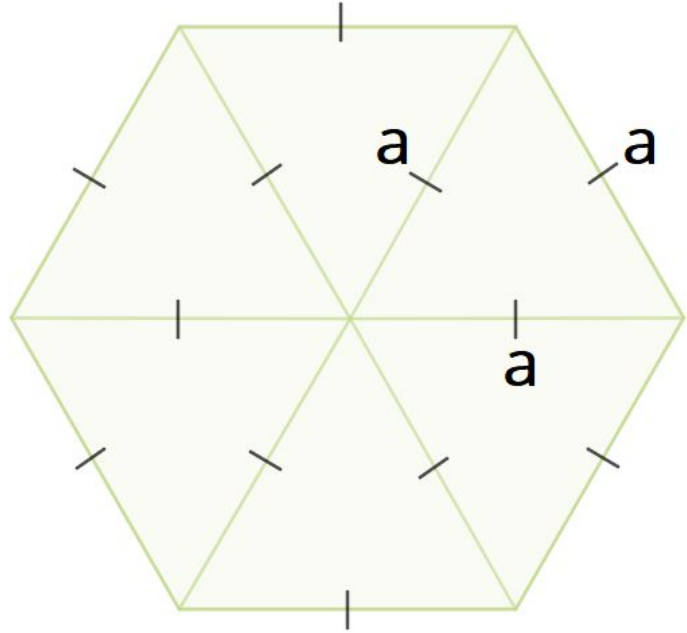
1) Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия.

2) Поэтому если все ребра увеличить в три раза, площадь поверхности увеличится в 9 раз.

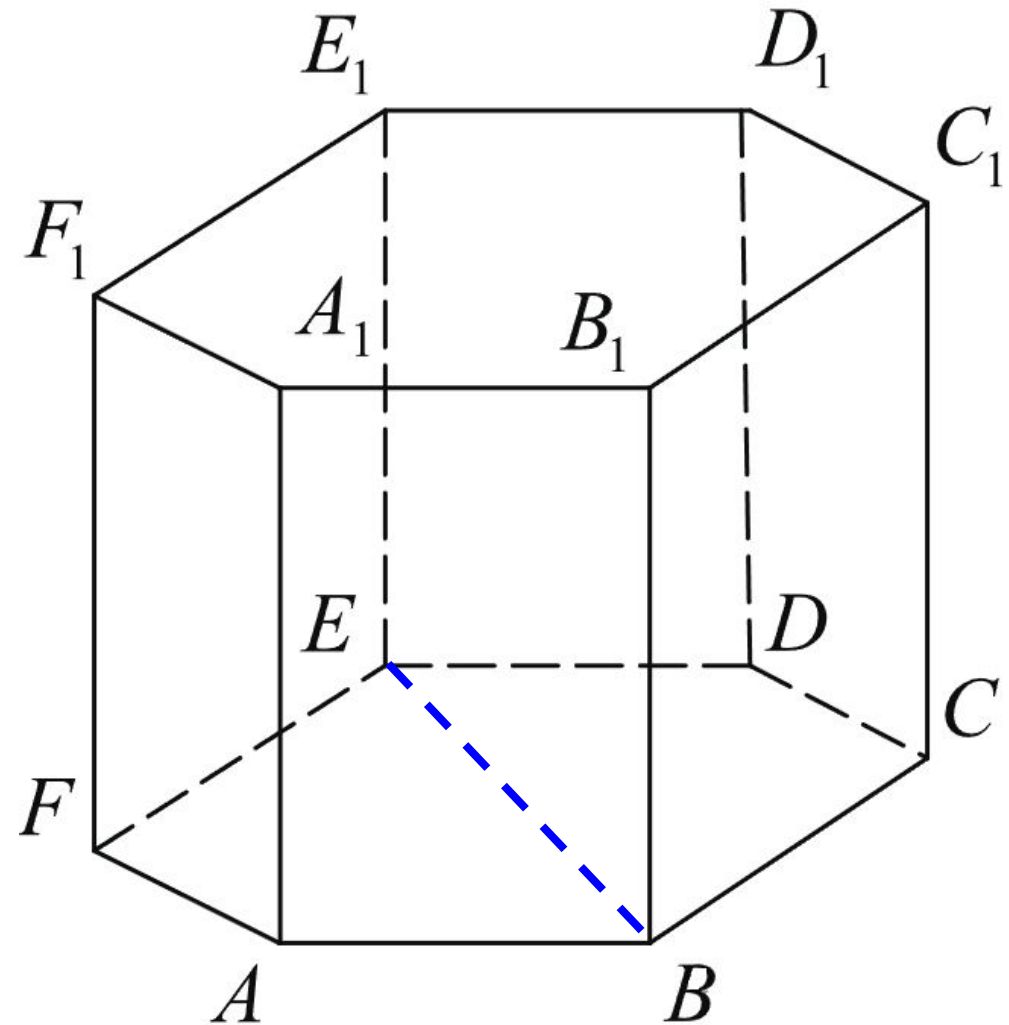
3) Следовательно, она станет равна 54.



№26 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками B и E .



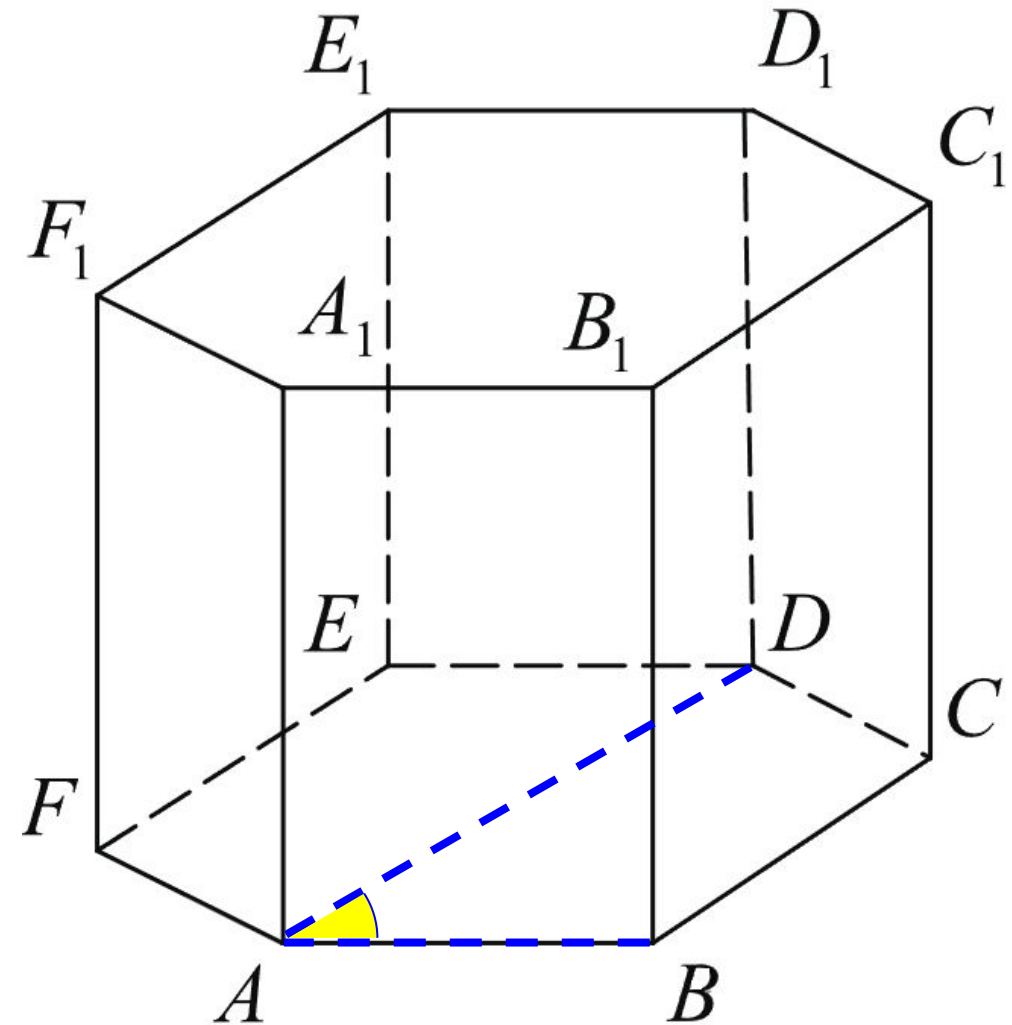
Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне. Поэтому $BE = 2$



№27 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол DAB . Ответ дайте в градусах.

В правильном шестиугольнике углы между сторонами равны 120 градусов, значит,

$$\angle DAB = \frac{1}{2} \angle FAB = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

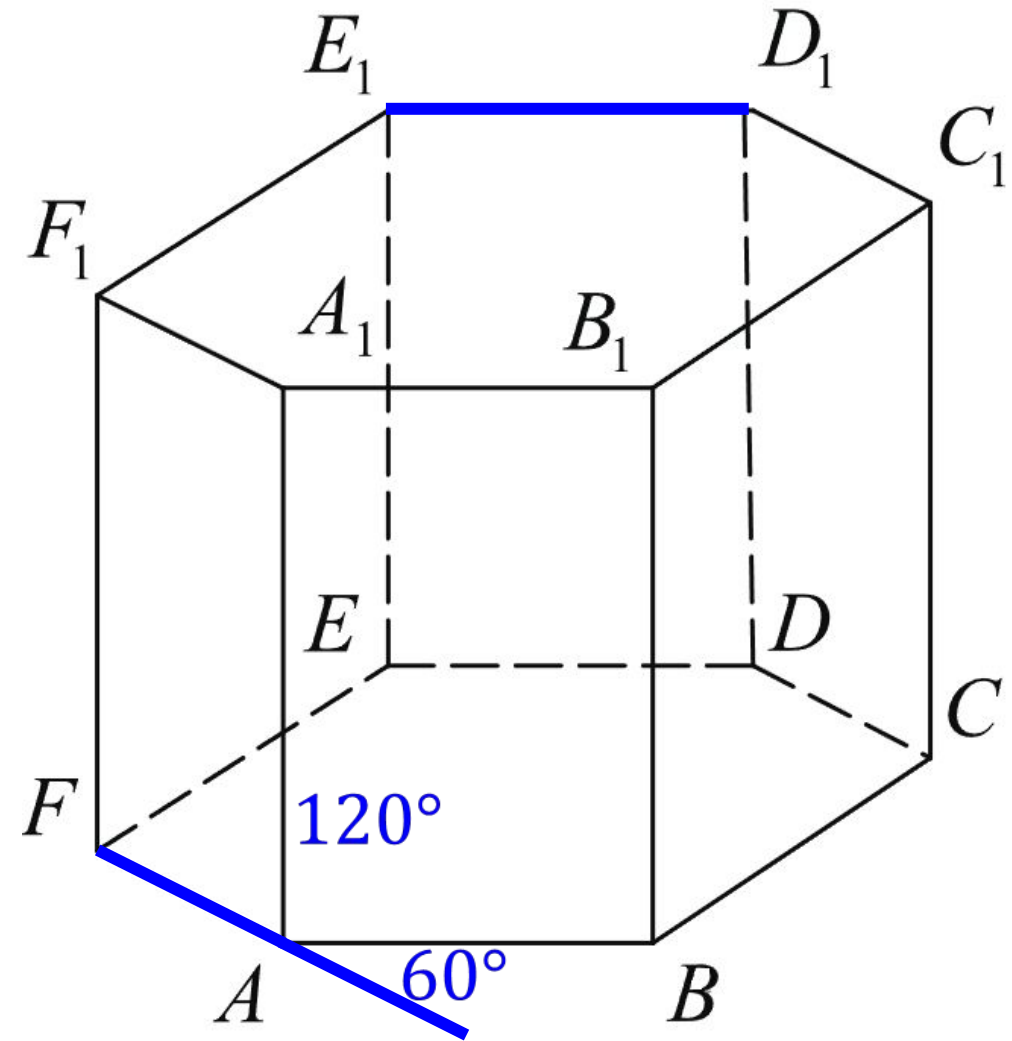


№28 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра которой равны 8, найдите угол между прямыми FA и $D_1 E_1$.

$$(\widehat{FA; D_1 E_1}) = (\widehat{FA; AB}) \quad (\text{т. к. } D_1 E_1 \parallel AB)$$

ищем меньший угол

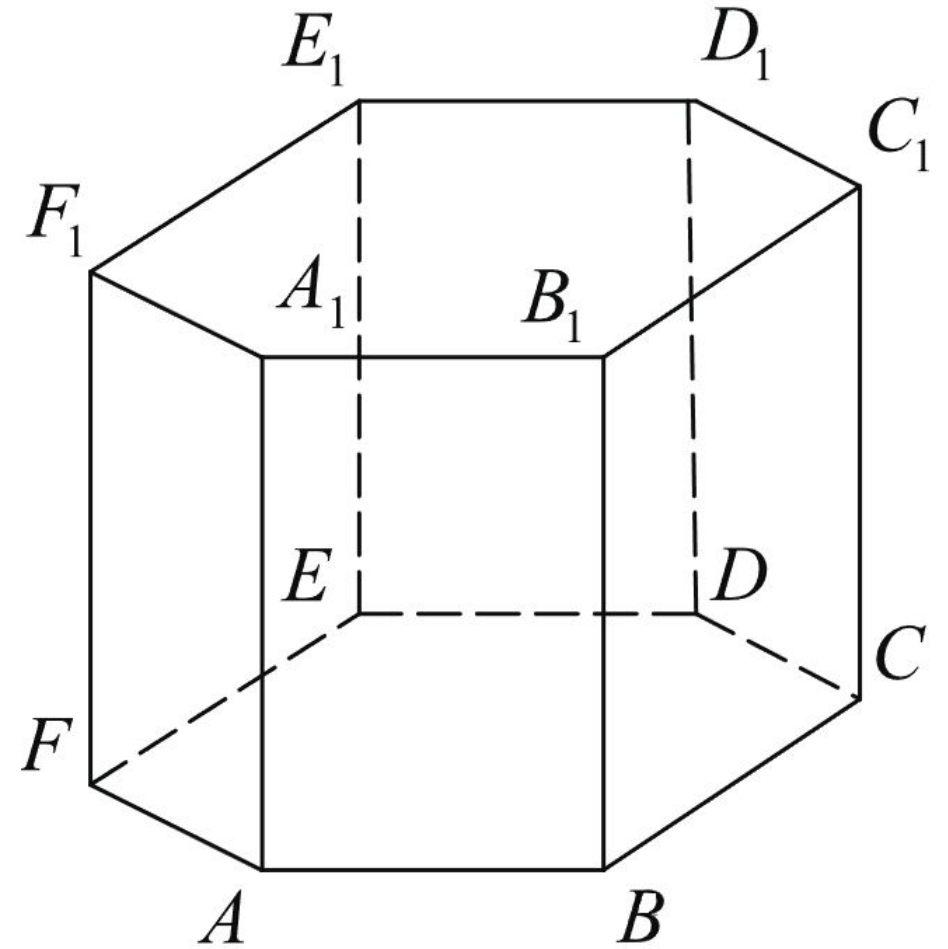
$$(\widehat{FA; AB}) = 60^\circ$$



№41 Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 14, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.

$$V = S \cdot h = 6 \cdot \frac{14^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \frac{196 \cdot 3}{2} =$$
$$= 9 \cdot 98 = 882$$

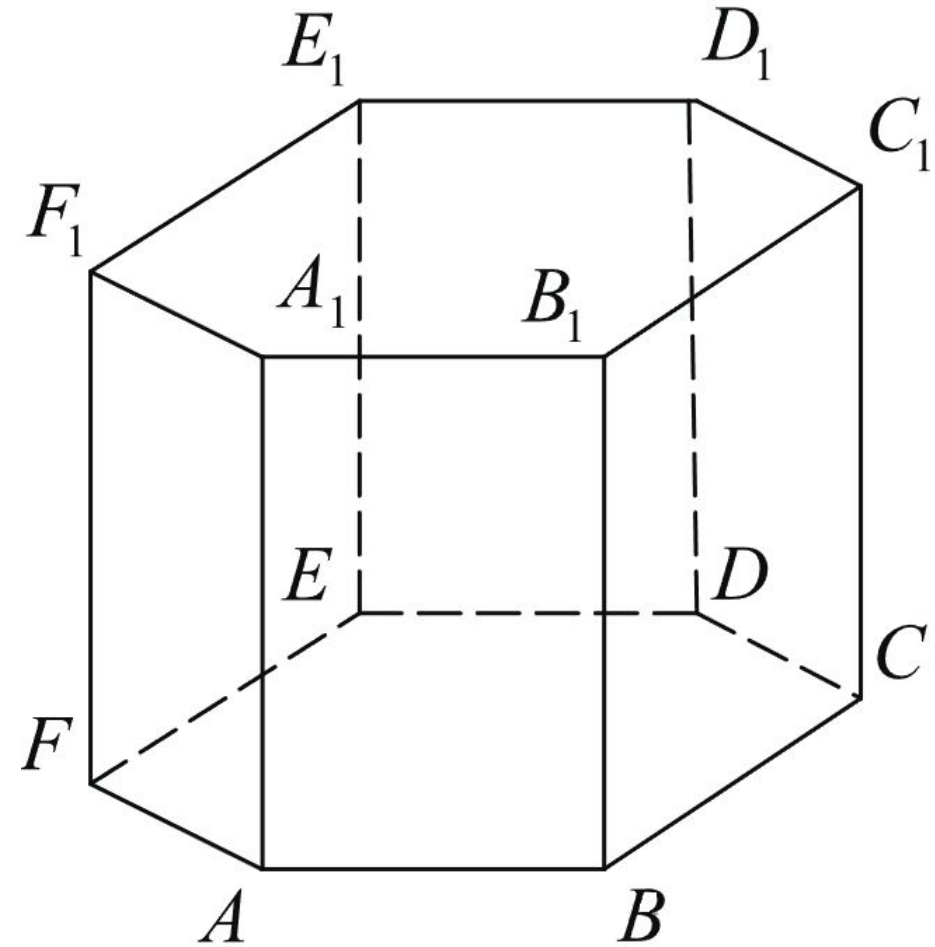
Ответ: 882



№42 Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны $\sqrt{3}$.

$$V = S \cdot h = 6 \cdot \frac{(\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 13,5$$

Ответ: 13,5



№43 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1 .

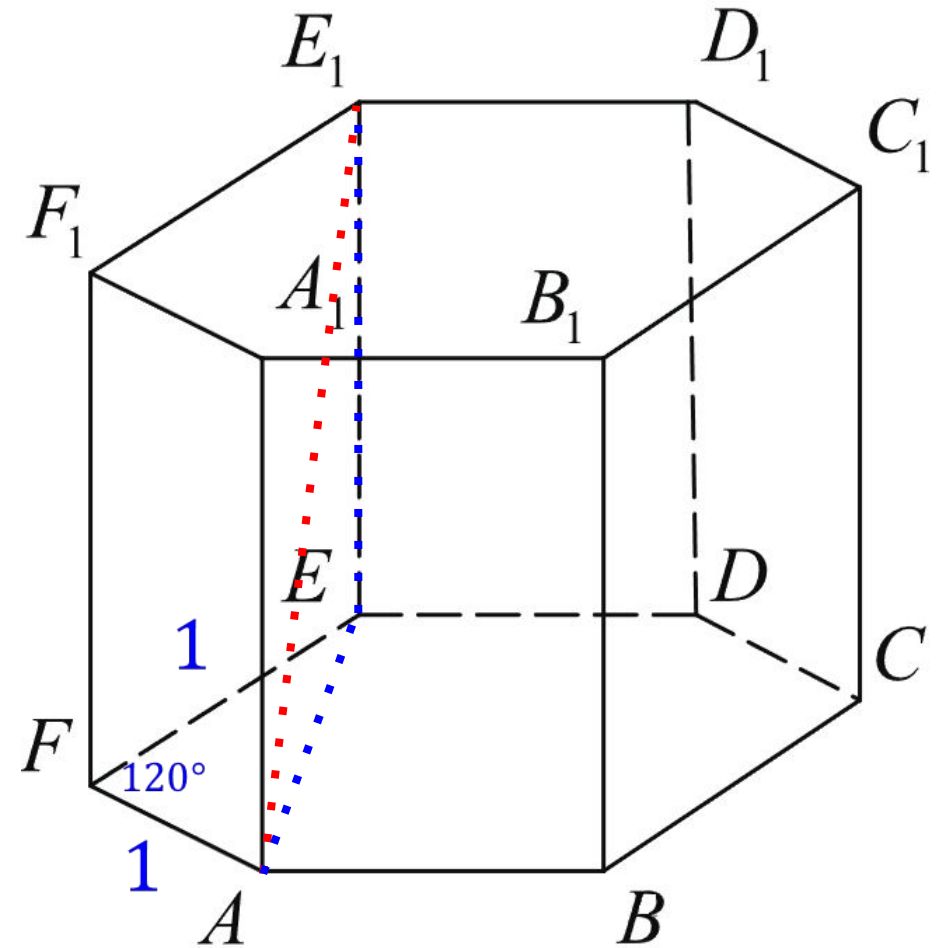
$$AE = \sqrt{FA^2 + FE^2 - 2FA \cdot FE \cdot \cos 120^\circ} =$$

$-\frac{1}{2}$

$$= \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}$$

$$AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

Ответ: 2



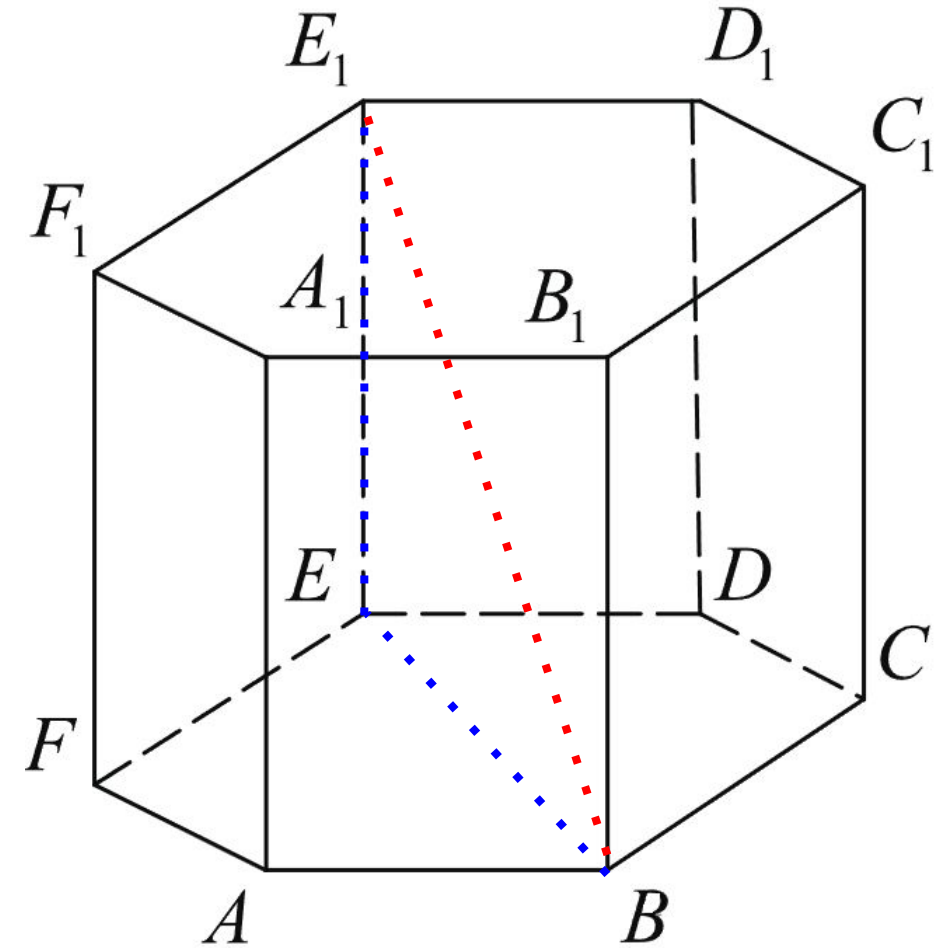
№44 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1 .

BE – большая диагональ

$BE =$ удвоенной стороне $= 2\sqrt{5}$

$$BE_1 = \sqrt{BE^2 + EE_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \\ = \sqrt{20 + 5} = 5$$

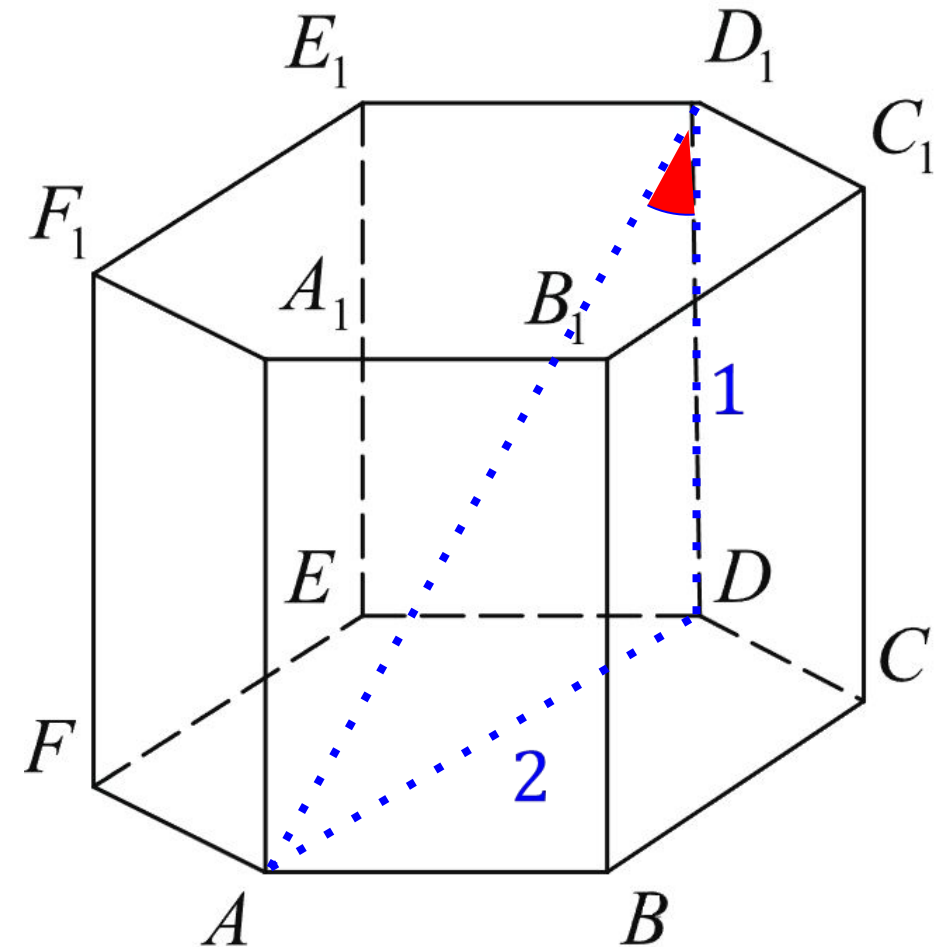
Ответ: 5



№45 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите тангенс угла $AD_1 D$.

$$\operatorname{tg} AD_1 D = \frac{2}{1} = 2$$

Ответ: 2



№46 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол $AC_1 C$. Ответ дайте в градусах.

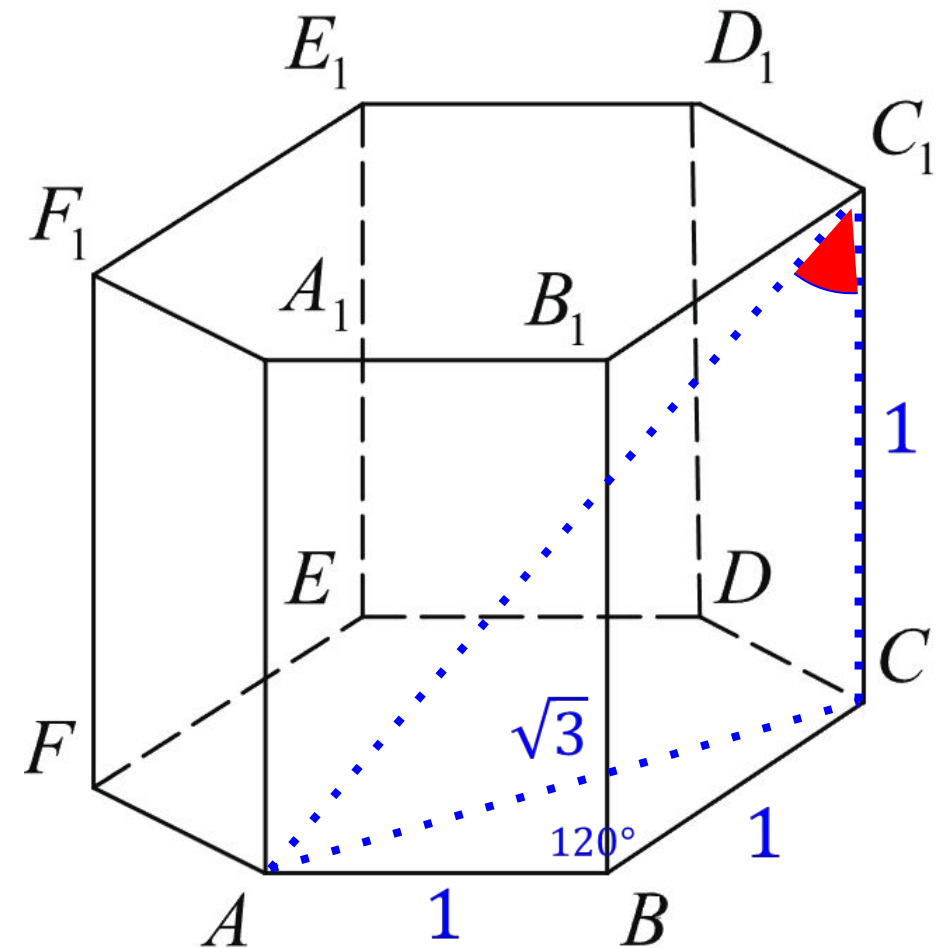
$$AE = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} =$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \angle AD_1 D = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \rightarrow \angle AD_1 D = 60^\circ$$

Ответ: 60



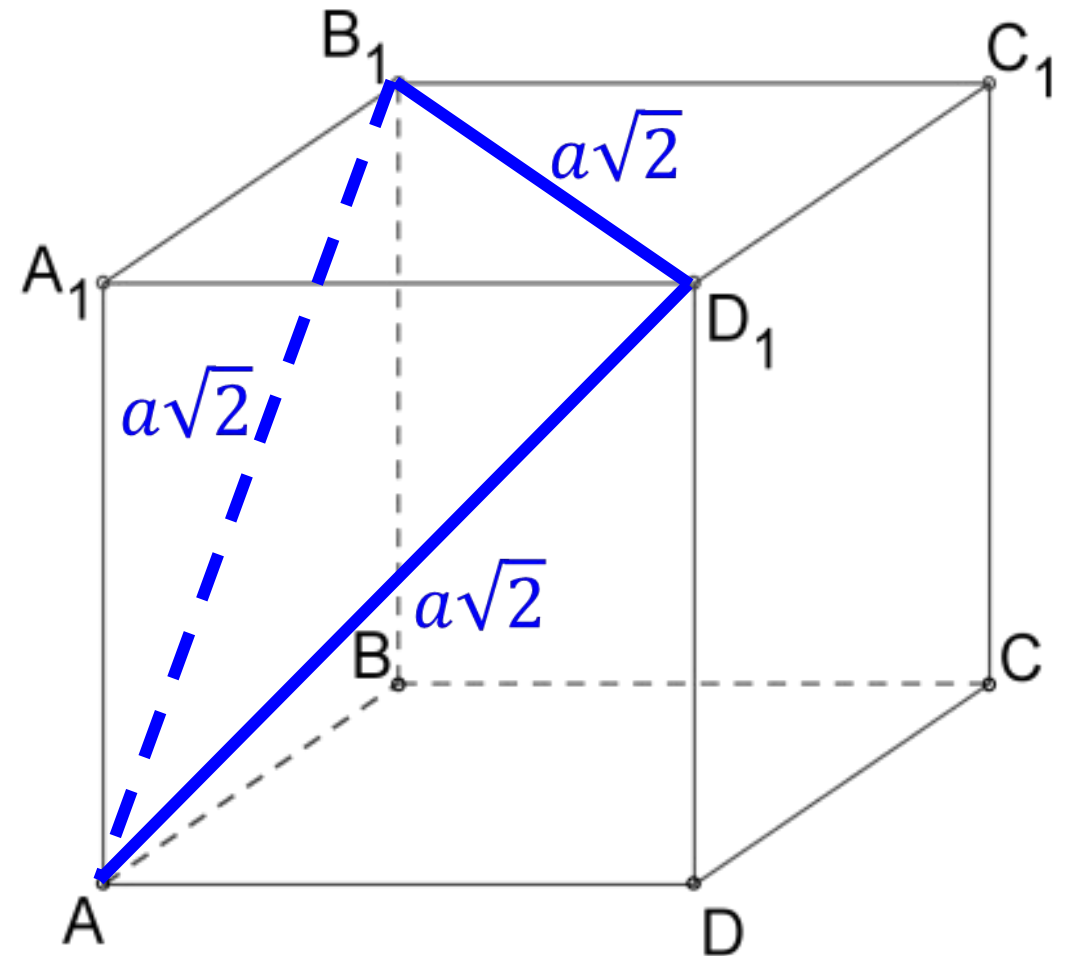
Самостоятельная работа №3

- 1) Нахождение объёма части шестиугольной призмы
- 2) Нахождение угла между прямыми в шестиугольной призме.
- 3) Нахождение длины отрезка в шестиугольной призме.

№29 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и $B_1 D_1$. Ответ дайте в градусах.

(т. к. тр – к равносторонний)

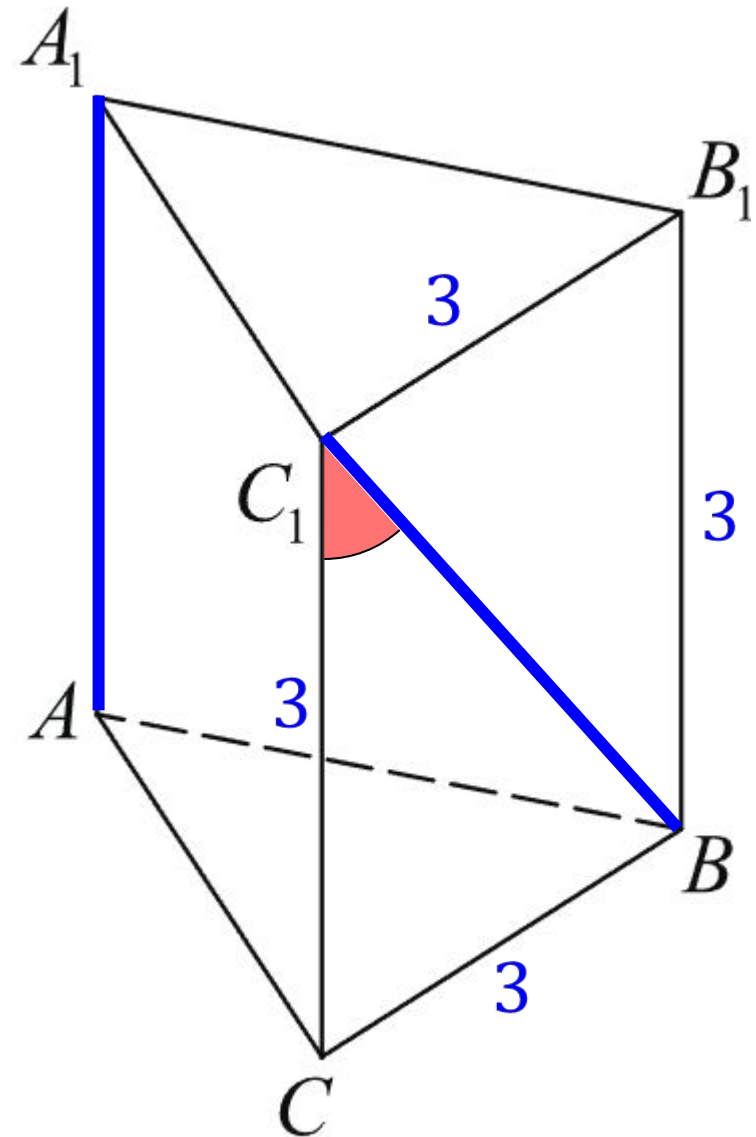
Ответ: 60°



№30 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 3, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 . Ответ дайте в градусах.

Боковая грань CBV_1C_1 — квадрат, поэтому угол между его стороной и диагональю равен 45° .

Ответ: 45°



№31 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $A_1 C = 2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1 . Ответ дайте в градусах.

$A_1 B C D_1$ – прямоугольник

$$BD_1 = A_1 C$$

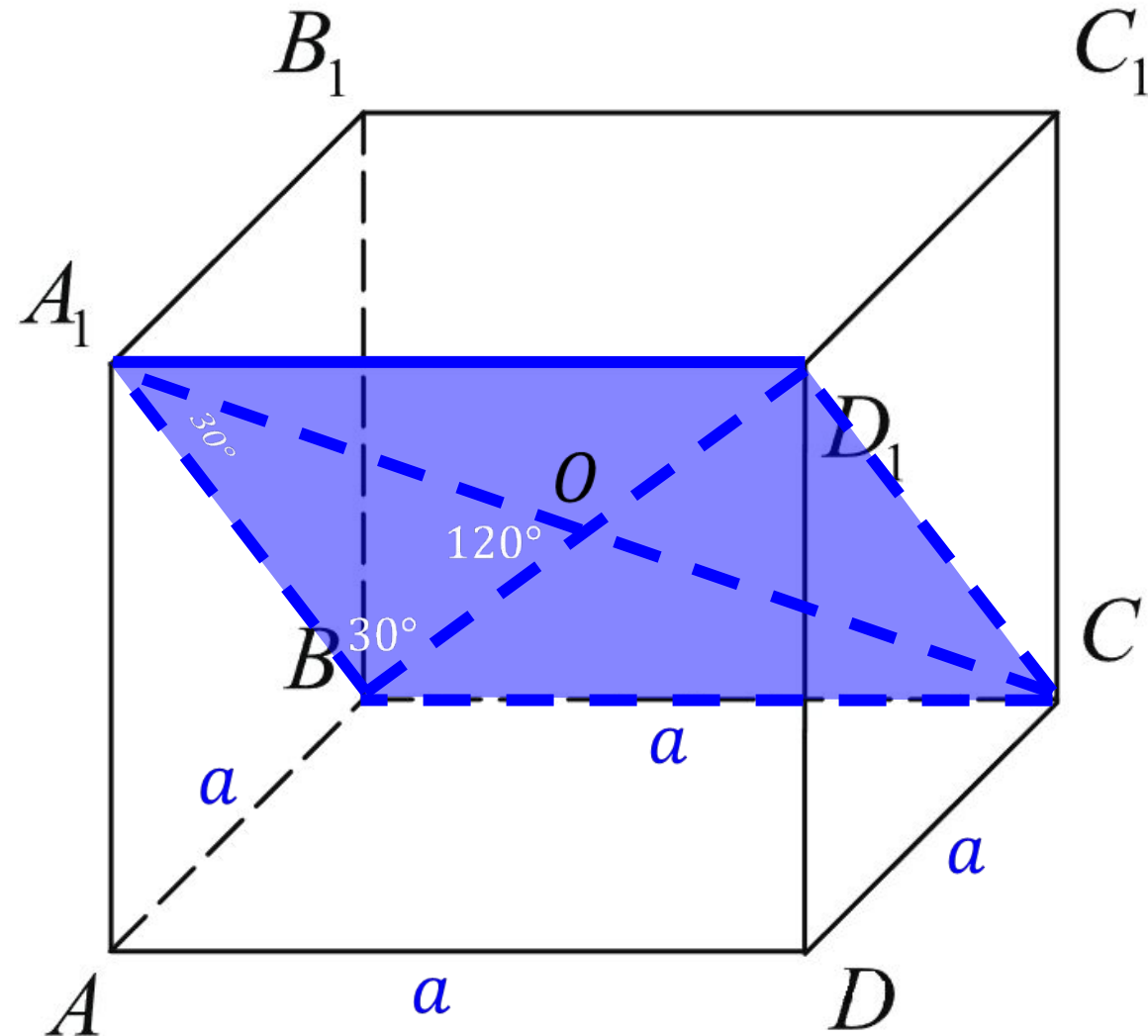
$$\Delta A_1 B C: A_1 C = 2BC \rightarrow \angle C A_1 B = 30^\circ$$

$$\angle D_1 B A_1 = 30^\circ$$

$$\angle A_1 O B = 120^\circ$$

$$\angle B O C = 60^\circ$$

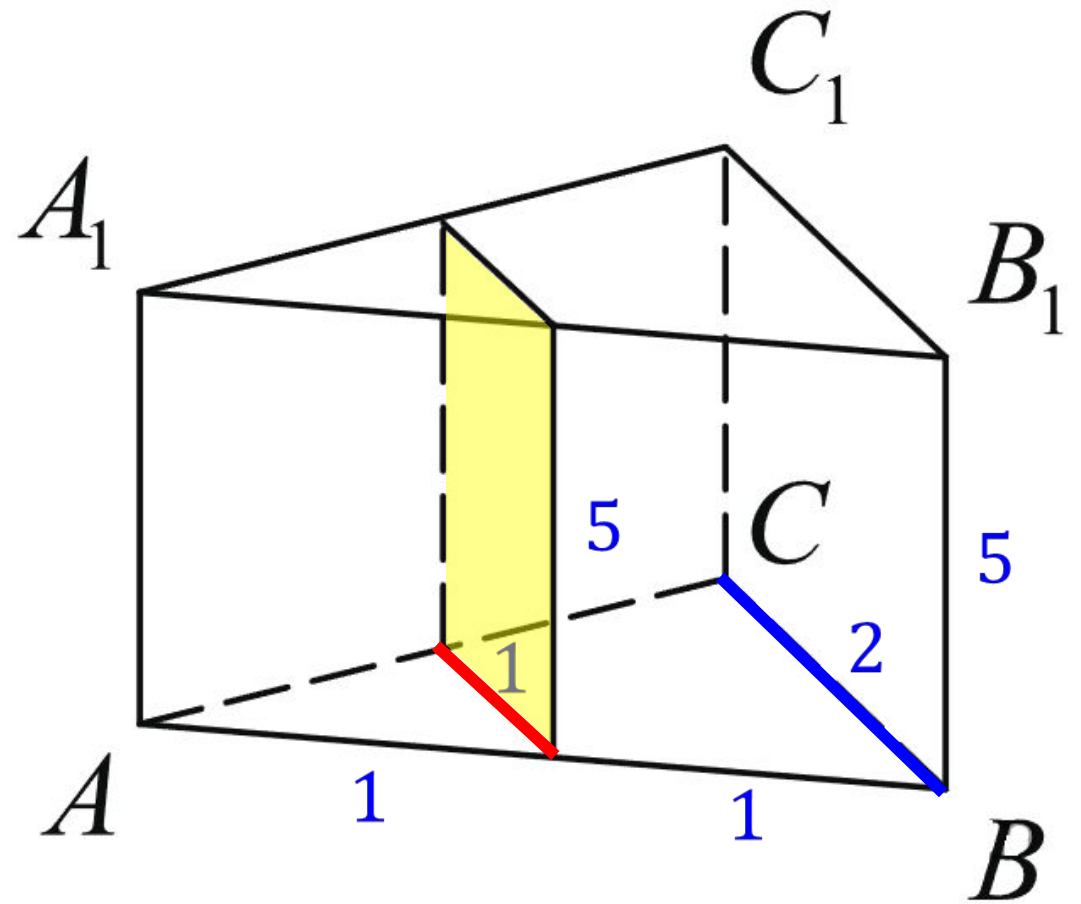
Ответ: 60°



№32 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .

$$S = 5$$

Ответ: 5



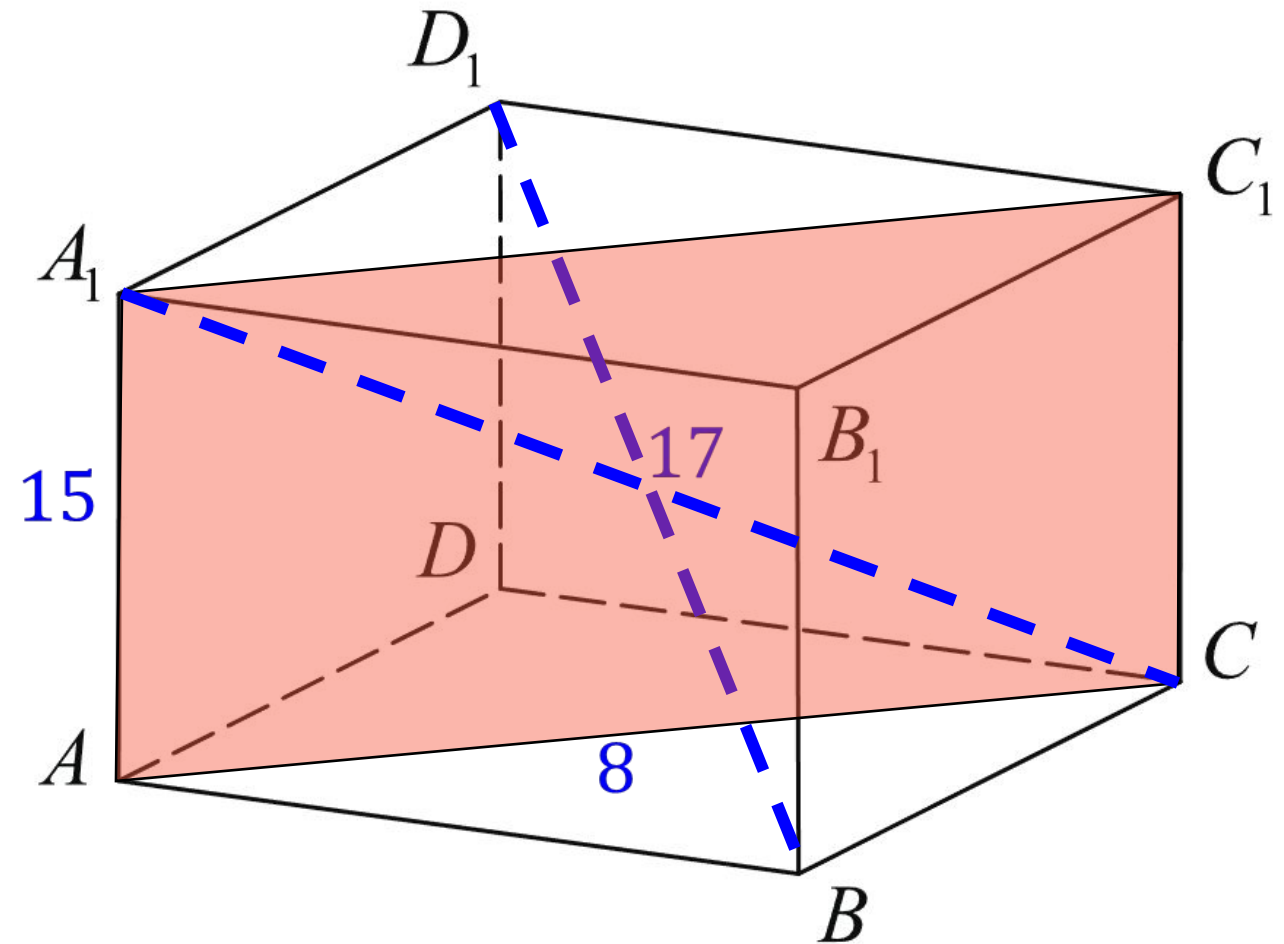
№33 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 15, а диагональ BD_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .

$$BD_1 = A_1C = 17$$

$$AC = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$$

$$S = 15 \cdot 8 = 120$$

Ответ: 120

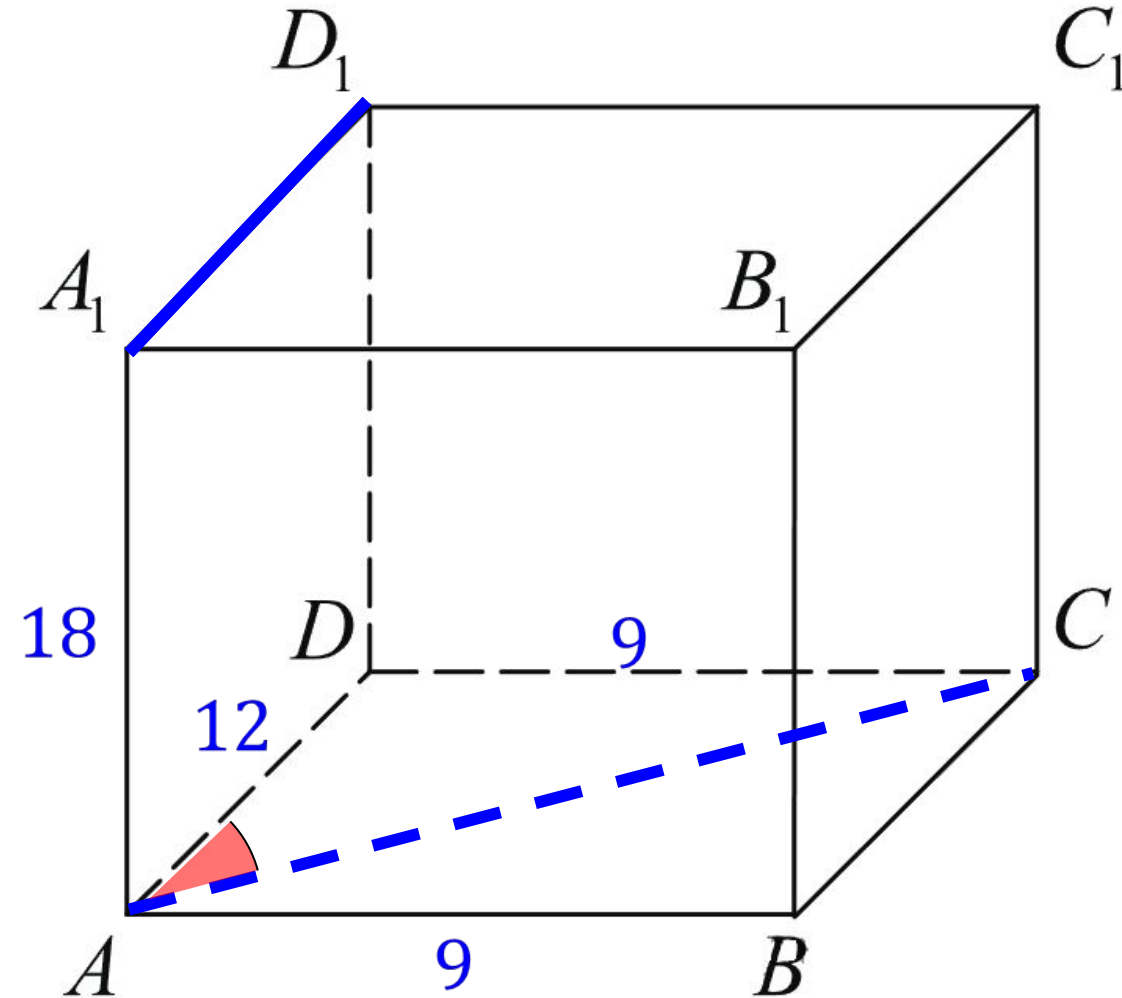


№35 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 18$. Найдите синус угла между прямыми $A_1 D_1$ и AC .

$$AC = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$$

$$\sin CAB = \frac{CD}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Ответ: 0,6



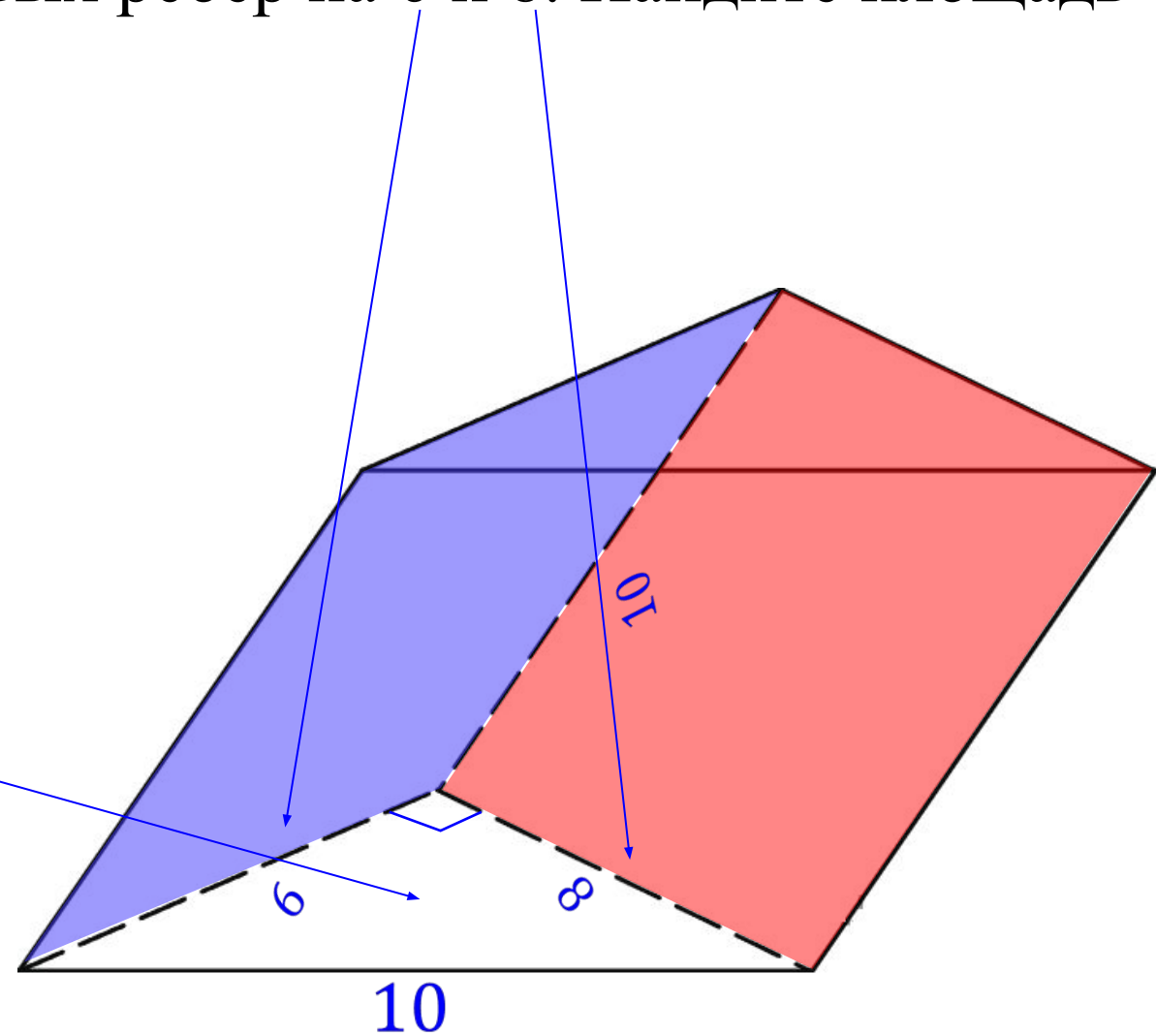
№47 В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

$$S_{\text{бок}} = l \cdot P_{\perp} = 10 \cdot (10 + 6 + 8) = 240$$

l – длина бокового ребра,

P_{\perp} – периметр перпендикулярного сечения призмы:

Ответ: 240

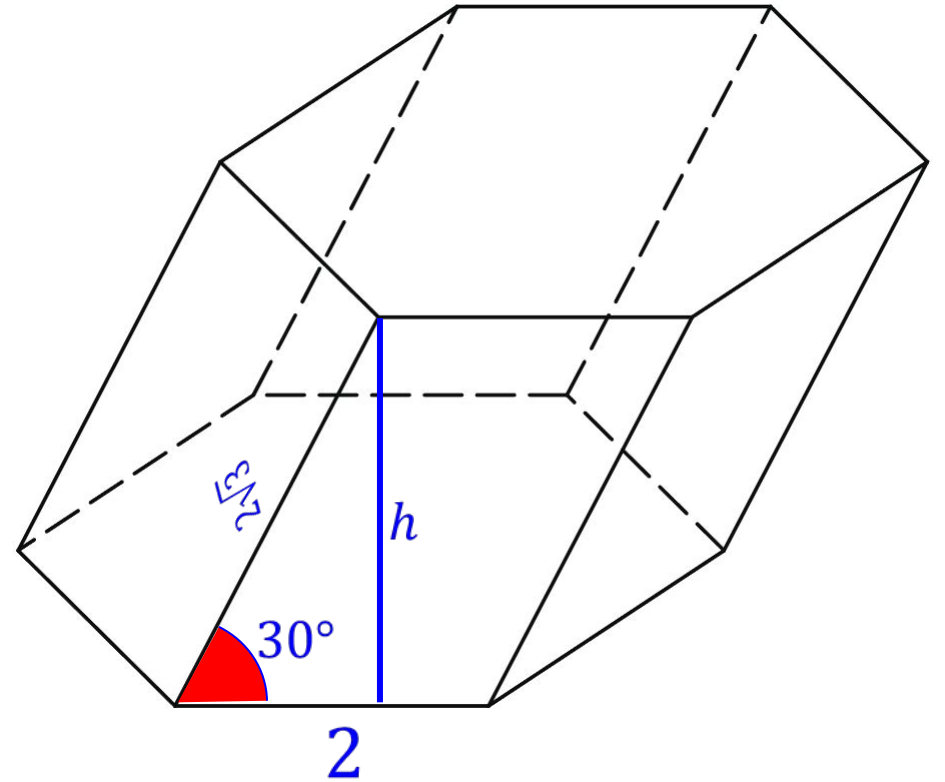


№49 Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30° .

$$V = Sh = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 18$$

$$h = 2\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3}$$

Ответ: 18



№49 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = \sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1 . Ответ дайте в градусах.

$$\operatorname{tg} \angle B_1AA_1 = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3} \rightarrow \angle B_1AA_1 = 60^\circ$$

Ответ: 60

