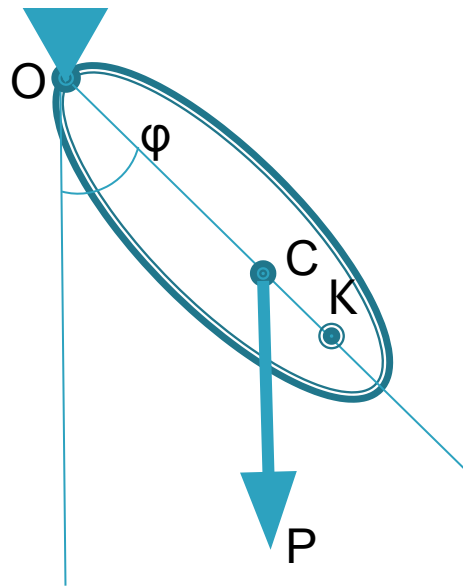


ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

*ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
ДИНАМИКА*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Физический маятник – твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.



Положение маятника будем определять углом φ отклонения линии ОС от вертикали.

P — вес маятника

a — расстояние ОС от центра масс до оси подвеса, J_O — момент инерции маятника относительно оси подвеса.

ЗАКОН КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Для определения закона колебаний маятника воспользуемся дифференциальным уравнением вращательного движения.

В данном случае $M_0 = -Pa \sin \varphi$, т.к. при $\varphi < 0$ момент положителен, а при $\varphi > 0$ момент отрицателен.

$$J_0 \ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi \rightarrow k^2 = PaJ_0 \rightarrow \ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний маятника, считая угол малым и приближенно $\sin \varphi \approx \varphi$, тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$$

Это уравнение совпадает по виду с дифф. уравнением свободных прямолинейных колебаний, следовательно его общим решением будет:

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$

Закон колебания при данных условиях:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt$$

СЛЕДСТВИЕ. ПРИВЕДЕННАЯ ДЛИНА

Малые колебания физического маятника являются гармоническими, период колебаний маятника (при замене k) определяется формулой:

$$T_{\phi} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{Pa}}$$

Т.е. при малых колебаниях период не зависит от начального угла.

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad l_1 = \frac{J_0 g}{Pa} = \frac{J_0}{Ma}$$

При длине l_1 период колебаний математического маятника совпадает с периодом колебаний соответствующего физического маятника.

Приведенная длина физического маятника – это длина такого *математического* маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного *физического* маятника.

ЦЕНТР КАЧАНИЙ

Точка К отстоящая от оси подвеса на расстоянии $OK=l_1$, называется центром качаний физического маятника.

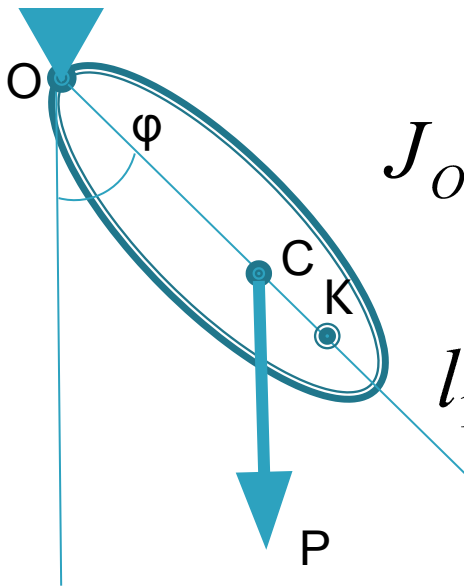
По теореме Гюйгенса:

$$J_O = J_C + Ma^2$$

$$J_O = Ma^2 \rightarrow l_1 = a = \frac{J_O}{Ma} \quad (\text{для математического маятника})$$

$$l_1 = \frac{J_O}{Ma} = \frac{J_C + Ma^2}{Ma} \rightarrow l_1 = a + \frac{J_C}{Ma}$$

Отсюда следует, что ОК всегда больше, чем $OC=a$, т.е. центр качаний расположен всегда ниже центра масс.



ВЫВОД

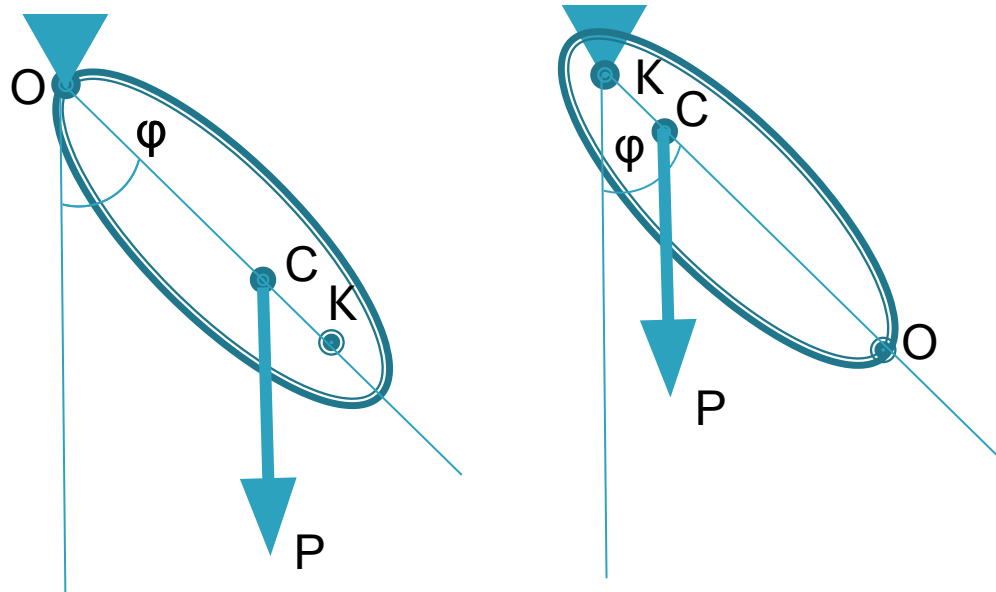
$$l_1 = a + \frac{J_C}{Ma} \rightarrow KC = \frac{J_C}{Ma}$$

Если поместить ось подвеса в точке К, то приведенная длина l_2 будет:

$$l_2 = KC + \frac{J_C}{(M \cdot KC)} =$$

$$= \frac{J_C}{Ma} + a = l_1$$

или $KC \cdot a = \frac{J_C}{M}$



Следовательно точки К и О являются взаимными, т.е. если ось подвеса будет проходить через К, центром качаний будет О и период колебаний не изменится.

Принцип Д'Аламбера

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
ДИНАМИКА

Жан Лерон Д'Аламбёр (16.11 1717 — 29.10 1783)

французский учёный-
энциклопедист.
философ, математик и
механик.

Член
Парижской академии наук
(1740)
Французской академии наук
(1754)
Петербургской академии
(1764)
и других академий наук.

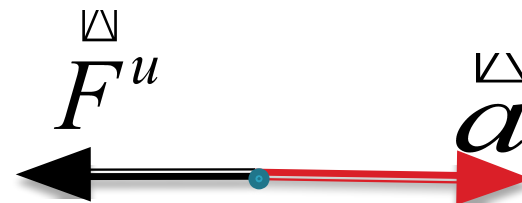


Принцип Даламбера для материальной точки:

Введем вектор силы инерции точки и назовем введенный вектор Даламберовой или просто силой инерции. Эта сила - фиктивная.

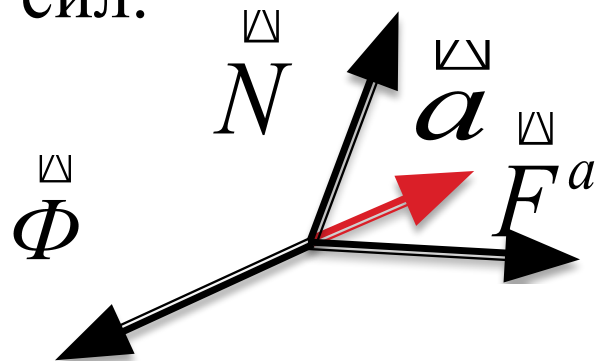
$$\vec{F}^u = -m\vec{a}$$

$$\vec{F}^u = \vec{\Phi}$$



В каждый момент движения материальной точки активные силы, реакции связей и сила инерции образуют уравновешенную систему сил.

$$\vec{F}^a + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0$$



Запишем второй закон Ньютона:

$$\overset{\square}{F}^a + \overset{\square}{N} = m\overset{\square}{a}$$

Теперь если ввести, помимо всех внутренних и внешних сил фиктивную силу инерции, то ...

Сила инерции данной точки уравнивает все приложенные к ней внутренние и внешние силы.

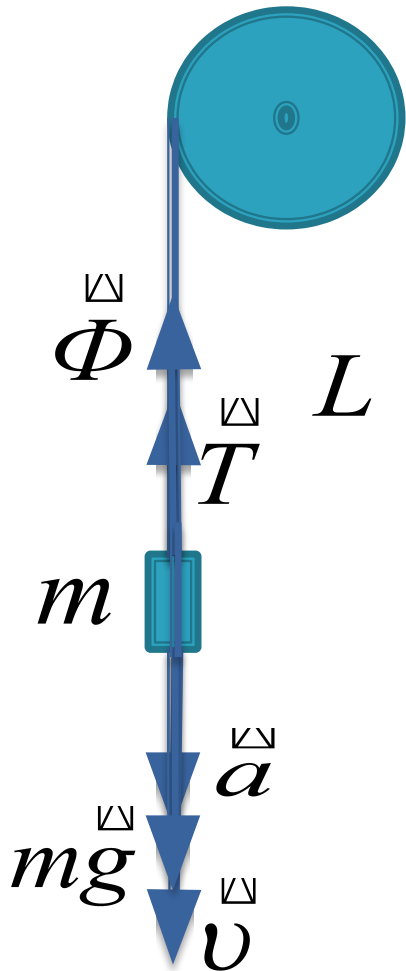
$$\overset{\square}{F}^a + \overset{\square}{N} - m\overset{\square}{a} = 0$$

иначе:

$$\overset{\square}{F}^a + \overset{\square}{N} + \overset{\square}{\Phi} = 0$$

Пример:

Груз массой m опускается равноускоренно с помощью невесомого троса, перекинутого через блок, и за время t проходит расстояние L . Определить силу натяжения троса.



$$v_0 = 0 \quad L = \frac{at^2}{2} \quad a = \frac{2L}{t^2}$$

$$T + \Phi - mg = 0$$

$$T = mg - \Phi$$

$$T = m(g + a) = m \left(g + \frac{2L}{t^2} \right)$$

Принцип Даламбера для механической системы:

Для движущейся механической системы в любой момент времени геометрическая сумма главных векторов внешних активных сил, сил реакций связей и сил инерции равна нулю; геометрическая сумма главных моментов внешних активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^N \vec{N}_k^e + \sum_{k=1}^N \vec{\Phi}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^N M_0(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^N M_0(\vec{N}_k^e) + \sum_{k=1}^N M_0(\vec{\Phi}_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n \overset{\boxtimes}{F}_k^a \quad - \text{ главный вектор активных сил}$$

$$\sum_{k=1}^n \overset{\boxtimes}{N}_k \quad - \text{ главный вектор реакций связей}$$

$$\sum_{k=1}^n \overset{\boxtimes}{\Phi}_k \quad - \text{ главный вектор сил инерции}$$

$$\sum_{k=1}^n \overset{\boxtimes}{M}_0(\overset{\boxtimes}{F}_k^a) \quad - \text{ главный момент активных сил}$$

$$\sum_{k=1}^n \overset{\boxtimes}{M}_0(\overset{\boxtimes}{N}_k) \quad - \text{ главный момент реакций связей.}$$

$$\sum_{k=1}^n \overset{\boxtimes}{M}_0(\overset{\boxtimes}{\Phi}_k) \quad - \text{ главный момент сил инерции}$$

$$\overset{\square}{F}_1^a + \overset{\square}{N}_1 - m_1 \overset{\square}{a}_1 = 0$$

$$\overset{\square}{F}_2^a + \overset{\square}{N}_2 - m_2 \overset{\square}{a}_2 = 0$$

$$\overset{\square}{F}_n^a + \overset{\square}{N}_n - m_n \overset{\square}{a}_n = 0$$

Сложим все уравнения полученной системы:

$$\sum_{k=1}^n \overset{\square}{F}_k^a + \sum_{k=1}^n \overset{\square}{N}_k - \sum_{k=1}^n m_k \overset{\square}{a}_k = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^n \overset{\square}{F}_k^a + \sum_{k=1}^n \overset{\square}{N}_k + \sum_{k=1}^n \overset{\square}{\Phi}_k = 0$$

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ ИНЕРЦИИ

$$\sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = \vec{\Phi} \qquad \sum_{k=1}^n M_0(\vec{\Phi}_k) = M_0^{\Phi}$$

Как определить эти величины?

$$m\vec{a}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^a + \sum_{k=1}^n \vec{N}_k$$



$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^a + \sum_{k=1}^n \vec{N}_k + \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = 0$$

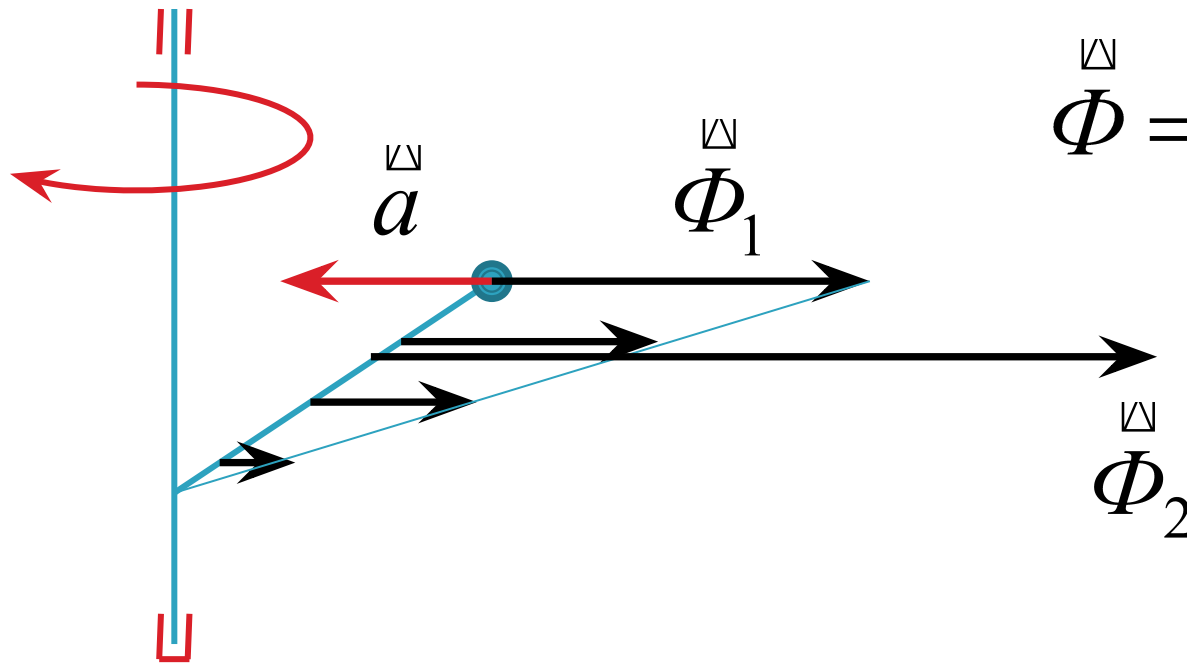
$$M_0^{\Phi} = -dK_0 / dt$$

Теорема об изменении момента импульса



$$M_z^{\Phi} = -J_z \varepsilon$$

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА



$$\overset{\vee}{\Phi} = -m\overset{\vee}{a}_c$$

$$\overset{\vee}{\Phi}_1 = -ma$$

$$\overset{\vee}{\Phi}_2 = -ma_{c2}$$