ЕГЭ – 2021

Консультация: задания с развёрнутым ответом

Ковалева Галина Ивановна,
доктор пед.наук,
директор центра
математического образования
ВГАПО, профессор кафедры
методики преподавания математики
и физики, ИКТ ВГСПУ

ЕГЭ – 2021

13 задание

Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

а) $1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$,

$2\sin^2 x - \sin x = 0$,

$\sin x(2\sin x - 1) = 0$,

$\sin x = 0$ или $\sin x = \dfrac{1}{2}$,

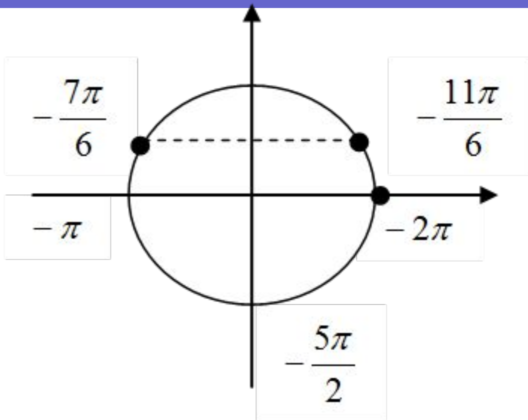
$x = \pi n,\ n \in Z$ или $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

ЕГЭ – 2021

Получаем числа:

-2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.



Ответ:

а) $x=\pi n,\ n\in Z$; $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

б) -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При отсутствии ответа на вопрос пункта *а* задание 13 оценивается 0 баллов

ЕГЭ – 2021

13 задание

Любые ошибки, допущенные в тригонометрических формулах, в нахождении значений тригонометрических функций не относятся к вычислительным.

0 баллов!

$\sin x = 0$ $x = \pi n,\ n \in Z$	$\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$	$\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

ЕГЭ – 2021

13 задание

Формула приведения в квадрате,
вопрос о знаке не ставить

Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin 2x.$

Решите уравнение $\sin x+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\cos 2x.$

Это не формула приведения

Решите уравнение $2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0.$

Четыре слагаемых – метод группировки

ЕГЭ – 2021

13 задание

а) Решите уравнение $\cos 2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Метод введения новой переменной

$$\cos x = t$$

$$2\cos^2 x - 5\sqrt{2}\cos x - 6 = 0$$

$$D = (5\sqrt{2})^2 - 4\cdot 2\cdot(-6) = \underline{98}$$

$$t_{1,2} = \frac{5\sqrt{2} \pm 7\sqrt{2}}{4}$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad t_2 = 3\sqrt{2}$$

Не бросаем решение, выносим множитель из-под знака корня

ЕГЭ – 2021

13 задание

Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

$$\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$$

Решите уравнение $8\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x=5$.

$$\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2x\right)}{2}$$

Знать формулы, табличные значения тригонометрических функций

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2x\right)=\cos\frac{7\pi}{6}\cos 2x-\sin\frac{7\pi}{6}\sin 2x$$

ЕГЭ – 2021

13 задание

Не надо писать лишнее!

Решите уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}+\left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}=2$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}=a \qquad \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}=\frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}=a$$

$$\cancel{a>0}$$

Решите уравнение $2\log_2^2(2\cos x)-9\log_2(2\cos x)+4=0$

$$\log_2(2\cos x)=a$$

Решите уравнение: $\log_4(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x)=x$

Решаем по определению логарифма

$$2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x=4^x$$

ЕГЭ – 2021

13 задание

$$4\log_4^2(\sin^3 x) + 8\log_2(\sin x) = 1$$

$$ОДЗ: \sin x > 0$$

Не надо писать лишнее!

Фактическая математическая ошибка

$$\cancel{x \in (0;\pi)}$$

$$\log_2^2(\sin^3 x) + 8\log_2(\sin x) = 1$$

$$9\log_2^2(\sin x) + 8\log_2(\sin x) = 1$$

$$\log_2(\sin x) = t\ , \quad 9t^2 + 8t - 1 = 0$$

$$\log_2(\sin x) = -1 \qquad\qquad \log_2(\sin x) = \frac{1}{9}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad\qquad \sin x = \sqrt[2]{9}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

(не удов

усл. $|\sin x| \le 1$

ЕГЭ – 2021

13 задание

Решите уравнение $\dfrac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11\sin x}} = 0$

$$\begin{cases} 9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x} = 0, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{4\sin x\cos x} = 3^{2\sqrt{2}\sin x}, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2\cos x} = 3^{\sqrt{2}}, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

ЕГЭ – 2021

13 задание

$$\log_{\sin x}(8\sin^2 x + 3\sin x - 3) = 1$$

$$\begin{cases} 8\sin^2 x + 3\sin x - 3 = \sin x \\ \sin x > 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$$

$$8\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = -\frac{3}{4}$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \qquad \text{не удов. усл. } \sin x > 0$$

ЕГЭ – 2021

15 задание

Алгоритмы решений неравенств

$$\log_5 f(x) \ge 2 \Leftrightarrow f(x) \ge 25$$

$$\log_5 f(x) \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le 25, \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_5 f(x) \ge \log_5 \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_{0,5} f(x) \ge \log_{0,5} \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le \varphi(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_7 f(x) + \log_7 \varphi(x) < \log_7 p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) \cdot \varphi(x) < p(x) \end{cases}$$

ЕГЭ – 2021

15 задание

$$1+\log_6(4-x)\le\log_6\left(16-x^2\right)$$

$$\log_6 6+\log_6(4-x)\le\log_6\left(16-x^2\right)$$

$$\log_6(6(4-x))\le\log_6\left(16-x^2\right)$$

$$\begin{cases}4-x>0,\\6(4-x)\le16-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x>0,\\(4-x)(6-4-x)\le0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-x>0,\\2-x\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4,\\x\ge2\end{cases}\Leftrightarrow2\le x<4.$$

$$\textit{Ответ}:[2;4).$$

ЕГЭ – 2021

15 задание

$$\log_3\left(x^2 - \quad -2\right) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}$$

$$\log_3\left(x^2 - \quad -2\right) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \log_3\left(x^2 - \quad -2\right) \le \log_3 \frac{3(x+1)}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \quad -2 \le \dfrac{3(x+1)}{x-2}, \\ x^2 - \quad -2 > 0 \end{cases} \begin{matrix} x \\ \Leftrightarrow \\ x \end{matrix} \begin{cases} (\quad x+1)(\quad -2) \le \dfrac{3(x+1)}{x-2}, \\ x^2 - \quad -2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)\left((x-2)^2 - 3\right)}{x-2} \le 0, \\ (x+1)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 - 3 \le 0, \\ (x+1)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \le 2 + \sqrt{3}.$$

ЕГЭ – 2021

15 задание

$$\log_4 \frac{3-x}{x-7} + \log_{0,25}(x-3) \ge \log_{\frac{1}{4}}(x-7)^2$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{x-7}{3-x} + \log_{\frac{1}{4}}(x-3) \ge \log_{\frac{1}{4}}(x-7)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-7}{3-x} > 0, \\ x-3>0, \\ \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{(x-7)\cdot(\quad -3)}{3-x} \ge \log_{\frac{1}{4}}(x-7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7<0, \\ x-3>0, \\ \log_{\frac{1}{4}}(7-x) \ge \log_{\frac{1}{4}}(\quad -7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-7<0, \\ x-3>0, \\ 7-x \le (\quad -7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x<7, \\ (x-7)(x-6) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3;6].$$

Ответ: $(3;6]$.

ЕГЭ – 2021

15 задание

$$2\log_2(1-2x)-\log_2\left(\frac{1}{x}-2\right)\le\log_2\left(4x^2+6x-1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x>0,\\ \log_2(1-2x)^2-\log_2\left(\frac{1}{x}-2\right)\le\log_2\left(4x^2+6x-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x>0,\\ \frac{1-2x}{x}>0,\\ \log_2\left((1-2x)^2:\left(\frac{1-2x}{x}\right)\right)\le\log_2\left(4x^2+6x-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x>0,\\ x>0,\\ \log_2\left((1-2x)x\right)\le\log_2\left(4x^2+6x-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x>0,\\ x>0,\\ (1-2x)x\le 4x^2+6x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{2},\\ x>0,\\ 6x^2+5x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{6}\le x<\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$.

ЕГЭ – 2021

15 задание

$$x^2\log_{343}(x+3)\le\log_7\left(x^2+6x+9\right)$$

$$x^2\log_{343}(x+3)\le\log_7\left(x^2+6x+9\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\log_7(x+3)\le 0$$

$$\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\log_7(x+3)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}-2\ge 0,\\ \log_7(x+3)\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x^2}{3}-2\le 0,\\ \log_7(x+3)\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-6\ge 0,\\ x+3\le 1,\\ x+3>0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-6\le 0,\\ x+3\ge 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\textit{Ответ}:\left(-3;-\sqrt{6}\right];\left[-2;\sqrt{6}\right].$$

ЕГЭ – 2021

15 задание

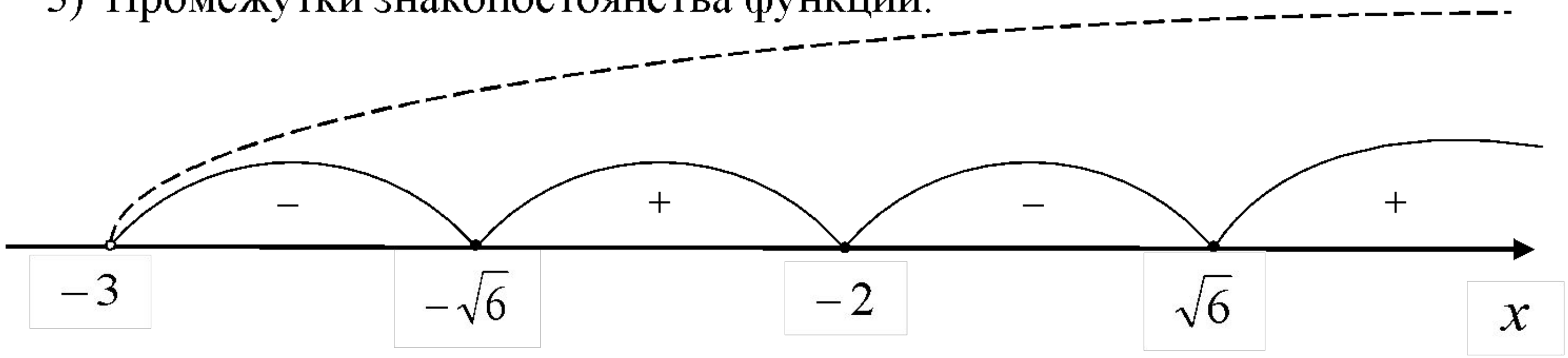
$$x^2\log_{343}(x+3)\le\log_7\left(x^2+6x+9\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\log_7(x+3)\le 0$$

$f(x)=\left(x^2-6\right)\log_7(x+3).$

1) $D(f)$: $x+3>0$, $x>-3$.

2) $f(x)=0$: $x^2-6=0$ или $\log_7(x+3)=0$. То есть $x=-\sqrt{6}$, $x=\sqrt{6}$, $x=-2$.

3) Промежутки знакопостоянства функции:



Ответ: $\left(-3;-\sqrt{6}\right];\left[-2;\sqrt{6}\right]$.

ЕГЭ – 2021

15 задание

$$\frac{4^{x^2+x-4} - 0,5^{2x^2-2x-1}}{0,2\cdot 5^x - 1} \le 0$$

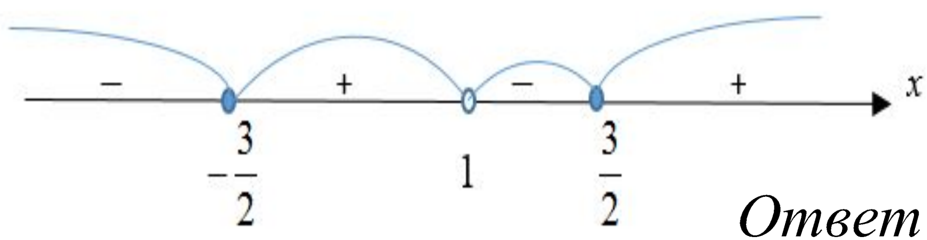
Метод интервалов

$$f(x) = \frac{4^{x^2+x-4} - 0,5^{2x^2-2x-1}}{0,2\cdot 5^x - 1}.$$

1) $x D(f): 0,2\cdot 5^x - 1 \neq 0, \quad \neq 1.$

2) $x f(x) = 0,4^{x^2+x-4} - 0,5^{2x^2-2x-1} = 0, \quad = \pm\frac{3}{2}.$

3)



$$\textit{Ответ}: \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left(1; \frac{3}{2}\right].$$

ЕГЭ – 2021

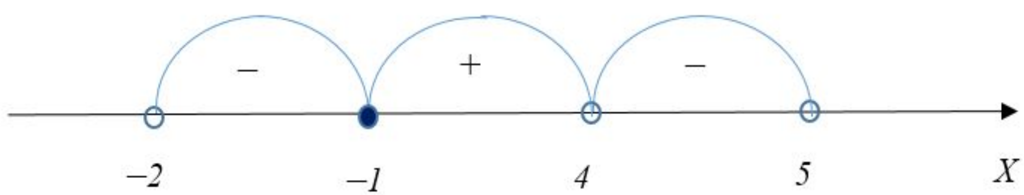
15 задание

$\log_{5-x}\dfrac{x+2}{(x-5)^4}\geq -4$ $\qquad f(x)=\log_{5-x}\dfrac{x+2}{(x-5)^4}+4$

$$1)\,D(f):\begin{cases}5-x>0,\\ 5-x\neq 1,\\ \dfrac{x+2}{(x-5)^4}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<5,\\ x\neq 4.\end{cases}$$

$$2)\,f(x)=0,\qquad \frac{x+2}{(x-5)^4}=\frac{1}{(5-\ )^4},\qquad x=-1.$$

3)



Ответ: $[-1;4)$.

ЕГЭ – 2021

15 задание

$$\frac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36}\geq -1$$

ОДЗ: $\begin{cases}4x^2>0\\ x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2>0\\ x>0\end{cases}$

$$\frac{\log_2 4+\log_2 x^2+35}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)}+1\geq 0$$

$$\frac{2+2\log_2|x|+35+\log_2^2 x-36}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)}\geq 0$$

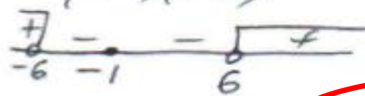
Т.к. по ОДЗ $x>0$, то

$$\frac{\log_2^2 x+2\log_2 x+1}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)}\geq 0$$

Пусть $\log_2 x=t$, тогда

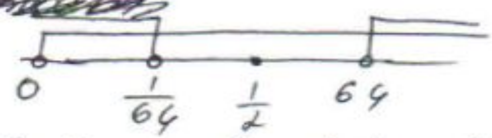
$$\frac{t^2+2t+1}{(t-6)(t+6)}\geq 0$$

$$\frac{(t+1)^2}{(t-6)(t+6)}\geq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t<-6,\\ t>6,\\ t=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x<-6,\\ \log_2 x>6,\\ \log_2 x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<\frac{1}{64},\\ x>64,\\ x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

~~Ответ~~



Ответ: $(0;\frac{1}{64})\cup\{\frac{1}{2}\}\cup(64;+\infty)$

0 баллов

Не забывай - нижняя граница

ЕГЭ – 2021

17 задание

ЗАДАЧИ НА ПОГАШЕНИЕ КРЕДИТА ПО ТАБЛИЦЕ

20 марта Степан взял в банке кредит. В таблице представлен график его погашения.

Дата	20.03	20.04	20.05	20.06	20.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	80%	60%	40%	0%

В конце каждого месяца, начиная с марта, текущий долг увеличивается на 3%, а выплаты по кредиту Степан проводит по графику с 1 по 20 число каждого месяца, начиная с апреля. На сколько процентов больше суммы кредита выплатил Степан?

Что такое m?

S – сумма кредита.

Дата	20.03	20.04	20.05	20.06	20.07
%		Sm	0,8Sm	0,6Sm	0,4Sm
Выплаты	Σ	Sm – 0,8S	0,8Sm – 0,6S	0,6Sm –0,4S	0,4Sm
Долг (в процентах от кредита)	S	0,8S	0,6S	0,4S	0

$$\Sigma = 2,8Sm - 1,8S = S\left(2,8m - 1,8\right).$$

$$\Sigma = S\left(2,8 \cdot 1,03 - 1,8\right) = 1,084S\ .$$

Σ составляет 108,4% от S.

Ответ: 8,4%.

ЕГЭ – 2021

17 задание

ЗАДАЧИ НА ПОГАШЕНИЕ КРЕДИТА РАВНЫМИ ПЛАТЕЖАМИ

31 декабря 2017 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Родион переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Родион взял кредит в банке?

Решение

Пусть S – сумма кредита. $x = 1\,464\,100$, $y = 2\,674\,100$, $b = \dfrac{100+a}{100}$.

$$\begin{cases} Sb^4 - xb^3 - xb^2 - xb - x = 0; \\ Sb^2 - yb - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sb^4 = x(b^3 + b^2 + b + 1); \\ Sb^2 = y(b+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sb^4 = x(b+1)(b^2+1); \\ Sb^2 = y(b+1). \end{cases}$$

$$b^2 = \frac{x(b^2+1)}{y},\ b^2 = \frac{x}{y-x}.$$

$b = 1{,}1.$

Ответ: 10%.

ЕГЭ – 2021

17 задание

ЗАДАЧИ НА ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ПЛАТЕЖИ ПО КРЕДИТАМ

15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн. рублей?

Ответ: 0,8 млн. рублей.

ЕГЭ – 2021

17 задание

		1	2	3				22	23	24
Проценты на остаток долга		Sm	$\frac{23S}{24}m$	$\frac{22S}{24}m$					$\frac{2S}{24}m$	$\frac{S}{24}m$
Выплаты		$x_1 = Sm - \frac{23S}{24}$	$x_2 = \frac{23S}{24}m - \frac{22S}{24}$	$x_3 = \frac{22S}{24}m - \frac{21S}{24}$					$x_{23} = \frac{2S}{24}m - \frac{S}{24}$	$x_{24} = \frac{S}{24}m$
Остаток долга (в млн рублей)	S	$\frac{23S}{24}$	$\frac{22S}{24}$	$\frac{21S}{24}$				$\frac{2S}{24}$	$\frac{S}{24}$	0

Сумма всех выплат: $\sum = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{24} = 1$.

$x_1, x_2, x_3, \ldots. x_{24}$ – члены убывающей арифметической прогрессии, поэтому $\sum = \frac{(x_1 + x_{24}) \cdot 24}{2} = 1$.

$\frac{(Sm - \frac{23S}{24} + \frac{S}{24}m) \cdot 24}{2} = 1$, $24Sm - 23S + Sm = 2$, $|S(25m - 23) = 2$. Подставляя $m = 1,02$, находим S.

ЕГЭ – 2021

17 задание

Строительство нового завода стоит 100 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+x+7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0,5x^2+x+7\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

Решение.

Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год выражается как

$$px-\left(0,5x^2+x+7\right)=-0,5x^2+(p-1)x-7.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-1$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2}-7$. Строительство завода окупится не более чем за 4 года, если

$$\frac{(p-1)^2}{2}-7\geq\frac{100}{4};\ (p-1)^2\geq 64;\ (p-9)(p+7)\geq 0,$$

то есть при $p\geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p=9$.

Ответ: $p=9$.

ЕГЭ – 2021

17 задание

Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн. рублей в год. Если продукцию продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px-(0,5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки завода цена продукции p=10 тыс. руб. за единицу, каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. руб. за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Решение.

Прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год выражается как $px-(0,5x^2+2x+6)=-0,5x^2+(p-2)x-6$.

Это выражение является квадратным трехчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-2$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-2)^2}{2}-6$. Таким образом, в первый год прибыль составит 26 млн рублей, во второй –34,5 млн рублей, в третий –44 млн рублей, в четвертый год –54,5 млн рублей. Поскольку 159=26+34,5+44+54,5, строительство полностью окупится за 4 года.

Ответ: 4.

ЕГЭ – 2021

17 задание

Решение №2.2 (матем. анализ). Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 гб. из всей первичной информации. Тогда $x^2+y^2=3364$, а обработано будет $20x+21y$ гб. информации. Выразим y через x: $y=\sqrt{3364-x^2}$. Требуется найти наибольшее значение функции $f(x)=20x+21\sqrt{3364-x^2}$.

$$f'(x)=20-\frac{21x}{\sqrt{3364-x^2}},\quad f'(x)=0,\quad 400=\frac{441x^2}{3364-x^2},\quad x^2=\frac{400\cdot 3364}{841}=1600,\quad x=40$$

Поэтому $x=40$ единственная критическая точка и $y=\sqrt{3364-1600}=42$. Условия $25\le x\le 55$, $25\le y\le 55$ выполнены. Если $x<40$, то $x^2<1600$, $400>\dfrac{441x^2}{3364-x^2}$ и $f'(x)>0$. Если $x>40$, то $f'(x)<0$. Поэтому $x=40$ есть точка максимума. Значит, $f_{наиб}=f(40)=20\cdot 40+21\cdot 42=1682$.

Ответ: 1682.

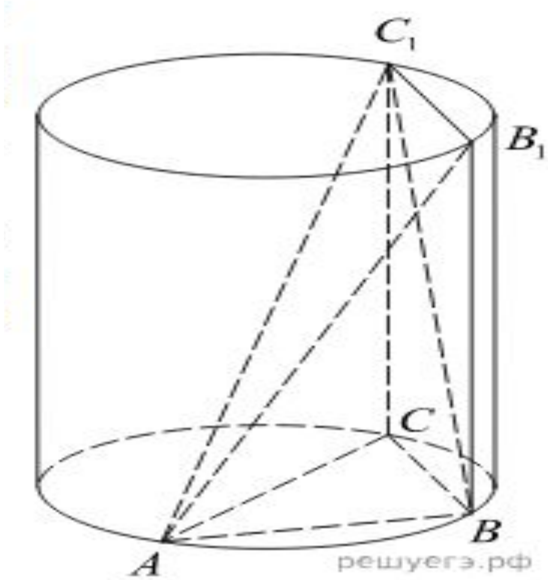
ЕГЭ – 2021

14 задание

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.



Оформление решения

1) OO_1 – ось цилиндра. Так как $OO_1 \cap AC_1$, то AC – диаметр.

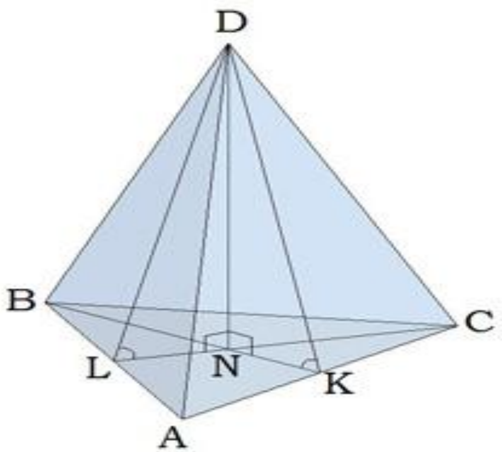
2) $\angle ABC = 90^\circ$ (по свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр).

3) $\left.\begin{array}{l} AB \perp BC \\ AB \perp CC_1 \\ BC \cap CC_1 \end{array}\right| \Rightarrow AB \perp (BCC_1).$

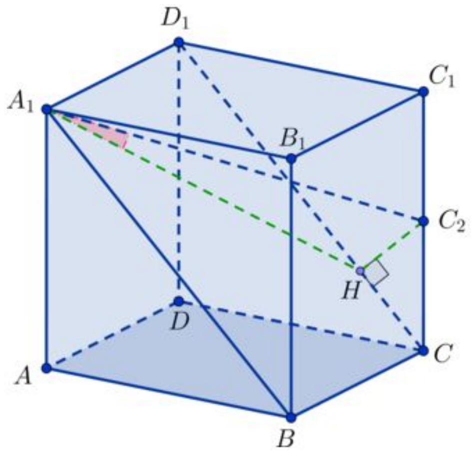
4) $\left.\begin{array}{l} AB \perp (BCC_1) \\ BC_1 \in (BCC_1) \end{array}\right| \Rightarrow AB \perp BC_1 \Rightarrow \angle ABC_1 = 90^\circ.$

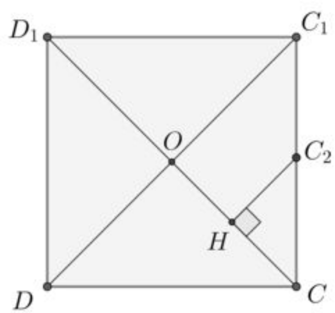
ЕГЭ – 2021

14 задание



Правильное изображение фигур

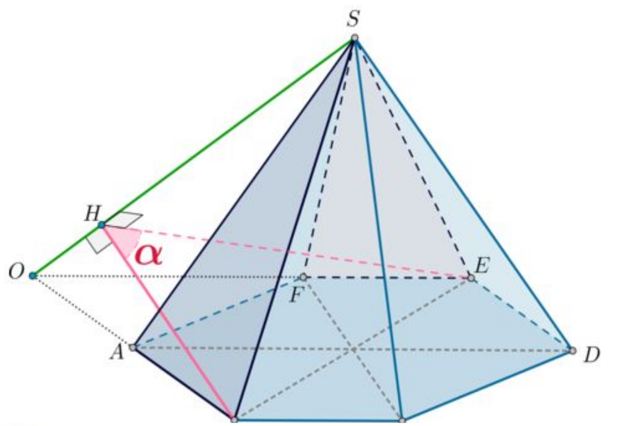


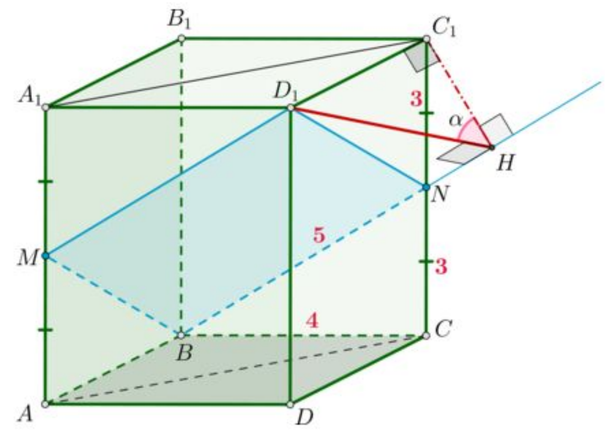


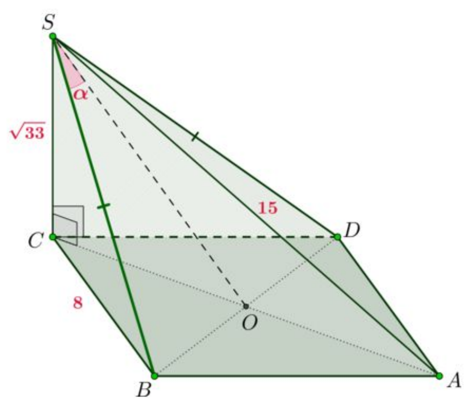
Выносные чертежи

ЕГЭ – 2021

14 задание



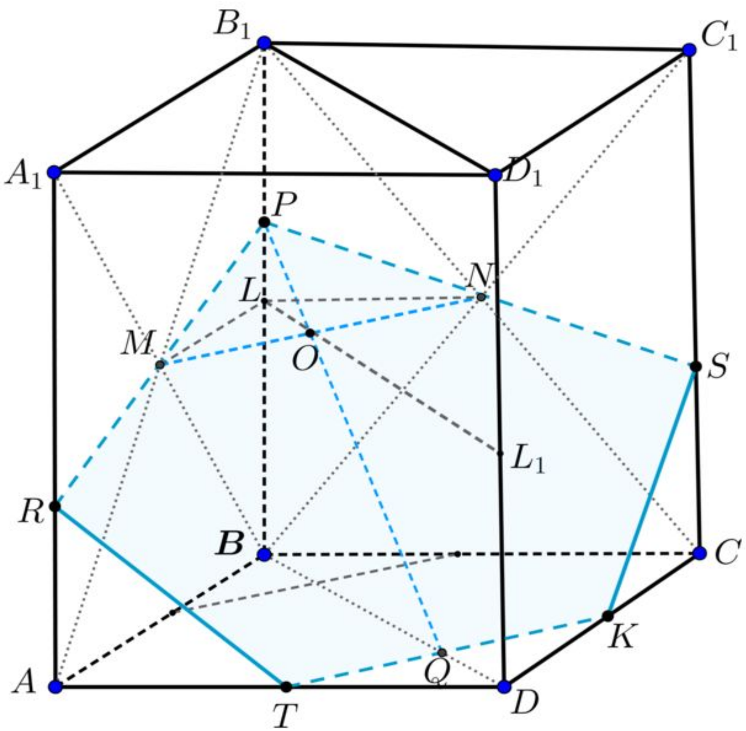


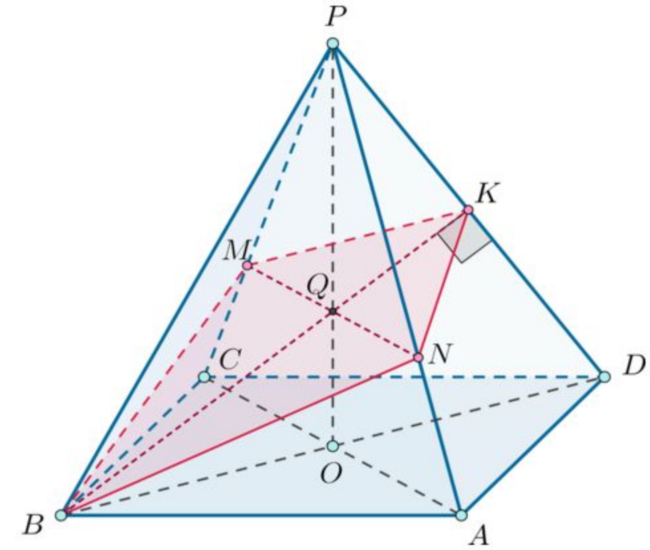


Алгоритмы нахождения углов и расстояний

ЕГЭ – 2021

17 задание

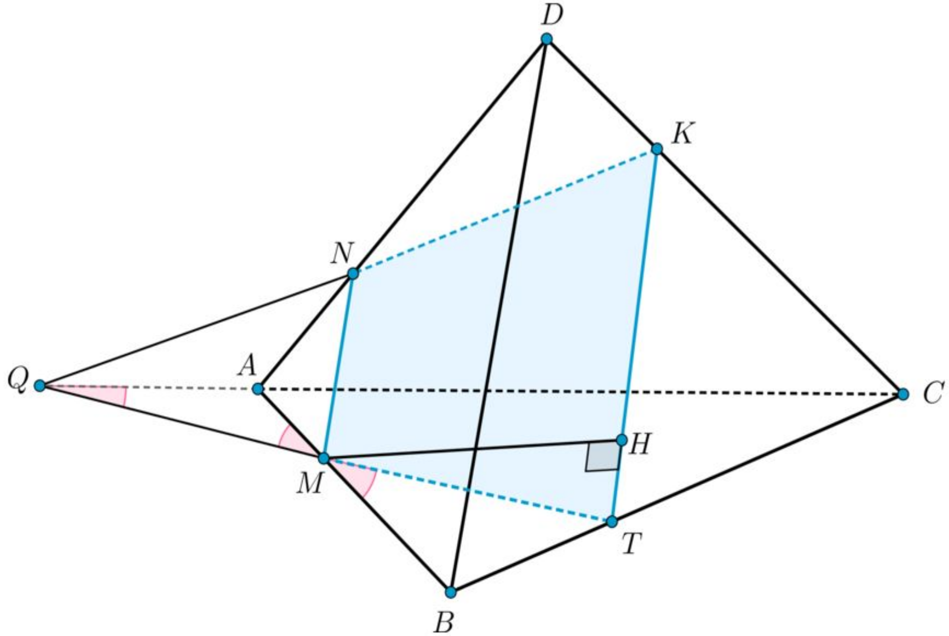


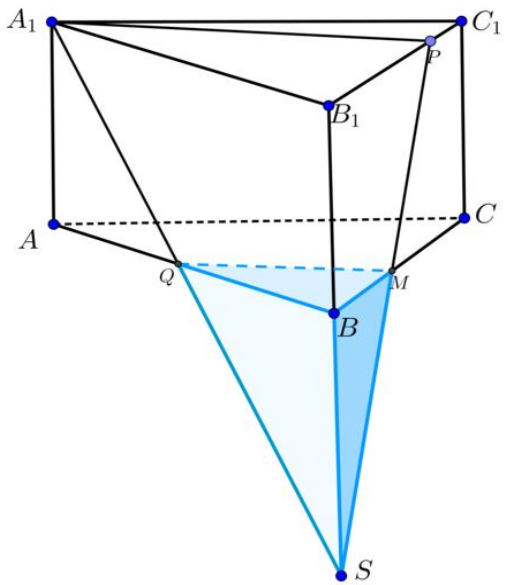


Построение сечений

ЕГЭ – 2021

17 задание

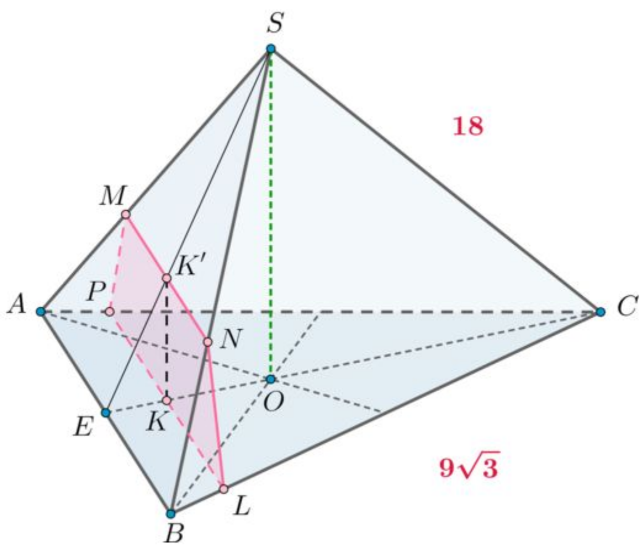


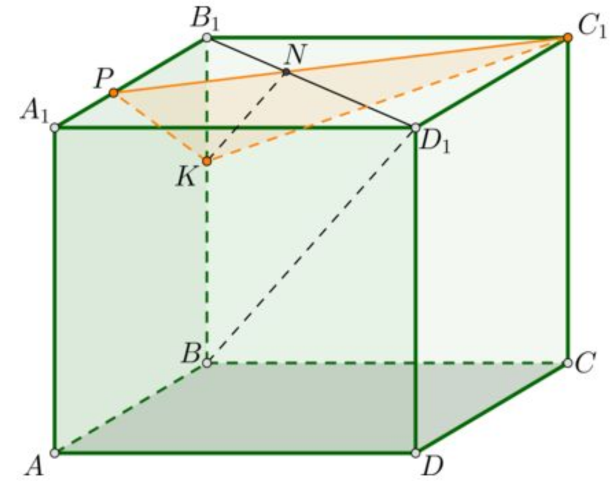


Построение сечений

ЕГЭ – 2021

18 задание

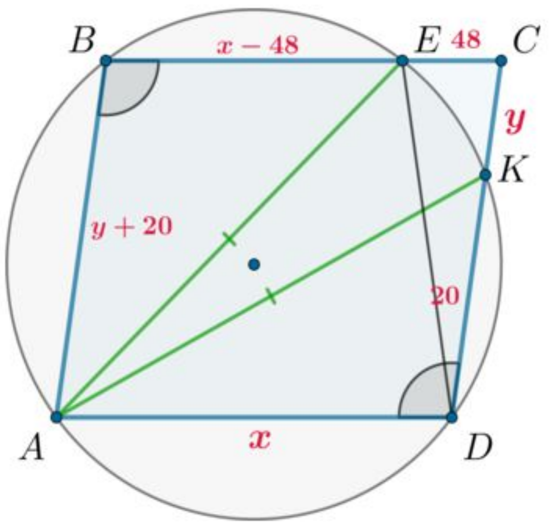




Построение сечений, перпендикулярных (параллельных) элементам фигур

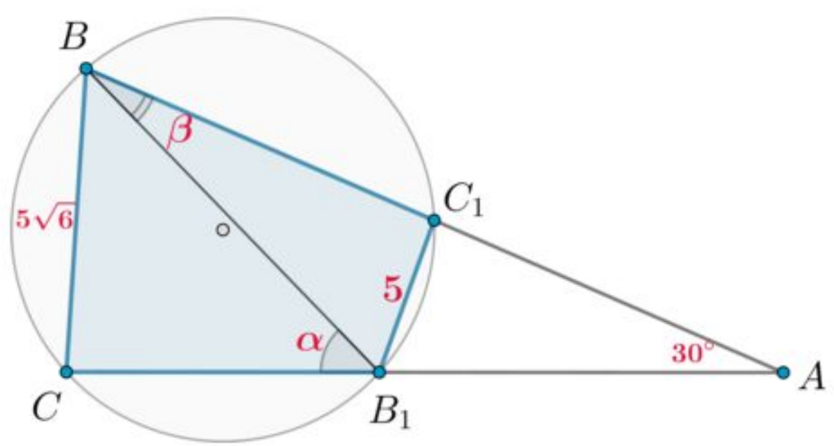
ЕГЭ – 2021

16 задание

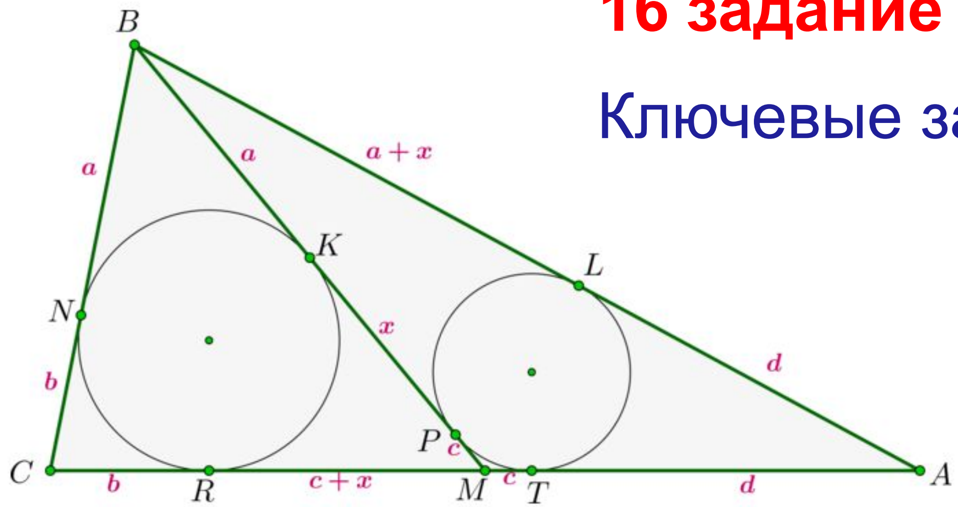


«Рабочий» чертеж

Построение чертежа, отвечающего условию задачи



ЕГЭ – 2021



16 задание

Ключевые задачи

Методы и приемы: «шагаем по периметру», метод площадей, метод подобия, прием удвоения медианы, теорема Вариньона, метод вспомогательной окружности и др.

ЕГЭ – 2021

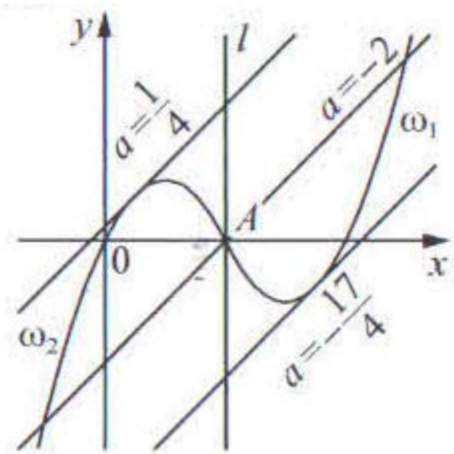
18 задание

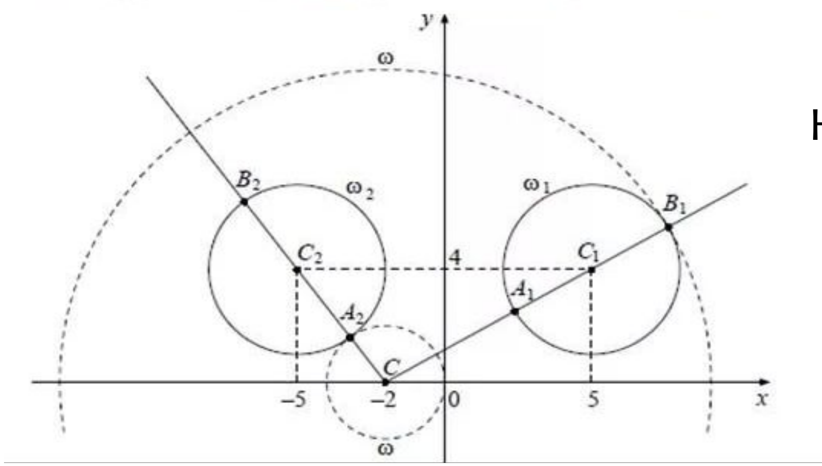
Графический метод

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнен

$$\begin{cases}(x-2)(y+2x-4)=|x-2|^3,\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.





Найдите все значения , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9\\ (x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Исследование «предельных» случаев

ЕГЭ – 2021

18 задание

Инвариантность

Пример. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+(2-a)^2=|x-2+a|+|x-a+2|$ имеет единственное решение.

Решение. Если уравнение имеет корень x_o, то в силу четности функций, представляющих левую и правую части уравнения, $-x_o$ также является корнем уравнения. Значит, решение может быть единственным, только при $x_o=0$.

Следовательно, $(2-a)^2=2|2-a|$. $|2-a|^2=2|2-a|$, $|2-a|=0$ или $|2-a|=2$.

Отсюда, $a=2$ или $a=0$ или $a=4$.

Обязательна проверка

Ответ: $a=0$, $a=4$.

ЕГЭ – 2021

18 задание

Замена переменной

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{11a-(a^2-7a+17)\sin x+9}{3\cos^2 x+a^2+2}<3$$

содержит отрезок $\left[0;\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

Переформулировать задание

Решение.

Сделаем замену: $z=\sin x$. Тогда $-1\le z\le 1$ и неравенство принимает вид

$$\frac{11a-(a^2-7a+17)z+9}{a^2+5-3z^2}<3 \Leftrightarrow \frac{9z^2-(a^2-7a+17)z-6+11a-3a^2}{a^2+5-3z^2}<0.$$

При $-1\le z\le 1$ знаменатель положителен. Если $x\in\left[0;\ \frac{3\pi}{4}\right]$, то $z\in[0;\ 1]$, поэтому достаточно найти все a, при каждом из которых неравенство

$$9z^2-(a^2-7a+17)z-6+11a-3a^2<0$$

справедливо при всех z из отрезка $[0;\ 1]$.

Найти множество значений новой переменной

ЕГЭ – 2021

18 задание

Расположение графика квадратичной функции

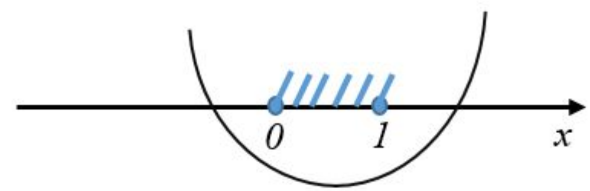
Рассмотрим функцию

$$f(z) = 9z^2 - (a^2 - 7a + 17)z - 6 + 11a - 3a^2.$$

Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Получаем, что $f(z) < 0$ при всех $0 \le z \le 1$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) < 0. \end{cases}$ Решим эту систему:

$$\begin{cases} -6 + 11a - 3a^2 < 0, \\ -2a^2 + 9a - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-a)(3a-2) < 0, \\ (1-a)(2a-7) \end{cases} \Leftrightarrow \left[a < \frac{2}{3}, \right.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (3{,}5; +\infty)$.



ЕГЭ – 2021

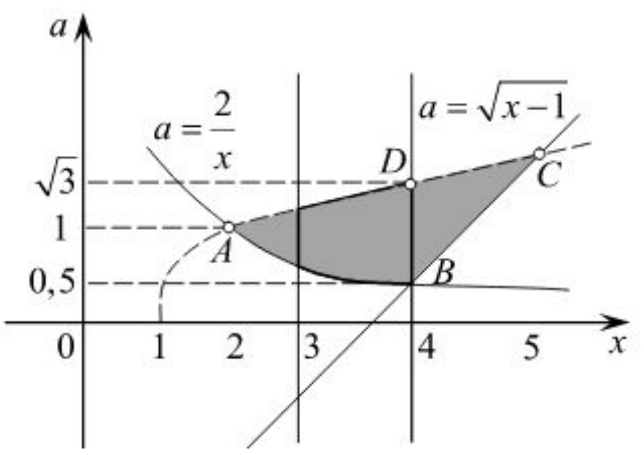
18 задание

Метод областей

Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.



Ответ: $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.

ЕГЭ – 2021

18 задание

Аналитический метод

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |5a - 12| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-4x} \cdot \ln(9x^2 - a^2) = \sqrt{1-4x} \cdot \ln(3x - a)$$

имеет хотя бы одно решение.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2 + 2x + a}{4x^2 - 3ax - a^2} = 0$ имеет ровно два различных корня.

ЕГЭ – 2021

19 задание

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Решение.

а) Пять чисел 6, 7, 8, 9, 10 удовлетворяют условию задачи. Пример

б) Заметим, что среди написанных чисел только одно число может быть больше 9, поскольку произведение любых двух различных натуральных чисел, больших 9, больше 100. Аналогично, среди написанных чисел только одно число может быть меньше 7, поскольку произведение любых двух различных натуральных чисел, меньших 7, меньше 40. Таким образом, помимо наибольшего и наименьшего чисел, на доске могут быть написаны только числа 7, 8 или 9. Следовательно, на доске не может быть более пяти чисел.

Доказательство

ЕГЭ – 2021

19 задание

в) Пусть на доске написаны числа a, b, c и d, причём $a<b<c<d$. Тогда для выполнения условий задачи достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$ab>40,\ cd<100.$$

В пункте «б» было доказано, что $7 \le b < c \le 9$. Разберём три случая.

Если $b=7$, $c=8$, то $7a>40$, $8d<100$, откуда, учитывая, что a и d — целые, получаем $a=6$, $9 \le d \le 12$. В этом случае наибольшее возможное значение суммы достигается при $d=12$ и равно 33.

Если $b=7$, $c=9$, то $7a>40$, $9d<100$, откуда, учитывая, что a и d — целые, получаем $a=6$, $10 \le d \le 11$. В этом случае наибольшее возможное значение суммы достигается при $d=11$ и равно 33.

Если $b=8$, $c=9$, то $8a>40$, $9d<100$, откуда, учитывая, что a и d — целые, получаем $6 \le a \le 7$, $10 \le d \le 11$. В этом случае наибольшее возможное значение суммы достигается при $a=7$ и $d=11$ и равно 35.

Таким образом, наибольшее значение суммы равно 35.

Ответ: а) да; б) нет; в) 35.

Оценка + пример

ЕГЭ – 2021

Полезная информация

По всем вопросам ЕГЭ вы можете найти информацию в Интернете

Официальный информационный портал Единого государственного экзамена	www.ege.edu.ru
Сайт Федерального института Педагогических измерений	http://fipi.ru