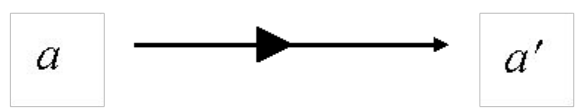
Переключательные схемы и логические элементы

Простейшие булевы многочлены моделируют ПС, которые называются *логическими элементами* (или *вентилями*) и обозначаются специальными диаграммами.

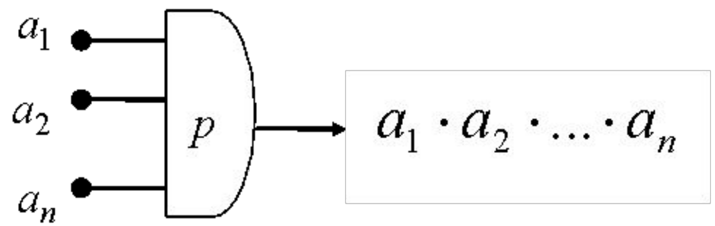
<u>Примеры</u>.

Булев многочлен $p(x)=x'$ моделирует устройство с одним входом и одним выходом, которое изображается диаграммой



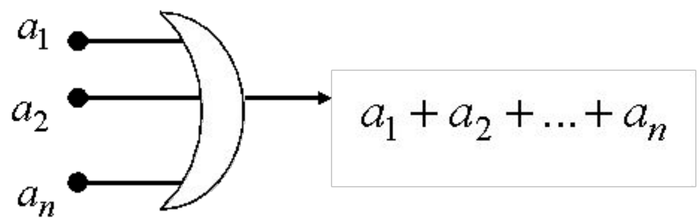
и называется *NOT-элементом*.

Булев многочлен $p(x_1,...,x_n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n$ моделирует устройство с *n* входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *AND-элементом.*

Булев многочлен $p(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ моделирует устройство с n входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *OR-элементом.*

Примеры.

1. Построим ПС, которая моделирует сложение двух двоичных цифр и называется *полусумматором*. Такая ПС имеет два входа a_1, a_2 и два выхода $\bar{s}(a_1,a_2), \bar{c}(a_1,a_2)$, которые описывают два разряда суммы $a_1 + a_2$. Таблица этих булевых функций имеет следующий вид:

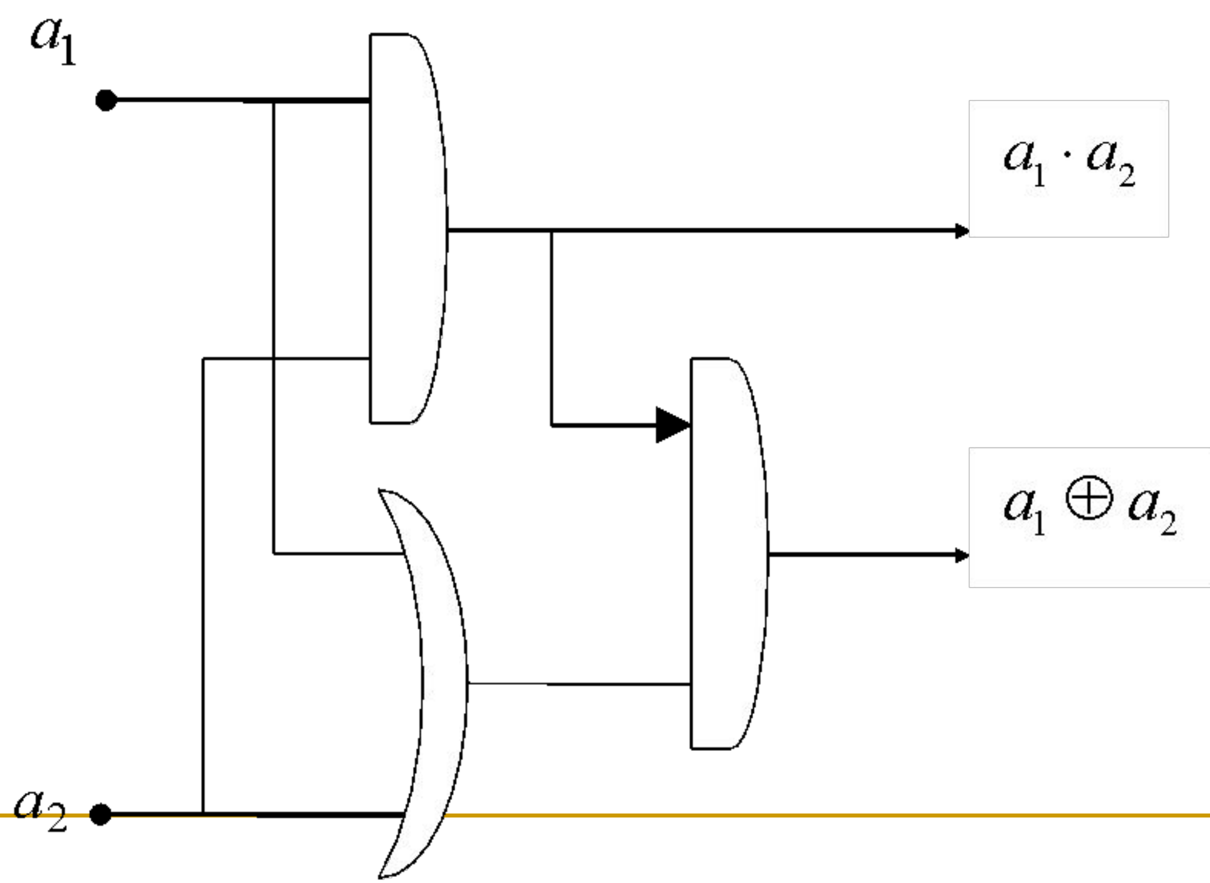
a_1	a_2	$\bar{s}(a_1,a_2)$	$\bar{c}(a_1,a_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Получаем булевы функции:

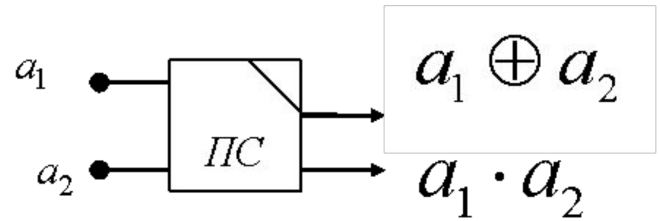
$$c(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, \;\; s(x_1, x_2) = x_1' x_2 + x_1 x_2'.$$

$$s(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = \left(x_1 \leftrightarrow x_2\right)' = (x_1 \cdot x_2 + x_1' \cdot x_2')' = c' \cdot (x_1 + x_2),$$

Полусумматор представляется диаграммой:



Символически полусумматор изображается диаграммой:



Сложностью ПС называется число логических элементов в этой схеме.

Полусумматор реализуется ПС сложности 4.

Примеры.

2. Построим ПС, которая моделирует сложение трех двоичных цифр и называется *сумматором*. Такая ПС имеет три входа a_1, a_2, a_3 и два выхода $\bar{s}(a_1, a_2, a_3)$, $\bar{c}(a_1, a_2, a_3)$, которые описывают два разряда суммы $a_1 + a_2 + a_3$.

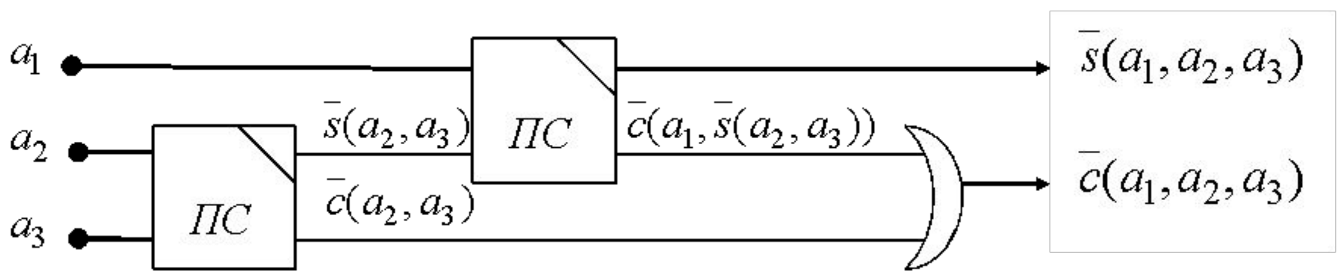
Легко проверить, что

$$s(x, y, z) = (x \oplus y) \oplus z,$$

$$c(x, y, z) = xyz' + xy'z + x'yz + xyz$$
$$= xy + (xy' + x'y)z = xy + (x \oplus y)z.$$

Реализуется сумматор ПС сложности 9.

С помощью полусумматоров такую ПС можно представить следующей диаграммой:



Теорема 1. Суммирование двух n-разрядных двоичных чисел реализуется ПС сложности $9n-5$, которая обозначается S_n и называется *сумматором* порядка n.

Теорема 2. Умножение двух n-разрядных двоичных чисел реализуется ПС сложности $O(n^{\log_2 3})$, которая обозначается M_n и называется *умножителем* порядка n.

Минимизация булевых многочленов

Рассмотрим вопрос минимизации ДНФ p . Конъюнкт q называется *импликантом* формы p, если $pq = q$, т.е. q=1 влечет p=1. Импликанты, минимальные по числу вхождений в них булевых переменных, называются *простыми импликантами.* Дизъюнкция всех простых импликант формы p называется *сокращенной ДНФ.*

Лемма 1. Любая ДНФ p эквивалентна некоторой сокращенной ДНФ.

Для СДНФ p сокращенную ДНФ можно получить *методом Квайна* с помощью последовательного применения следующих двух видов операций:

1) *операция склеивания*, которая для конъюнктов q и булевых переменных x определяется по формуле:

$$qx + qx' = qx + qx' + q\ ;$$

2) *операция поглощения*, которая для конъюнктов q, булевых переменных x и значений $\alpha \in \{0,1\}$ определяется по формуле:

$$qx^{\alpha} + q = q\ .$$

Пример. Найдем сокращенную ДНФ для булева многочлена

$$p = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz.$$

В результате применения операции склеивания к различным парам конъюнктов многочлена p получим ДНФ

$$x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz + x'y + yz' + yz + xz + xy + y.$$

В результате применения операции поглощения к различным парам конъюнктов последней ДНФ получим булев многочлен $xz + y$, который является сокращенной ДНФ булева многочлена p.

В общем случае сокращенная ДНФ формы p не является минимальной формой, так как она может содержать *лишние* импликанты, удаление которых не изменяет булеву функцию $\overline{p}$. В результате удаления таких лишних импликант получаются *тупиковые ДНФ*.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений в них булевых переменных называются *минимальными ДНФ*.

Лемма 2. Любая ДНФ p эквивалентна некоторой минимальной ДНФ.

Минимальная ДНФ формы p получается с помощью *матрицы Квайна*:

– столбцы матрицы помечаются конъюнктами $p_1, \ldots, p_m$ формы p;

– строки матрицы помечаются импликантами $q_1, \ldots, q_k$ сокращенной ДНФ формы p;

– на пересечении строки q_i и столбца p_j ставится символ *, если импликант q_i является частью конъюнкта p_j.

Тупиковые ДНФ - дизъюнкции тех минимальных наборов импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений булевых переменных являются искомыми минимальными ДНФ формы p.

Пример. Найдем минимальную ДНФ для многочлена $p = x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz$.

В результате применения операции склеивания получим ДНФ $x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz + x'y' + y'z + xz$.

С помощью операции поглощения получим $x'y' + y'z + xz$ - сокращенная ДНФ булева многочлена p. Матрица Квайна:

	$x'y'z'$	$x'y'z$	$xy'z$	xyz
$x'y'$	*	*		
$y'z$		*	*	
xz			*	*

Минимальный набор импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна, состоит из конъюнктов $x'y'$ и xz . Значит, $x'y' + xz$ - минимальная ДНФ формы p .

Следствие 3. Любая булева функция, не равная тождественно нулю, представима минимальной ДНФ и любая булева функция, не равная тождественно единице, представима минимальной КНФ.