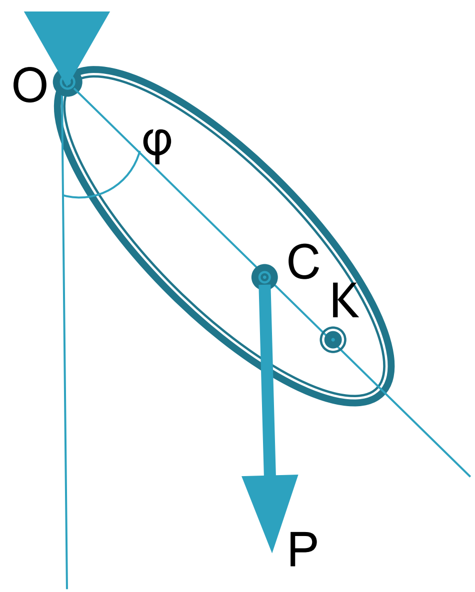
ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Физический маятник – твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.



Положение маятника будем определять углом φ отклонения линии ОС от вертикали.

Р — вес маятника

а — расстояние ОС от центра масс до оси подвеса, J_O — момент инерции маятника относительно оси подвеса.

ЗАКОН КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Для определения закона колебаний маятника воспользуемся дифференциальным уравнением вращательного движения.
В данном случае Mo= -P a sin φ, т.к. при φ <0 момент положителен, а при φ >0 момент отрицателен.

$$J_O\ddot{\varphi} = -Pa\sin\varphi \longrightarrow k^2 = PaJ_O \longrightarrow \ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний маятника, считая угол малым и приближенно $\sin\varphi \approx \varphi$, тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

Это уравнение совпадает по виду с дифф. Уравнением свободных прямолинейных колебаний, следовательно его общим решением будет:

$$\varphi = C_1\sin kt + C_2\cos kt$$

Закон колебания при данных условиях:

$$\varphi = \varphi_0\cos kt$$

СЛЕДСТВИЕ. ПРИВЕДЕННАЯ ДЛИНА

Малые колебания физического маятника являются гармоническими, период колебаний маятника (при замене k) определяется формулой:

$$T_{ф} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{Pa}}$$

Т.е. при малых колебаниях период не зависит от начального угла.

$$T_{м} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

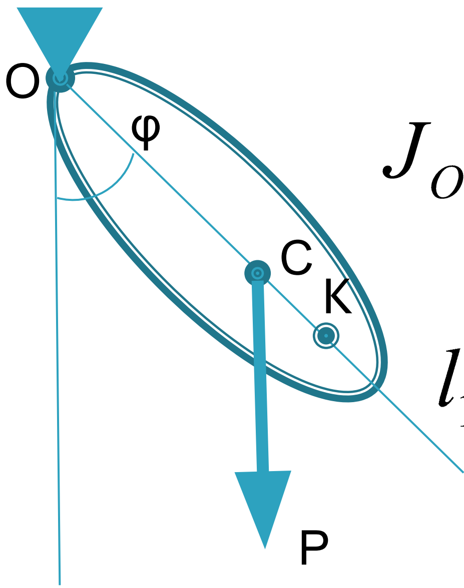
$$l_1 = \frac{J_O g}{Pa} = \frac{J_O}{Ma}$$

При длине l_1 период колебаний математического маятника совпадает с периодом колебаний соответствующего физического маятника.

Приведенная длина физического маятника – это длина такого *математического* маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного *физического* маятника.

ЦЕНТР КАЧАНИЙ

Точка K отстоящая от оси подвеса на расстоянии $OK=l_1$, называется центром качаний физического маятника.



По теореме Гюйгенса:

$$J_O = J_C + Ma^2$$

$$J_O = Ma^2 \longrightarrow l_1 = a = \frac{J_O}{Ma}$$

(для математического маятника)

$$l_1 = \frac{J_O}{Ma} = \frac{J_C + Ma^2}{Ma} \longrightarrow l_1 = a + \frac{J_C}{Ma}$$

Отсюда следует, что OK всегда больше, чем OC=a, т.е. центр качаний расположен всегда ниже центра масс.

ВЫВОД

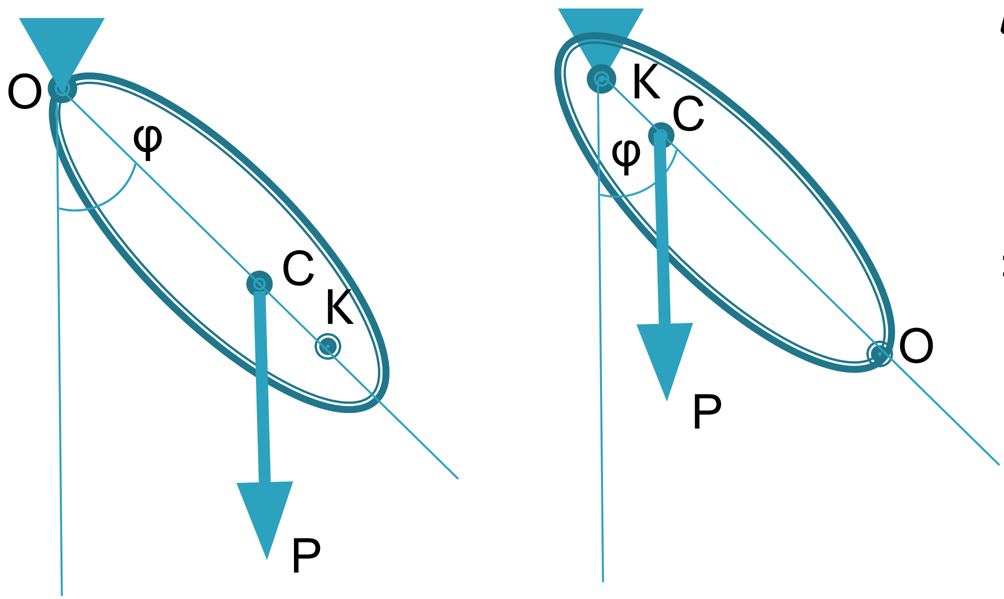
$$l_1 = a + \frac{J_C}{Ma} \longrightarrow KC = \frac{J_C}{Ma}$$

Если поместить ось подвеса в точке К, то приведенная длина l_2 будет:

$$l_2 = KC + \frac{J_C}{(M \cdot KC)} =$$

$$= \frac{J_C}{Ma} + a = l_1$$

или $$KC \cdot a = \frac{J_C}{M}$$



Следовательно точки К и О являются взаимными, т.е. если ось подвеса будет проходить через К, центром качаний будет О и период колебаний не изменится.

Принцип Д'Аламбера

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

Жан Леро́н Д’Аламбе́р
(16.11 1717 — 29.10 1783)
французский учёный-энциклопедист.
философ, математик и механик.

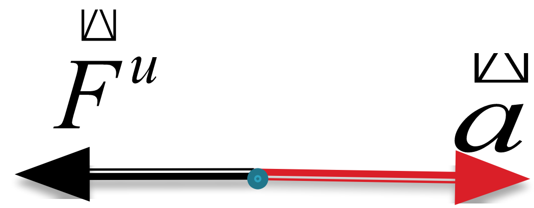
Член
Парижской академии наук (1740)
Французской академии наук (1754)
Петербургской академии (1764)
и других академий наук.

Принцип Даламбера для материальной точки:

Введем вектор силы инерции точки и назовем введенный вектор Даламберовой или просто силой инерции. Эта сила - фиктивная.

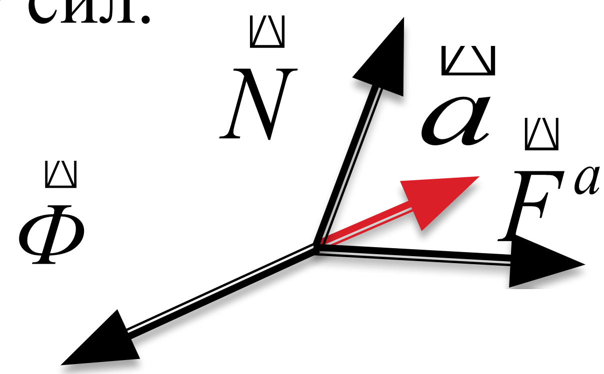
$$\vec{F}^{u} = -m\vec{a}$$

$$\vec{F}^{u} = \vec{\Phi}$$



В каждый момент движения материальной точки активные силы, реакции связей и сила инерции образуют уравновешенную систему сил.

$$\vec{F}^{a} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0$$



Запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F}^{a} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Теперь если ввести, помимо всех внутренних и внешних сил фиктивную силу инерции, то ...
Сила инерции данной точки уравновешивает все приложенные к ней внутренние и внешние силы.

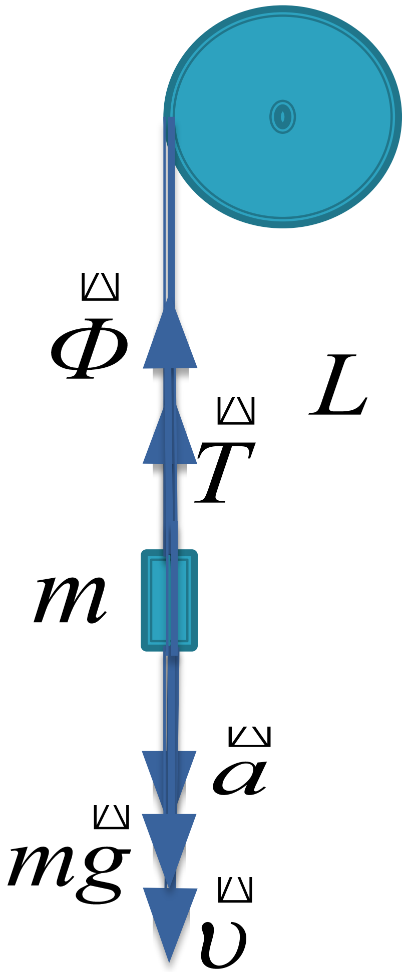
$$\vec{F}^{a} + \vec{N} - m\vec{a} = 0$$

иначе:

$$\vec{F}^{a} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0$$

Пример:

Груз массой m опускается равноускоренно с помощью невесомого троса, перекинутого через блок, и за время *t* проходит расстояние *L*. Определить силу натяжения троса.



$$\upsilon_0 = 0 \qquad L = \frac{at^2}{2} \qquad a = \frac{2L}{t^2}$$

$$T + \Phi - mg = 0$$

$$T = mg - \Phi$$

$$T = m(g + a) = m\left(g + \frac{2L}{t^2}\right)$$

Принцип Даламбера для механической системы:

Для движущейся механической системы в любой момент времени геометрическая сумма главных векторов внешних активных сил, сил реакций связей и сил инерции равна нолю; геометрическая сумма главных моментов внешних активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \vec{\Phi}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{N}_k^e) + \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{\Phi}_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{a}$$ - главный вектор активных сил

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k$$ - главный вектор реакций связей

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k$$ - главный вектор сил инерции

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{a})$$ - главный момент активных сил

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{N}_k)$$ - главный момент реакций связей.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{\Phi}_k)$$ - главный момент сил инерции

$$\vec{F}_1^a + \vec{N}_1 - m_1\vec{a}_1 = 0$$

$$\vec{F}_2^a + \vec{N}_2 - m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{F}_n^a + \vec{N}_n - m_n\vec{a}_n = 0$$

Сложим все уравнения полученной системы:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^a + \sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{a}_k = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^a + \sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k = 0$$

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ ИНЕРЦИИ

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k = \vec{\Phi} \qquad \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{\Phi}_k) = \vec{M}_0^{\Phi}$$

Как определить эти величины?

$$m\vec{a}_c = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^a + \sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^a + \sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k = 0$$

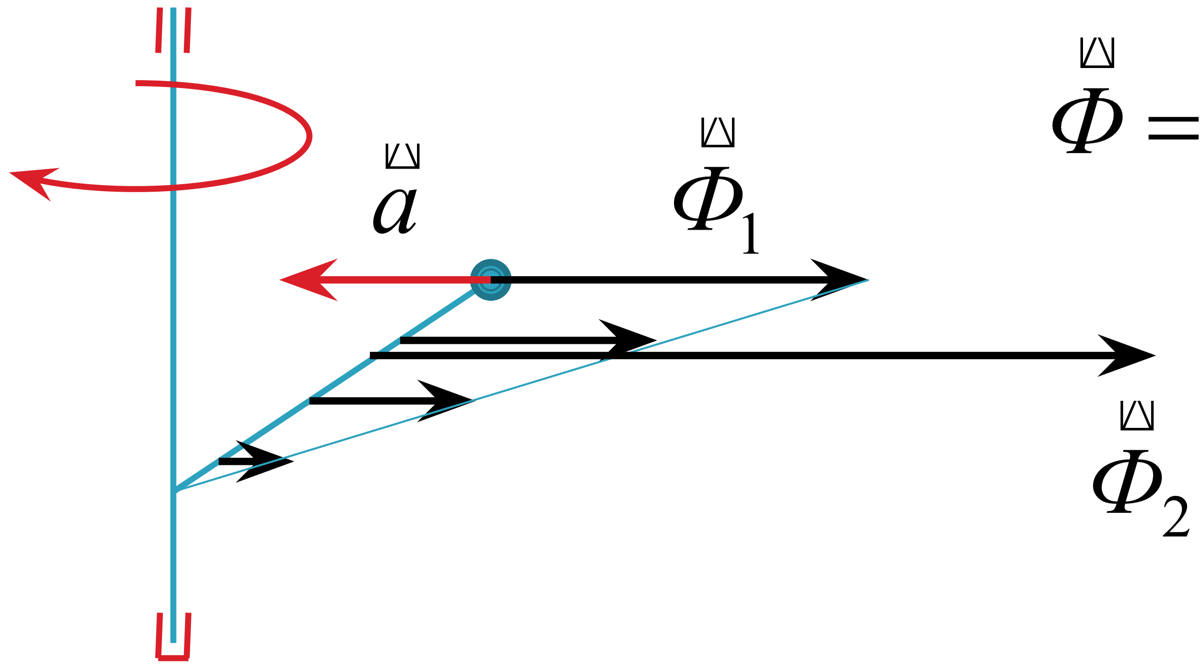
$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c$$

Теорема об изменении момента импульса

$$\vec{M}_0^{\Phi} = -d\vec{K}_0 / dt$$

$$M_z^{\Phi} = -J_z \varepsilon$$

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА



$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c$$

$$\Phi_1 = -ma \qquad \Phi_2 = -ma_{C2}$$