# ЛЕКЦИЯ №2

## ТЕМА ЛЕКЦИИ:

## «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

## 2 часть

# Матрицы

## Элементарные преобразования и действия над матрицами

made by aspirin

**Определение:** **Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины)

Матрицу A называют матрицей размера m x n

Матрица A имеет m-строк и n- столбцов /колонн/; говорят, что она имеет размер. Всего в матрице размера m x n имеется mn элементов.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \alpha_{m1}\ \alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

# Классификация матриц

1. **Матрицы полагаются равными** при совпадении у них соответствующих элементов. Это записывается так: A=B.

2. **Матрица,** у которой число строк равно числу столбцов **называется квадратной**. Квадратную матрицу размера n x n называют матрицей n – го порядка.

**3**. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной.**

**4**. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной.** Обозначается буквой Е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0....0 \\ 0 & 1....0 \\ \multicolumn{2}{c}{...........} \\ 0 & 0....1 \end{pmatrix}$$

**5.** Квадратная матрица называется **треугольной,** если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

**6.** Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Обозначается буквой О.

**7.** Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или вектор – столбец, или вектор - строка).

**8.**Матрица $A_T$ называется **транспонированной** к А, если в матрице А строки заменены на столбцы соответствующих номеров:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ mo\ A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

2. Умножение всех элементов ряда матрицы на число отличное от нуля;

3. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и тоже число.

Две матрицы А и В называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается А  В.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют канонической.

# Действия над матрицами

- **Суммой матриц** одинакового размера называется матрица, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых. Обозначение: A+B. Аналогично определяется разность матриц.
- **При умножении матрицы на число**, умножаются все элементы данной матрицы.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

- Операция **умножения двух матриц** вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Такие матрицы называются **согласованными** (n × m и m × k)

$$A_{(n\times m)}\cdot B_{(m\times k)}=C_{(n\times k)}$$

- **Произведением** 2-х согласованных матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times k}$ называется матрица размера $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times k}$, элементы которой вычисляются по формуле:
- $C_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$
- Таким образом, элементом новой матрицы является , который равен сумме произведений элементов n строки первой матрицы на соответствующие элементы k столбца второй матрицы.
- Возможно умножение матрицы на вектор-столбец справа и на вектор-строку слева.

## Свойства произведения матриц

1. $A \times O = O$
2. $A \times E = A$
3. $A \times B \neq B \times A$
4. $\alpha (AB) = (\alpha A) \times B = A \times (\alpha B)$
5. $ABC = (AB) \times C = A \times (BC)$
6. $A (B + C) = AB + AC$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2+2.1+1.8+4.1 \\ -4.2+0.1+5.8+6.1 \\ 1.2+7.1+2.8+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 38 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$(9, \quad 2, \quad 3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

=( 9.3+2(-4)+3.1; 9.2+2.0+3.7; 91+2.5+3.2; 9.4+2.6+3.1) =

=( 22, 39, 25, 51).

# Определители.
# Ранг матрицы.

Квадратной матрице А порядка n можно сопоставить число det A, называемое ее определителем, следующим образом:

1. n = 1. A = ($a_1$); det A = $a_1$

2. n = 2. $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

3. n = 3. $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

#

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot 4(-12) + 11(-1)(-3) + 3 \cdot 17 \cdot 1 -$$

$$-(11 \cdot 4 \cdot 1 + 3(-1)(-12) + 2 \cdot 17(-3)) = 5$$

Ответ:5

# Определитель n-го порядка.

*Записывается в виде квадратной таблицы, содержащей* $n^2$ *элементов вида* $a_{ik}$, *расположенных в n строках и* $n$ *столбцах:*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

# Минор элемента $a_{ik}$

- Минором некоторого элемента $a_{ik}$ определителя n-го порядка называется определитель n-1 –го, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент и обозначается $M_{ik}$.

# $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $a_{23}=4$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60+20+0-250-0-42=13$$

$M_{31}=5$ $M_{14}=11$

# Алгебраическое дополнение $A_{ik}$

- Алгебраическим дополнением элемента $a_{ik}$ данного D называется $M_{ik}$ , взятый со знаком «+», если (i+k)- четное число, и со знаком «-», если (i+k)- нечетное число.

Для предыдущего примера:

$A_{23}$=-$M_{23}$=-13
$A_{31}$=$M_{31}$=5
$A_{14}$=-$M_{14}$=-11

## Формула Лапласа.

**Теорема:** Определитель равен сумме произведений элементов всякой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} +$$

$$+11\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-48+51) - 2(12-17) + 11(3-4) =$$

$$= 6 + 10 - 11 = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\left(5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2(5\times 10 - 5\times(-14)) = -2(50+70) = -2\times 120 = -240$$

# Свойства определителей.

1. Транспонирование определителя , т.е. замена строк столбцами и наоборот, не меняет его значения.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Перестановка любых двух строк (столбцов) , меняет только знак D.
D’=-D

3. Общий множитель всех элементов одной строки (столбца) м.б. вынесен за знак D.

$$\begin{vmatrix} ma_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ma_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) равны или пропорциональны, то определитель равен 0.

5. Если элементы какой-либо строки (столбца) состоят из двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, различающихся между собой только элементами одной строки (столбца), бывшими ранее отдельными слагаемыми.

6. Если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить соответственные элементы другой строки или одинаковые пропорциональные им числа ,то исходный определитель не изменится.

- **Рангом матрицы А** называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.
- Ранг матрицы А обозначается rangA или r(A).
- Из определения следует:
- 1. Ранг матрицы $A_{mxn}$ не превосходит меньшего из ее размеров.
- 2. r(A)=0 тогда и только тогда , когда все элементы  матрицы равны 0.
- 3. Для квадратной матрицы n-ого порядка r(A)=n, тогда и только , когда матрица А – невырожденная.

Пример.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:

Все миноры 3-ого порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

. Значит, ранг данной матрицы равен двум (rang A=2)

Ответ: r(A)=2

## Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Пример: найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang A = 2

# Решение систем линейных уравнений. Матричный метод. Формулы Крамера.

# Невырожденные матрицы

- Квадратная матрица А называется **невырожденной**, если определитель не равен нулю. В противном случае матрица А называется **вырожденной**.
- Матрицей, союзной к матрице А, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Где $A_{ik}$ - алгебраическое дополнение элемента $a_{ik}$ данной матрицы А.

# Матричный метод решения системы

## Матричная запись системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + \ + a_{1n}x_n \ = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 \ + \ + a_{nn}x_n \ = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

В матричном виде: $AX = B$, где

$A$ - основная матрица системы;

$X$ – матрица-столбец переменных;

$B$ – матрица-столбец свободных членов.

Если $A$ – невырожденная, т.е. $\Delta \neq 0$ и $A$ имеет единственную $A^{-1}$, то

$A^{-1} AX = A^{-1}B$, т.е.

**$X = A^{-1}B$ – решение системы уравнений**

## <u>Алгоритм нахождения $A^{-1}$</u>

- 1) $\det A \neq 0$
- 2) составить для $A$ союзную матрицу $A^*$
- 3) умножить $A^*$ на $1/\Delta \rightarrow A^{-1}$

# Алгоритм решения систем линейных уравнений матричным методом

1. Составляем матрицы A, B и X

2. Вычисляем определитель матрицы A

3. Находим обратную матрицу $A^{-1}$

4. Находим решение системы уравнений по формуле:

$$X=A^{-1}B$$

# Пример

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

$$\det A=1;$$

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-2)+2\cdot 6+(-3)\cdot 5\\ -4\cdot(-2)+3\cdot 6+(-5)\cdot 5\\ 5\cdot(-2)+(-4)\cdot 6+7\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

# Формулы Крамера

Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными D≠0, то система совместна и имеет единственное решение, выражаемое по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad \ldots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

$D_n$ – это определитель, который получается из определителя системы путем замены только n-го столбца столбцом свободных коэффициентов системы.

# Алгоритм решения систем линейных уравнений по формулам Крамера

- 1. Составляем матрицы А, В, Х
- 2. Вычисляем определитель матрицы А.
- 3. Составляем определитель $\Delta_1$ путем замены первого столбца в матрице А на вектор-столбец матрицы В
- 4.Вычисляем определитель $\Delta_1$ и находим первую неизвестную по формуле:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

5. Составляем определитель $\Delta_2$ путем замены второго столбца в матрице А на вектор-столбец матрицы В

6. Вычисляем определитель $\Delta_2$ и находим вторую неизвестную по формуле:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

7. Составляем определитель $\Delta_3$ путем замены третьего столбца в матрице А на вектор-столбец матрицы В

8. Вычисляем определитель $\Delta_3$ и находим третью неизвестную по формуле:

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

# Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

- Одним из универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических уравнений систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.
- Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (треугольному) виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Назовем матрицей системы матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных. Матрицу, полученную из *A* добавлением столбца свободных членов, называют расширенной матрицей:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

# Теорема Кронекера–Капелли

Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е.

$$r(A) = r(\overline{A})$$

Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если же ранг меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений.

Две системы, множества решений которых совпадают, называются **эквивалентными или равносильными**.

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется **эквивалентным** или **равносильным преобразованием**.

# Пример

Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований вычислим одновременно ранги обеих матриц.

# Метод Гаусса

Для того чтобы решить систему уравнений методом Гаусса выписывают расширенную матрицу этой системы и над строками этой матрицы производят элементарные преобразования, приводя ее к виду, когда ниже главной диагонали, содержащей элементы

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm},$$

будут располагаться нули.

**Разрешается:**

1) изменять порядок строк матрицы, что соответствует изменению порядка уравнений;

2) умножать строки на любые отличные от нуля числа, что соответствует умножению соответствующих уравнений на эти числа;

3) прибавлять к любой строке матрицы другую, умноженную на отличное от нуля число, что соответствует прибавлению к одному уравнению системы другого, умноженного на число.

С помощью этих преобразований каждый раз получается расширенная матрица новой системы, равносильной исходной, т. е. такой системы, решение которой совпадает с решением исходной системы

- Установить совместность и решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и поменяем местами первую и вторую строки для того, чтобы элемент равнялся единице (так удобнее производить преобразования матрицы).

# Прямой ход

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right)\approx$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

# Обратный ход

Ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы совпали с числом неизвестных. Согласно теореме Кронекера-Капелли система уравнений совместна и решение ее единственно.

Выпишем систему уравнений, расширенную матрицу которой мы получили в результате преобразований:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \quad\quad x_3 - x_4 = 2, \\ \quad\quad\quad x_4 = -1. \end{cases}$$

Имеем $x_4 = -1.$ Далее, подставляя его в третье уравнение, найдем

$$x_3.\ x_3 + 1 = 2 \Rightarrow x_3 = 1.$$

Подставляя $x_3 = 1$ и $x_4 = -1$ во второе уравнение, получим $x_2 = 0$ и, наконец, подставляя в первое уравнение найденные неизвестные, получим $x_1 = -2$ Таким образом, имеем решение системы

$$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1.$$

# Общее решение системы линейных уравнений

Если ранг матрицы равен $r$ , то любой отличный от нуля минор порядка $r$ этой матрицы называется базисным.

# Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

# Однородные системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

# Теорема о совместности однородной системы

Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы *ранг матрицы этой системы был меньше числа неизвестных $n$.*

При $r<n$ система является неопределенной, т.е. имеет бесчисленное множество решений, в том числе и нетривиальное.

Если $m=n$, т.е. число уравнений совпадает с числом неизвестных, матрица системы является квадратной. условие $r<n$ в этом случае означает, что определитель системы, т.е. $\det A=0$, что следует из определения ранга матрицы.

# Пример

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$$

и методом элементарных преобразований найдем ее ранг.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r=2.$

Выберем в качестве базисного минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 &= -4x_3 + 3x_4, \\ -x_2 &= 6x_3 - 5x_4. \end{aligned}$$

Общее решение системы

$$X = (c_1, c_2) = \begin{pmatrix} 8c_1 - 7c_2 \\ -6c_1 + 5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

# Фундаментальная система решений

Назовем фундаментальной системой решений систему матриц-столбцов, полученную из общего решения при условии, что свободным неизвестным дают последовательно значения

$$c_1 = 1, c_2 = c_3 = ... = c_n = 0,$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = ... = c_n = 0,$$

..........................................

$$c_1 = c_2 = c_3 = ... = 0, c_n = 1.$$

Матрицы-столбы, т.е. фундаментальную систему решений обозначают Е1, Е2, …, Еn. Общее решение будет представлено в виде

$$X = C_1E_1 + C_2E_2 + ... + C_nE_n.$$

Из общего решения последней системы найдем фундаментальную систему решений.

$$E_1 = X(1,0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = X(0,1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение можно записать в виде

$$X(C_1, C_2) = C_1 E_1 + C_2 E_2.$$

# Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

- Одним из универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических уравнений систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.
- Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (треугольному) виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

- Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.
- Совместная система называется ***определенной,*** если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения. Предыдущей пример демонстрирует совместную определенную систему линейных уравнений.
- Если система неопределенная каждое ее решение называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением.***
- Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

# Решить систему (несовместную) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 4x + 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$A' = \left\| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{array} \right\|$$

Переставим местами первую и вторую строки

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{array} \right\|$$

Умножим элементы второй строки на (-2) и прибавим к соответственным элементам третьей строки.

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right\|$$

Третьей строке соответствует уравнение: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -4$
Равенство неверное $\Rightarrow$ решений нет.

**<u>Ответ: система несовместна.</u>**