

---

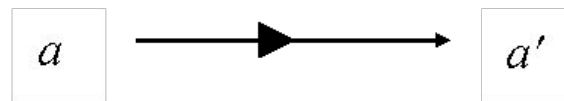
# Переключательные схемы и логические элементы

---

Простейшие булевы многочлены моделируют ПС, которые называются *логическими элементами* (или *вентилями*) и обозначаются специальными диаграммами.

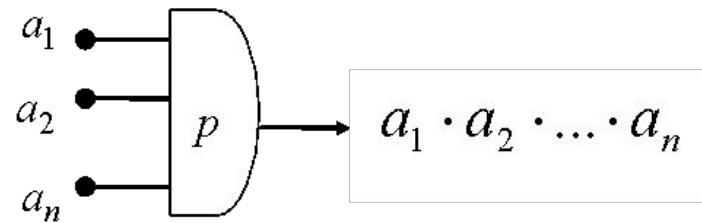
### Примеры.

Булев многочлен  $p(x) = x'$  моделирует устройство с одним входом и одним выходом, которое изображается диаграммой



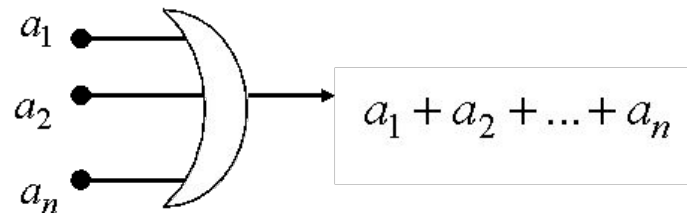
и называется *NOT-элементом*.

Булев многочлен  $p(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  моделирует устройство с  $n$  входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *AND-элементом*.

Булев многочлен  $p(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$  моделирует устройство с  $n$  входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *OR-элементом*.

## Примеры.

1. Построим ПС, которая моделирует сложение двух двоичных цифр и называется *полусумматором*. Такая ПС имеет два входа  $a_1, a_2$  и два выхода  $\bar{s}(a_1, a_2), \bar{c}(a_1, a_2)$ , которые описывают два разряда суммы  $a_1 + a_2$ . Таблица этих булевых функций имеет следующий вид:

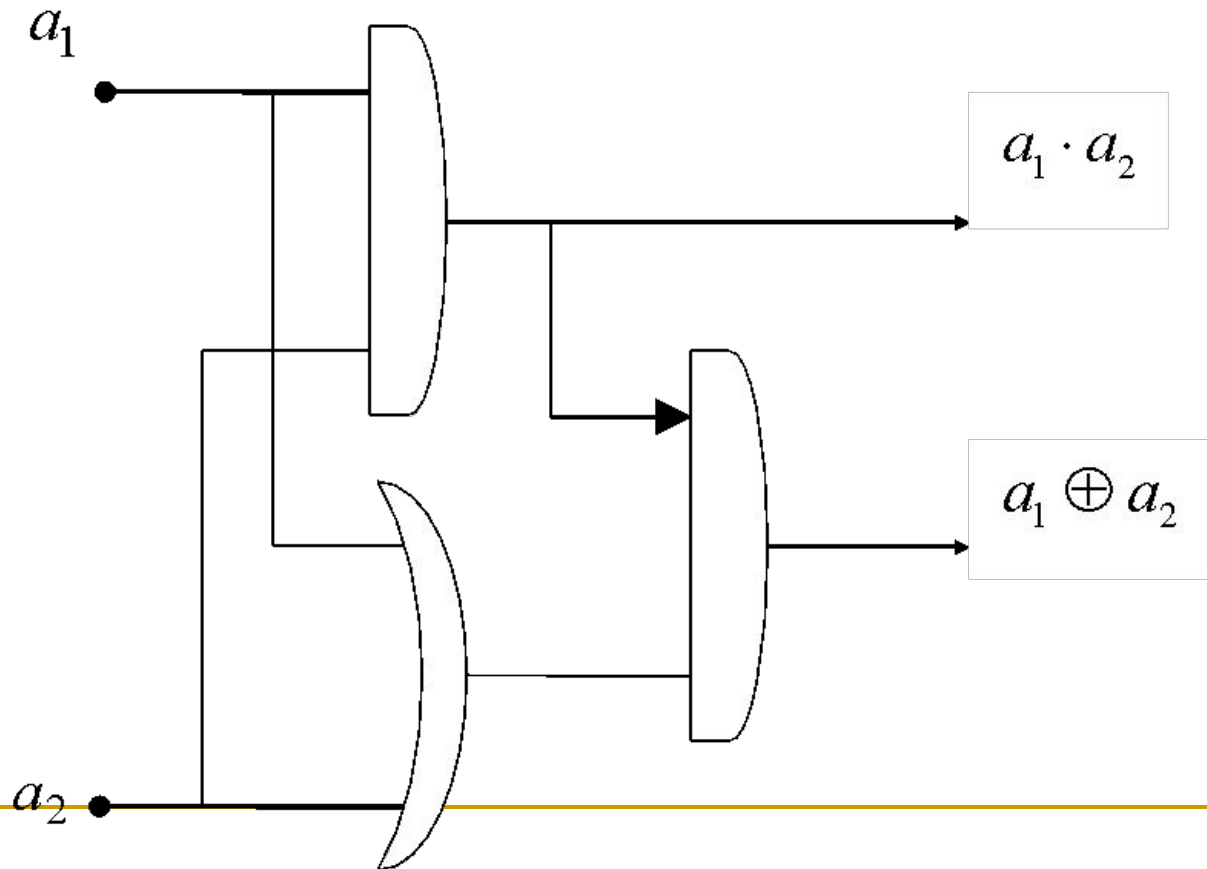
$a_1$	$a_2$	$\bar{s}(a_1, a_2)$	$\bar{c}(a_1, a_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Получаем булевы функции:

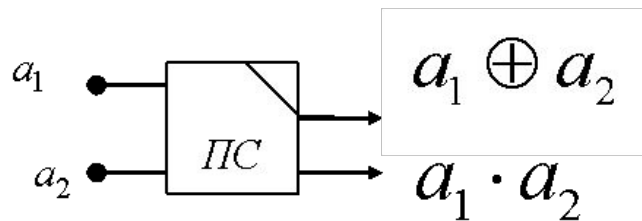
$$c(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, \quad s(x_1, x_2) = x_1'x_2 + x_1x_2'.$$

$$s(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = (x_1 \leftrightarrow x_2)' = (x_1 \cdot x_2 + x_1' \cdot x_2')' = c' \cdot (x_1 + x_2),$$

Полусумматор представляется диаграммой:



Символически полусумматор изображается диаграммой:



*Сложностью* ПС называется число логических элементов в этой схеме.

Полусумматор реализуется ПС сложности 4.

## Примеры.

2. Построим ПС, которая моделирует сложение трех двоичных цифр и называется *сумматором*. Такая ПС имеет три входа  $a_1, a_2, a_3$  и два выхода  $\bar{s}(a_1, a_2, a_3), \bar{c}(a_1, a_2, a_3)$ , которые описывают два разряда суммы  $a_1 + a_2 + a_3$ .

Легко проверить, что

$$s(x, y, z) = (x \oplus y) \oplus z,$$

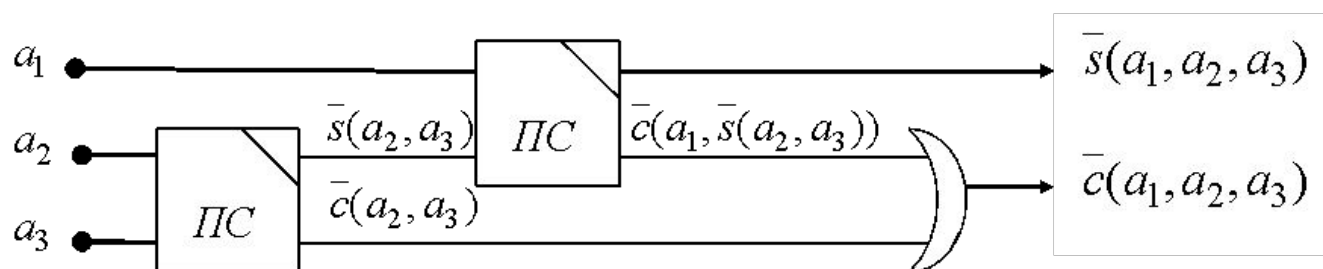
$$c(x, y, z) = xyz' + xy'z + x'yz + xyz$$

$$= xy + (xy' + x'y)z = xy + (x \oplus y)z.$$

Реализуется сумматор ПС сложности 9.



С помощью полусумматоров такую ПС можно представить следующей диаграммой:



---

**Теорема 1.** Суммирование двух  $n$ -разрядных двоичных чисел реализуется ПС сложности  $9n - 5$ , которая обозначается  $S_n$  и называется *сумматором* порядка  $n$ .

**Теорема 2.** Умножение двух  $n$ -разрядных двоичных чисел реализуется ПС сложности  $O(n^{\log_2 3})$ , которая обозначается  $M_n$  и называется *умножителем* порядка  $n$ .

---

---

# Минимизация булевых многочленов

---

---

Рассмотрим вопрос минимизации ДНФ  $p$ . Конъюнкт  $q$  называется *импликантом* формы  $p$ , если  $pq = q$ , т.е.  $q=1$  влечет  $p=1$ . Импликанты, минимальные по числу вхождений в них булевых переменных, называются *простыми импликантами*. Дизъюнкция всех простых импликант формы  $p$  называется *сокращенной ДНФ*.

Лемма 1. Любая ДНФ  $p$  эквивалентна некоторой сокращенной ДНФ.

---

---

Для СДНФ  $p$  сокращенную ДНФ можно получить методом Квайна с помощью последовательного применения следующих двух видов операций:

1) операция склеивания, которая для конъюнктов  $q$  и булевых переменных  $x$  определяется по формуле:

$$qx + qx' = qx + qx' + q;$$

2) операция поглощения, которая для конъюнктов  $q$ , булевых переменных  $x$  и значений  $\alpha \in \{0,1\}$  определяется по формуле:

$$qx^\alpha + q = q.$$

---

Пример. Найдем сокращенную ДНФ для булева многочлена

$$p = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz .$$

В результате применения операции склеивания к различным парам конъюнктов многочлена  $p$  получим ДНФ

$$x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz + x'y + yz' + yz + xz + xy + y .$$

В результате применения операции поглощения к различным парам конъюнктов последней ДНФ получим булев многочлен  $xz + y$ , который является сокращенной ДНФ булева многочлена  $p$ .

В общем случае сокращенная ДНФ формы  $p$  не является минимальной формой, так как она может содержать *лишние* импликанты, удаление которых не изменяет булеву функцию  $\bar{p}$ . В результате удаления таких лишних импликант получаются *тупиковые ДНФ*.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений в них булевых переменных называются *минимальными ДНФ*.

Лемма 2. Любая ДНФ  $p$  эквивалентна некоторой минимальной ДНФ.

Минимальная ДНФ формы  $p$  получается с помощью матрицы Квайна:

- столбцы матрицы помечаются конъюнктами  $p_1, \dots, p_m$  формы  $p$ ;
- строки матрицы помечаются импликантами  $q_1, \dots, q_k$  сокращенной ДНФ формы  $p$ ;
- на пересечении строки  $q_i$  и столбца  $p_j$  ставится символ  $*$ , если импликант  $q_i$  является частью конъюнкта  $p_j$ .

Тупиковые ДНФ - дизъюнкции тех минимальных наборов импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений булевых переменных являются искомыми минимальными ДНФ формы  $p$ .



Пример. Найдем минимальную ДНФ для многочлена  $p = x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz$ .

В результате применения операции склеивания получим ДНФ  $x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz + x'y' + y'z + xz$ .

С помощью операции поглощения получим  $x'y' + y'z + xz$  - сокращенная ДНФ булева многочлена  $p$ . Матрица Квайна:

	$x'y'z'$	$x'y'z$	$xy'z$	$xyz$
$x'y'$	*	*		
$y'z$		*	*	
$xz$			*	*

Минимальный набор импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна, состоит из конъюнктов  $x'y'$  и  $xz$ . Значит,  $x'y' + xz$  - минимальная ДНФ формы  $p$ .

---

Следствие 3. Любая булева функция, не равная тождественно нулю, представима минимальной ДНФ и любая булева функция, не равная тождественно единице, представима минимальной КНФ.

---