Теория коллективного выбора

Филатов А.Ю.

Институт систем энергетики им.Л.А.Мелентьева,
Иркутский государственный университет

http://math.isu.ru/filatov,
http://polnolunie.baikal.ru/me,
http://fial_.livejournal.com,
alexander.filatov@gmail.com

Постановка проблемы кооперативного принятия решений

Многие общественно значимые решения не могут приниматься на основе рыночных механизмов, поскольку кооперативные возможности не будут эффективно использованы при децентрализованных действиях агентов.

Примеры:

- Финансирование общественных благ
- Трагедия общины (истощение ресурсов из-за чрезмерного использования)
- Дилемма заключенного (доминирующие стратегии ведут к худшему исходу)
- Асимметричность информации (отрицательный отбор; моральный риск)

Индивидуальные предпочтения → коллективный выбор (принимают все!)

Предположение: пренебрегаем мнением меньшинства; из двух альтернатив побеждает та, за которую проголосовало более 50% человек!

Правило большинства – единственный метод, удовлетворяющий требованиям

1. Анонимность (равноправие избирателей).
2. Нейтральность (равноправие кандидатов).
3. Монотонность (усиление поддержки не подвергает сомнению избрание).

Практика: альтернатив более двух!

Системы голосования

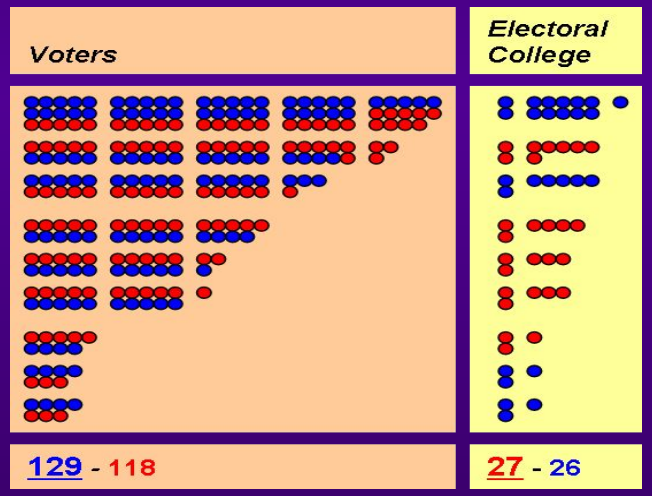
Системы голосования:

- Мажоритарная (Россия, президентские выборы – два тура)
- Пропорциональная (Россия, парламентские выборы, с 2003 года)
- Смешанная (Россия, парламентские выборы, до 2003 года)
- Голосование выборщиков (США, президентские выборы)

Парадоксы «голосования выборщиков»:

- Победитель может набрать меньше голосов избирателей, чем соперник (2000, Буш<Гора)
- Роль «колеблющихся штатов» и неравенство избирателей (Флорида, Нью-Мексико vs Юта)

  Выборы-2008 (http://edition.cnn.com/election/2008/): Обама (66,9 млн.) vs МакКейн (58,3 млн.) победа МакКейна – смена позиции 0,4 млн. или 26,1 млн.(12% голосов) «нужных людей»
- Парадокс Алабамы; парадокс новых штатов; парадокс более быстрого роста населения…



A	6	4,286	4	4,714	5
B	6	4,286	4	4,714	5
C	2	1,429	2	1,571	1

Правило Кондорсе vs Борда

Правило относительного большинства:

3	5	7	6	
A	*A*	*B*	*C*	*A* – победитель в голосовании (8 голосов)
B	*C*	*D*	*B*	*A* – наихудший кандидат (13 голосов из 21)
C	*B*	*C*	*D*	*C* >*A* (13 из 21), *C* > *B* (11 из 21), *C* > *D* (14 из 21) ⇒ победитель *C*
D	*D*	*A*	*A*	*B* > *C*: 1 место (7:6), 1–2 м (16:11), 1–3 м (21:21) ⇒ победитель *B*

Правило Кондорсе:

Победитель по Кондорсе – кандидат, побеждающий любого из соперников при парном сравнении.

Правило Борда (учет рангов кандидатов):

Кандидаты от худшего к лучшему получают ранги 0 → 1 → 2 → 3 → …

Победитель по Борда – кандидат с максимальной суммой очков.

Обобщение правила Борда: произвольные шкалы

Правило относительного большинства – 0 0 … 0 1.

Правило антибольшинства – 0 1 … 1 1.

Парадокс Кондорсе

Победитель по Кондорсе может отсутствовать: *К* > *П* > *Ч* > *К*

К	*Ч*	*П*
П	*К*	*Ч*
Ч	*П*	*К*

Вероятности отсутствия победителя по Кондорсе:

p – число кандидатов, *n* – число избирателей

p* / *n	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**предел**
3	0,056	0,069	0,075	0,078	0,080	**0,088**
4	0,111	0,139	0,150	0,156	0,160	**0,176**
5	0,160	0,200	0,215	0,230	0,251	**0,251**
6	0,202	0,255	0,258	0,284	0,294	**0,315**
7	0,239	0,299	0,305	0,342	0,343	**0,369**
предел	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Вариация Копленда (из Кондорсе): максимизация разницы побед и поражений (выиграть у максимального числа кандидатов).

Вариация Симпсона (из Кондорсе): максимизация наименьшего числа избирателей, голосующих за данного кандидата при парном сравнении с другими (никому сильно не проиграть).

Борда ≠ Кондорсе

Существуют профили предпочтений избирателей, при которых победитель по Кондорсе не может быть избран ни при каком методе подсчета очков!

Пример для строго монотонного правила подсчета очков $s_2 > s_1 > s_0$:

	3	2	1	1
s_2	A	B	B	C
s_1	B	C	A	A
s_0	C	A	C	B

$A > B$ (4 из 7), $A > C$ (4 из 7) $\Rightarrow$ A – победитель по Кондорсе

$3s_2 + 3s_1 + s_0 > 3s_2 + 2s_1 + 2s_0$

очки B = = очки A

Пример для произвольного правила подсчета очков $s_2 \geq s_1 \geq s_0,\ s_2 > s_0$:

	6	4	4	3
s_2	A	B	B	C
s_1	B	C	A	A
s_0	C	A	C	B

$A > B$ (9 из 17), $A > C$ (10 из 17) $\Rightarrow$ A – победитель по Кондорсе

$8s_2 + 6s_1 + 3s_0 > 6s_2 + 7s_1 + 4s_0$

очки B = = очки A

Профиль Страффина

1	4	1
	3	
A	*C*	*E*
	E	
B	*D*	*A*
	A	
C	*B*	*D*
	B	
D	*E*	*B*
4	*D*=1*4+4*0+1*3+3*3=16	4	*A*=19,6	4	*A*=19,6	4	*A*=16	9	*A*=41
3	*B*=1*3+4*2+1*1+3*2=18	3,9	*B*=18,9	3	*B*=18	3	*B*=24,3	8	*B*=23
2	*C*=1*2+4*4+1*0+3*0=18	2	*C*=18	2	*C*=21,6	2,9	*C*=18,9	2	*C*=38
1	*D*=1*1+4*3+1*2+3*1=18	1	*D*=21,6	1	*D*=18	1	*D*=18,9	1	*D*=38
0	*E*=1*0+4*1+1*4+3*4=20	0	*E*=20	0,9	*E*=20,9	0	*E*=20	0	*E*=40

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A		5	5	5	1
B	4		5	4	5
C	4	4		5	5
D	4	5	4		5
E	8	4	4	4	

Победитель по Кондорсе отсутствует,
у всех есть поражения в парных играх.

Вариация Копленда:
победитель *A* (+3–1)
B=*C*=*D* (+2–2), *E* (+1–3).

Вариация Симпсона:
победители *B*=*C*=*D*=*E* (4), *A* (1).

Правило Борда – классическое и случай произвольных шкал. Победителем может стать любой из кандидатов.

Аксиоматический подход

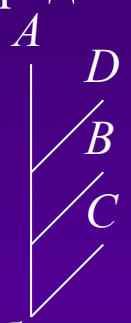
1. **Однозначность** – правило всегда дает сделать однозначный выбор. Не выполняется для анонимных и нейтральных правил, если n имеет делитель $\leq p$.
2. **Анонимность (равноправие избирателей)** – имена избирателей не имеют значения: если два избирателя поменяются голосами, то результат выборов не изменится. Не выполняется, если при равенстве победителем становится выбранный определенным избирателем.
3. **Нейтральность (равноправие альтернатив)** – имена кандидатов не имеют значения: если поменять местами кандидатов A н B в предпочтении каждого избирателя, то исход голосования изменится соответственно. Не выполняется, если при равенстве победителем становится определенный кандидат.
4. **Состоятельность по Кондорсе** – правило всегда выбирает победителя по Кондорсе, если он существует. Не выполняется для любых методов подсчета очков, в т.ч. для правила относительного большинства, правила Борда и т.д.
5. **Парето-эффективность (единогласие)** – если кандидат A для всех избирателей лучше B, то B не может быть избранным. Не выполняется для правила антибольшинства.

Последовательные сравнения по правилу большинства

1. Не выполняется нейтральность. Повестка определяет контроль над выборами.

A	*A*	*D*	*D*	*B*	*A*>*B*, *A*>*C*,
B	*B*	*B*	*C*	*C*	*B*>*C*, *B*>*D*,
C	*C*	*A*	*A*	*D*	*C*>*D*, *D*>*A*.

Побед. *A*



Побед. *B*

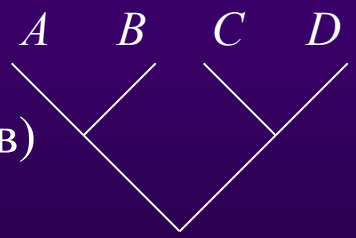
Побед. *C*

Побед. *D*

2. Не выполняется Парето-эффективность.

~~*B*~~	~~*D*~~	~~*C*~~	*B* *A*
A	*D*	*B*	*A*<*B*<*C*<*D*,
D	*C*	*A*	при этом *A*>*D*
C	*B*	*D*	для всех избирателей

D	*D*	*C*	*C*	
A	*A*	*D*	*D*	
C	*C*	*A*	*A*	*A*>*B*, *C*>*D*, *A*>*C* (при равенстве голосов)
B	*B*	*B*	*B*	при этом *D*>*A* для всех избирателей



Аксиоматический подход

6. **Монотонность** – увеличившаяся поддержка кандидата не может уменьшить шанса быть избранным. Не выполняется для относительного большинства с выбыванием (голосования в 2 тура).

профиль 1: профиль 2:

6	5	4	2	6	5	4	2
A	*C*	*B*	*B*	*A*	*C*	*B*	*A*
B	*A*	*C*	*A*	*B*	*A*	*C*	*B*
C	*B*	*A*	*C*	*C*	*B*	*A*	*C*

Профиль 1: выходят *A* и *B*, $A > B$ (11:6)

Профиль 2: *A* улучшает свое положение, выходят *A* и *C*, $C > A$ (9:8).

Не выполняется для правила альтернативных голосов (последовательного исключения неудачников) для любого способа подсчета очков.

	6	4	6	2	6	3
s_2	*A*	*B*	*B*	*C*	*C*	*A*
s_1	*B*	*A*	*C*	*B*	*A*	*C*
$s_0=0$		*C*	*C*	*A*	*A*	*B*
						B

Шаг 1: исключается *C*,

$$9s_1 + 8s_2 < \min\{10s_1 + 9s_2;\ 8s_1 + 10s_2\}.$$

Шаг 2: $A > B$ (15:12).

	9	1	6	8	3	
s_2	*A*	*B*	*B*	*C*	*A*	
s_1	*B*	*A*	*C*	*A*	*C*	
$s_0=0$		*C*	*C*	*A*	*B*	*B*

В выделенных столбцах *A* становится лучше *B*

Шаг 1: исключается *B*,

$$9s_1 + 7s_2 < \min\{9s_1 + 12s_2;\ 9s_1 + 8s_2\}.$$

Шаг 2: $C > A$ (14:13).

Аксиоматический подход

7. **Пополнение** – если 2 независимые группы избирателей выбирают кандидата *A*, то, объединившись, они выберут его же. Не выполняется для любого правила, состоятельного по Кондорсе.

Состоятельный по Кондорсе метод выбирает *A* в группе 1, при этом *B*>*A*

Гр.1:			**Гр. 2:**		
2	2	2	4	3	**Гр.1:** победитель ***A***. *A*<*B* (2:4), *A*>*C* (4:2), *B*<*C* (2:4).
C	*A*	*B*	*A*	*B*	**Гр.2:** победитель ***A***. *A*>*B* (4:3), *A*>*C* (7:0), *B*>*C* (7:0).
B	*C*	*A*	*B*	*A*	**Гр.1+2:** победитель ***B***. *A*<*B* (6:7), *A*>*C* (11:2), *B*>*C* (9:4).
A	*B*	*C*	*C*	*C*	

8. **Участие** – собственный бюллетень не может уменьшит полезность избирателя. Не выполняется для любого правила, состоятельного по Кондорсе, при 4 и более кандидатах.

3	3	5	4	4	
A	*A*	*D*	*B*	*C*	**Правило Симпсона до участия:** победитель *A*.
D	*D*	*B*	*C*	*A*	*S*(*A*)=6(*B*,*C*), *S*(*B*)=4(*D*), *S*(*C*)=3(*B*), *S*(*D*)=5(*A*).
C	*B*	*C*	*A*	*B*	**Правило Симпсона после участия:** победитель *B*.
B	*C*	*A*	*D*	*D*	*S*(*A*)=6(*C*), *S*(*B*)=8(*D*), *S*(*C*)=7(*D*), *S*(*D*)=5(*A*).

Аксиоматический подход

9. **Неманипулируемость (независимость от посторонних альтернатив)** – нельзя увеличить свою полезность, ведя стратегическое голосование. При наличии 3 и более кандидатов справедливо только для правила диктатора (теор. Гиббарда-Сэттертуэйта) .

3	2	2	Избиратели с профилем $C > B > A$ видят, что C не побеждает ни
A	B	C	при каких обстоятельствах и стратегически голосуют $B > C > A$.
B	A	B	В результате от положения C меняется победитель голосования
C	C	A	

Разрешение проблемы:

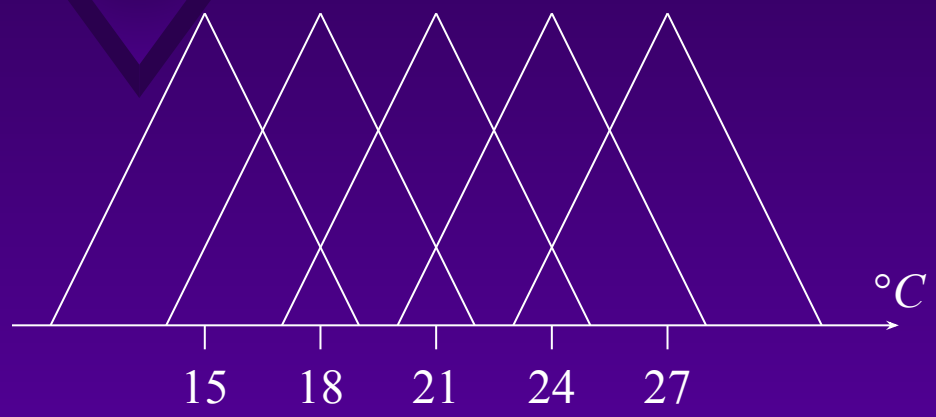
1. **Вероятностные правила голосования.**

   Пример: **«Правило случайного диктатора»** – вероятностная версия относительного большинства. Доминирующая стратегия – указать наилучшего для себя кандидата. Не выполняется «Парето-эффективность».

2. **Ограничение области предпочтений**

   Пример: **«однопиковые предпочтения»** – предпочтения, для которых при линейном упорядочении кандидатов полезность сначала возрастает до некоторого пика, а затем уменьшается.

Случай однопиковых предпочтений

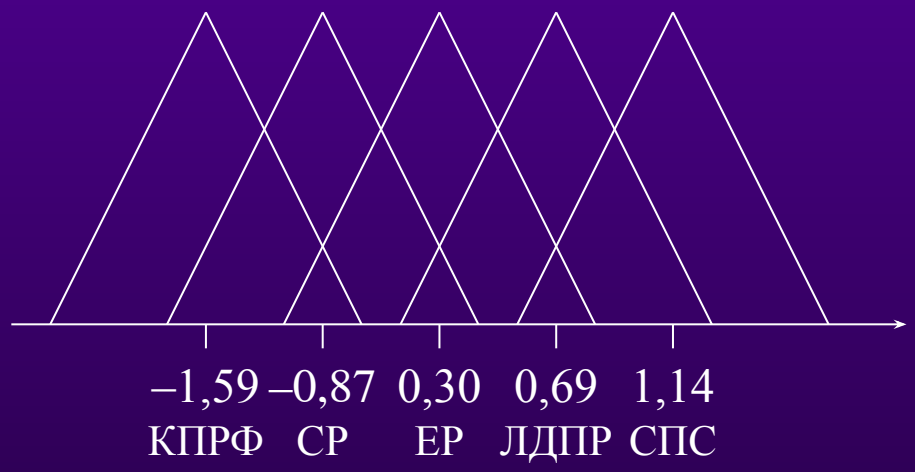


Коллективный выбор температуры в комнате (открыть / закрыть окно)

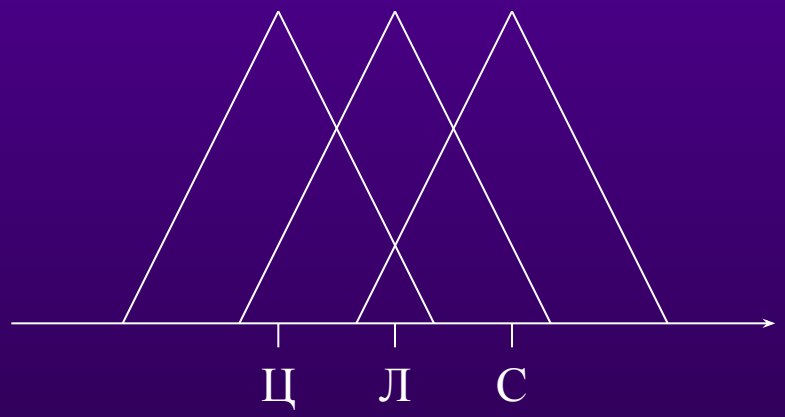
24>26 (4:1), 22>24 (3:2), 21>22 (3:2)

Из двух альтернатив побеждает поддержанная медианным избирателем!

Упорядочение не обязательно должно быть изначально. Можно придумать порядок, при котором предпочтения однопиковые!



Экономическая свобода



ЦСКА, Локомотив, Спартак

ЦСКА, Локомотив, Спартак

Л	Л	С	Ц	С	Ц
С	Ц	Л	Л	Ц	С
Ц	С	Ц	С	Л	Л

У Локомотива при игре с ЦСКА и Спартаком двойная поддержка трибун!

Сопоставление результатов в турнире троих и в чемпионате:

2000 – Локомотив во внутригрупповом выше Спартака, хотя в чемпионате Спартак по-прежнему (как и в 90-е) победитель с большим отрывом.

2001-2004, 2008 – одинаковые результаты в чемпионате и в турнире 3 команд.

2005-2006 (!!!) – Локомотив лучший в группе, хотя худший в чемпионате

2007 – Локомотив существенно хуже остальных в чемпионате, но второй в группе с большим опережением Спартака и рядом с 1 местом ЦСКА.

Неограниченная область предпочтений приводит к стратегическому поведению и плохим для всех исходам для любых правил голосования!

Выполнение аксиом для различных правил голосования

	О	Б	А	М	Ш	2	К	В	С	П	Д	Ж
Простота	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+
Однозначность	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+
Анонимность	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	+
Нейтральность	–	–	–	–	–	–	+	–	–	–	+	+
Состоятельность по Кондорсе	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–
Парето-эффективность	+	+	–	+	–	+	+	+	+	–	+	–
Монотонность	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	–
Пополнение	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	+	–
Участие	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	+	–
Неманипулируемость	–	–	–	–	–	–	+	–	–	–	+	+

О – относительное большинство

Б – правило Борда

А – правило антибольшинства

М – Борда со строго монотонной шкалой

Ш – Борда с произвольной шкалой

2 – относительное большинство, 2 тура

К – правило Кондорсе

В – вариация Копленда

С – вариация Симпсона

П – повестка дня

Д – правило диктатора

Ж – жребий

Теорема Эрроу

Более сложная задача – не просто найти победителя, но составить порядок

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ – избиратели, $A=\{a,b,c,\ldots\}$ – кандидаты.
$P(A)$ – множество линейных порядков на A
$R(A)$ – множество нестрогих порядков на A

$$P(A)^n \to R(A)$$

Если |A|=2, есть единственное анонимное, нейтральное и монотонное правило – **правило большинства**. Оно также является неманипулируемым.

Теорема Эрроу о невозможности демократии: если |A|>2, существует единственное Парето-эффективное неманипулируемое правило – **правило диктатора**.

Пример стратегического поведения, приводящего к плохому для всех исходу, для правила Борда:

4	Л	Ц	С	С=Л=Ц=9	Л	Ц	С	Д=9
3	С	Л	Ц	Д=3	Д	Д	Д	М=6
2	Ц	С	Л	М=0	М	М	М	Л=Ц=С=5
1	Д	Д	Д	С	Л	Ц		
0	М	М	М	Ц	С	Л		

Метод Шульце (1997) (метод разъезженного пути)

- Избиратели указывают в бюллетене предпочтения относительно кандидатур. 1 – наиболее желаемый кандидат, 2 – второй по предпочтительности и т.д.
- Разрешается ставить одинаковые числа нескольким кандидатурам.
- Разрешается вообще не заполнять поле для части кандидатур (в таком случае считается, что они одинаково хуже всех, для которых указано число).

Обработка результатов голосования:

$d(A,B)$ – число избирателей, строго предпочитающих кандидата A кандидату B.

Путь силы p от A до B – последовательность кандидатов $C(1),\ldots,C(n)$ со св-ми:

1. $C(1)=A$, $C(n)=B$.
2. $d(C(i),C(i+1)) > d(C(i+1),C(i))$, $i=1,\ldots,n$.
3. $p=\min d(C(i),C(i+1))$.

Сила сильнейшего пути $p(A,B)$ – максимальное значение силы пути от A до B. Если пути от кандидата A к кандидату B не существует, $p(A,B)=0$.

Победитель – кандидат А, такой что $p(A,B) \geq p(B,A)$ для каждого кандидата B.

Метод Шульце (1997). Пример

45 избирателей, 5 кандидатов:

5	5	8	3	7	2	7	8
A	*A*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*E*
C	*D*	*E*	*A*	*A*	*B*	*C*	*B*
B	*E*	*D*	*B*	*E*	*A*	*E*	*A*
E	*C*	*A*	*E*	*B*	*D*	*B*	*D*
D	*B*	*C*	*D*	*D*	*E*	*A*	*C*

	d(*,*A*)	*d*(*,*B*)	*d*(*,*C*)	*d*(*,*D*)	*d*(*,*E*)
d(*A*,*)		20	26	30	22
d(*B*,*)	25		16	33	18
d(*C*,*)	19	29		17	24
d(*D*,*)	15	12	28		14
d(*E*,*)	23	27	21	31	

	к *A*	к *B*	к *C*	к *D*	к *E*
от *A*		*A*-30-*D*-28-*C*-29-*B*	*A*-30-*D*-28-*C*	A-30-D	*A*-30-*D*-28-*C*-24-*E*
от *B*	*B*-25-*A*		*B*-33-*D*-28-*C*	*B*-33-*D*	*B*-33-*D*-28-*C*-24-*E*
от *C*	*C*-29-*B*-25-*A*	*C*-29-*B*		*C*-29-*B*-33-*D*	*C*-24-*E*
от *D*	*D*-28-*C*-29-*B*-25-*A*	*D*-28-*C*-29-*B*	*D*-28-*C*		*D*-28-*C*-24-*E*
от *E*	*E*-31-*D*-28-*C*-29-*B*-25-*A*	*E*-31-*D*-28-*C*-29-*B*	*E*-31-*D*-28-*C*	*E*-31-*D*	

E > *A* (25:24), *E* > *B* (28:24), *E* > *C* (28:24), *E* > *D* (31:24)

A > *B* (28:25), *A* > *C* (28:25), *A* > *D* (30:25)

C > *B* (29:28), *C* > *D* (29:28)

B > *D* (33:28)

E* > *A* > *C* > *B* > *D

Метод Шульце. Еще примеры

Кондорсе:

23	17	2	10
A	*B*	*B*	*C*
	C		
	A		
	B		

	d(*,*A*)	*d*(*,*B*)	*d*(*,*C*)	к *A*	к *B*	к *C*
d(*A*,*)		33	25	от *A*	*A*-33-*B*	*A*-33-*B*-42-*C*
d(*B*,*)	27		42	от *B*	*B*-42-*C*-35-*A*	*B*-42-*C*
d(*C*,*)	35	18		от *C*	*C*-35-*A*	*C*-35-*A*-33-*B*

B > ***A*** (35:33), *A B* > *C* (42:33), *C* > *A* (35:33) ***B* > *C* > *A***

Янг, 100 избирателей:

C	*A*	*C*	*B*
A			

	A	*B*	*C*	*D*	к *A*	к *B*	к *C*	к *D*
A		76	38	34		*A*-76-*B*	*A*-76-*B*-68-D-70-C	*A*-76-*B*-68-*D*
B	24		36	68	от *A* *B*-68-*D*-66-*A*		*B*-68-*D*-70-*C*	*B*-68-*D*
C	62	64		30	от *B* *C*-64-*B*-68-*D*-66-*A*	*C*-64-*B*		*C*-64-*B*-68-*D*
D	66	32	70		от *C* *D*-66-*A*	*D*-66-*A*-76-*B*	*D*-70-*C*	
					от *D*			

A > *B* (76:66), *A* > *C* (68:64), *A* > *D* (68:66),

B > *C* (68:64), *B* > *D* (68:66), *D* > *C* (70:64).

***A* > *B* > *D* > *C*.** Общая поддержка этого порядка 76+38+34+36+68+70=**322.**

***D* > *C* > *A* > *B*.** Общая поддержка этого порядка 66+32+70+62+64+76=**370 > 322.**

Спасибо за внимание!

http://math.isu.ru/filatov,
http://polnolunie.baikal.ru/me,
http://fial_.livejournal.com,
alexander.filatov@gmail.com