Теория коллективного выбора

Филатов А.Ю.
Институт систем энергетики им.Л.А.Мелентьева,
Иркутский государственный университет

http://math.isu.ru/filatov,
http://polnolunie.baikal.ru/me,
http://fial_.livejournal.com,
alexander.filatov@gmail.com

Постановка проблемы кооперативного принятия решений

Многие общественно значимые решения не могут приниматься на основе рыночных механизмов, поскольку кооперативные возможности не будут эффективно использованы при децентрализованных действиях агентов.

Примеры:

- Финансирование общественных благ
- Трагедия общины (истощение ресурсов из-за чрезмерного использования)
- Дилемма заключенного (доминирующие стратегии ведут к худшему исходу)
- Асимметричность информации (отрицательный отбор; моральный риск)

Индивидуальные предпочтения → коллективный выбор (принимают все!)

Предположение: пренебрегаем мнением меньшинства; из двух альтернатив побеждает та, за которую проголосовало более 50% человек!

Правило большинства – единственный метод, удовлетворяющий требованиям

1. Анонимность (равноправие избирателей).
2. Нейтральность (равноправие кандидатов).
3. Монотонность (усиление поддержки не подвергает сомнению избрание).

Практика: альтернатив более двух!

Системы голосования

Системы голосования:

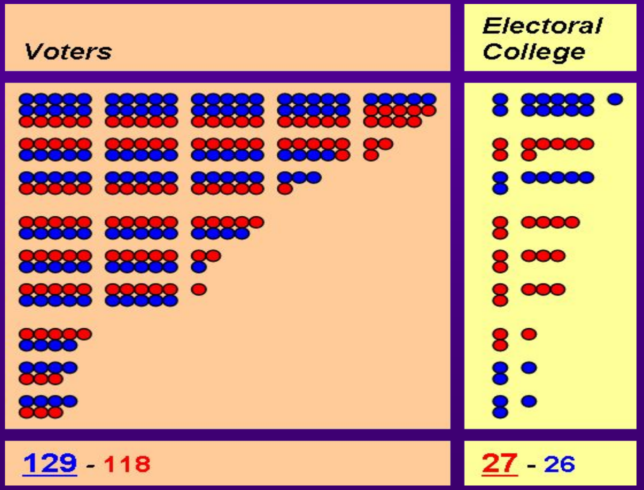
- Мажоритарная (Россия, президентские выборы – два тура)
- Пропорциональная (Россия, парламентские выборы, с 2003 года)
- Смешанная (Россия, парламентские выборы, до 2003 года)
- Голосование выборщиков (США, президентские выборы)

Парадоксы «голосования выборщиков»:

- Победитель может набрать меньше голосов избирателей, чем соперник (2000, Буш<Гора)
- Роль «колеблющихся штатов» и неравенство избирателей (Флорида, Нью-Мексико vs Юта)

Выборы-2008 (http://edition.cnn.com/election/2008/):
Обама (66,9 млн.) vs МакКейн (58,3 млн.)
победа МакКейна – смена позиции 0,4 млн.
или 26,1 млн.(12% голосов) «нужных людей»

- Парадокс Алабамы; парадокс новых штатов; парадокс более быстрого роста населения…



A	6	4,286	4	4,714	5
B	6	4,286	4	4,714	5
C	2	1,429	2	1,571	1

Правило Кондорсе vs Борда

Правило относительного большинства:

3	5	7	6	
A	A	B	C	A – победитель в голосовании (8 голосов)
B	C	D	B	A – наихудший кандидат (13 голосов из 21)
C	B	C	D	$C > A$ (13 из 21), $C > B$ (11 из 21), $C > D$ (14 из 21) $\Rightarrow$ победитель C
D	D	A	A	$B > C$: 1 место (7:6), 1–2 м (16:11), 1–3 м (21:21) $\Rightarrow$ победитель B

Правило Кондорсе:

Победитель по Кондорсе – кандидат, побеждающий любого из соперников при парном сравнении.

Правило Борда (учет рангов кандидатов):

Кандидаты от худшего к лучшему получают ранги $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \ldots$

Победитель по Борда – кандидат с максимальной суммой очков.

Обобщение правила Борда: произвольные шкалы

Правило относительного большинства – 0 0 … 0 1.

Правило антибольшинства – 0 1 … 1 1.

Парадокс Кондорсе

Победитель по Кондорсе может отсутствовать: *К > П > Ч > К*

К	*Ч*	*П*
П	*К*	*Ч*
Ч	*П*	*К*

Вероятности отсутствия победителя по Кондорсе:

p – число кандидатов, *n* – число избирателей

p / n	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**предел**
3	0,056	0,069	0,075	0,078	0,080	**0,088**
4	0,111	0,139	0,150	0,156	0,160	**0,176**
5	0,160	0,200	0,215	0,230	0,251	**0,251**
6	0,202	0,255	0,258	0,284	0,294	**0,315**
7	0,239	0,299	0,305	0,342	0,343	**0,369**
предел	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Вариация Копленда (из Кондорсе): максимизация разницы побед и поражений (выиграть у максимального числа кандидатов).

Вариация Симпсона (из Кондорсе): максимизация наименьшего числа избирателей, голосующих за данного кандидата при парном сравнении с другими (никому сильно не проиграть).

Борда ≠ Кондорсе

Существуют профили предпочтений избирателей, при которых победитель по Кондорсе не может быть избран ни при каком методе подсчета очков!

Пример для строго монотонного правила подсчета очков $s_2 > s_1 > s_0$**:**

	3	2	1	1
s_2	A	B	B	C
s_1	B	C	A	A
s_0	C	A	C	B

$A > B$ (4 из 7), $A > C$ (4 из 7) $\Rightarrow$ A – победитель по Кондорсе

очки B = $3s_2 + 3s_1 + s_0 > 3s_2 + 2s_1 + 2s_0$ = очки A

Пример для произвольного правила подсчета очков $s_2 \geq s_1 \geq s_0,\ s_2 > s_0$**:**

	6	4	4	3
s_2	A	B	B	C
s_1	B	C	A	A
s_0	C	A	C	B

$A > B$ (9 из 17), $A > C$ (10 из 17) $\Rightarrow$ A – победитель по Кондорсе

очки B = $8s_2 + 6s_1 + 3s_0 > 6s_2 + 7s_1 + 4s_0$ = очки A

Профиль Страффина

1	4	1	3
A	*C*	*E*	*E*
B	*D*	*A*	*A*
C	*B*	*D*	*B*
D	*E*	*B*	*D*
E	*A*	*C*	*C*

	A	***B***	***C***	***D***	***E***
A		5	5	5	1
B	4		5	4	5
C	4	4		5	5
D	4	5	4		5
E	8	4	4	4	

Победитель по Кондорсе отсутствует,

у всех есть поражения в парных играх.

Вариация Копленда:

победитель *A* (+3–1)

B=*C*=*D* (+2–2), *E* (+1–3).

Вариация Симпсона:

победители *B*=*C*=*D*=*E* (4), *A* (1).

Правило Борда – классическое и случай произвольных шкал. Победителем может стать любой из кандидатов.

4	*A*=1*4+4*0+1*3+3*3=16	4	*A*=19,6	4	*A*=19,6	4	*A*=16	9	*A*=41
3	*B*=1*3+4*2+1*1+3*2=18	3,9	*B*=18,9	3	*B*=18	3	*B*=24,3	8	*B*=23
2	*C*=1*2+4*4+1*0+3*0=18	2	*C*=18	2	*C*=21,6	2,9	*C*=18,9	2	*C*=38
1	*D*=1*1+4*3+1*2+3*1=18	1	*D*=21,6	1	*D*=18	1	*D*=18,9	1	*D*=38
0	*E*=1*0+4*1+1*4+3*4=20	0	*E*=20	0,9	*E*=20,9	0	*E*=20	0	*E*=40

Аксиоматический подход

1. **Однозначность** – правило всегда дает сделать однозначный выбор. Не выполняется для анонимных и нейтральных правил, если *n* имеет делитель ≤ *p*.
2. **Анонимность (равноправие избирателей)** – имена избирателей не имеют значения: если два избирателя поменяются голосами, то результат выборов не изменится. Не выполняется, если при равенстве победителем становится выбранный определенным избирателем.
3. **Нейтральность (равноправие альтернатив)** – имена кандидатов не имеют значения: если поменять местами кандидатов *A* н *B* в предпочтении каждого избирателя, то исход голосования изменится соответственно. Не выполняется, если при равенстве победителем становится определенный кандидат.
4. **Состоятельность по Кондорсе** – правило всегда выбирает победителя по Кондорсе, если он существует. Не выполняется для любых методов подсчета очков, в т.ч. для правила относительного большинства, правила Борда и т.д.
5. **Парето-эффективность (единогласие)** – если кандидат *A* для всех избирателей лучше *B*, то *B* не может быть избранным. Не выполняется для правила антибольшинства.

Последовательные сравнения по правилу большинства

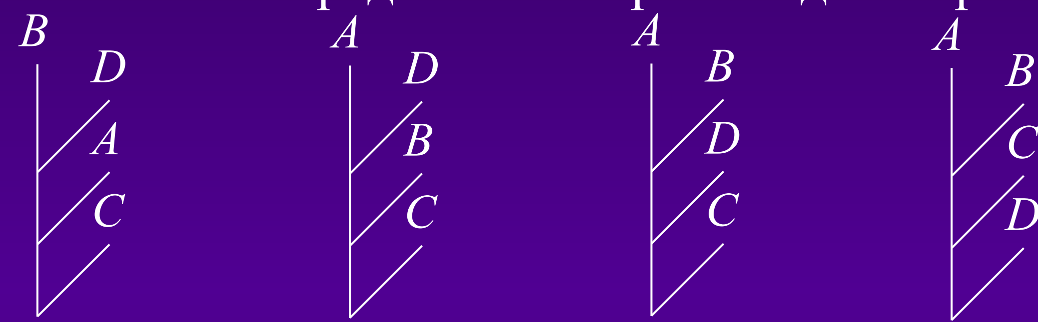
1. Не выполняется нейтральность. Повестка определяет контроль над выборами.

A A D D B $A>B$, $A>C$,

B B B C C $B>C$, $B>D$,

C C A A D $C>D$, $D>A$.

D D C B A



Побед. *A* Побед. *B* Побед. *C* Побед. *D*

2. Не выполняется Парето-эффективность.

B A C

A D B $A<B<C<D$,

D C A при этом $A>D$

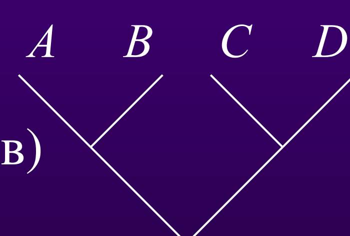
C B D для всех избирателей

D D C C

A A D D

C C A A $A>B$, $C>D$, $A>C$ (при равенстве голосов)

B B B B при этом $D>A$ для всех избирателей



Аксиоматический подход

6. **Монотонность** – увеличившаяся поддержка кандидата не может уменьшить шанса быть избранным. Не выполняется для относительного большинства с выбыванием (голосования в 2 тура).

профиль 1: профиль 2:

6	5	4	2	6	5	4	2
A	C	B	B	A	C	B	A
B	A	C	A	B	A	C	B
C	B	A	C	C	B	A	C

Профиль 1: выходят A и B, $A > B$ (11:6)

Профиль 2: A улучшает свое положение, выходят A и C, $C > A$ (9:8).

Не выполняется для правила альтернативных голосов (последовательного исключения неудачников) для любого способа подсчета очков.

	6	4	6	2	6	3
s_2	A	B	B	C	C	A
s_1	B	A	C	B	A	C
s_0=0	C	C	A	A	B	B

Шаг 1: исключается C,

$$9s_1 + 8s_2 < \min\{10s_1 + 9s_2;\ 8s_1 + 10s_2\}.$$

Шаг 2: $A > B$ (15:12).

	9	1	6	8	3
s_2	A	B	B	C	A
s_1	B	A	C	A	C
s_0=0	C	C	A	B	B

В выделенных столбцах A становится лучше B

Шаг 1: исключается B,

$$9s_1 + 7s_2 < \min\{9s_1 + 12s_2;\ 9s_1 + 8s_2\}.$$

Шаг 2: $C > A$ (14:13).

Аксиоматический подход

7. **Пополнение** – если 2 независимые группы избирателей выбирают кандидата *A*, то, объединившись, они выберут его же. Не выполняется для любого правила, состоятельного по Кондорсе.

Состоятельный по Кондорсе метод выбирает *A* в группе 1, при этом *B*>*A*

Гр.1: (первые три столбца) **Гр. 2:** (последние два столбца)

2	2	2	4	3
C	*A*	*B*	*A*	*B*
B	*C*	*A*	*B*	*A*
A	*B*	*C*	*C*	*C*

Гр.1: победитель ***A***. *A*<*B* (2:4), *A*>*C* (4:2), *B*<*C* (2:4).

Гр.2: победитель ***A***. *A*>*B* (4:3), *A*>*C* (7:0), *B*>*C* (7:0).

Гр.1+2: победитель ***B***. *A*<*B* (6:7), *A*>C (11:2), *B*>*C* (9:4).

8. **Участие** – собственный бюллетень не может уменьшит полезность избирателя. Не выполняется для любого правила, состоятельного по Кондорсе, при 4 и более кандидатах.

3	3	5	4	4
A	*A*	*D*	*B*	*C*
D	*D*	*B*	*C*	*A*
C	*B*	*C*	*A*	*B*
B	*C*	*A*	*D*	*D*

Правило Симпсона до участия: победитель *A*.

$S(A)=6(B,C)$, $S(B)=4(D)$, $S(C)=3(B)$, $S(D)=5(A)$.

Правило Симпсона после участия: победитель *B*.

$S(A)=6(C)$, $S(B)=8(D)$, $S(C)=7(D)$, $S(D)=5(A)$.

Аксиоматический подход

9. **Ненанипулируемость (независимость от посторонних альтернатив)** – нельзя увеличить свою полезность, ведя стратегическое голосование. При наличии 3 и более кандидатов справедливо только для правила диктатора (теор. Гиббарда-Сэттертуэйта) .

3	2	2
A	B	C
B	A	B
C	C	A

Избиратели с профилем $C > B > A$ видят, что C не побеждает ни при каких обстоятельствах и стратегически голосуют $B > C > A$. В результате от положения C меняется победитель голосования.

Разрешение проблемы:

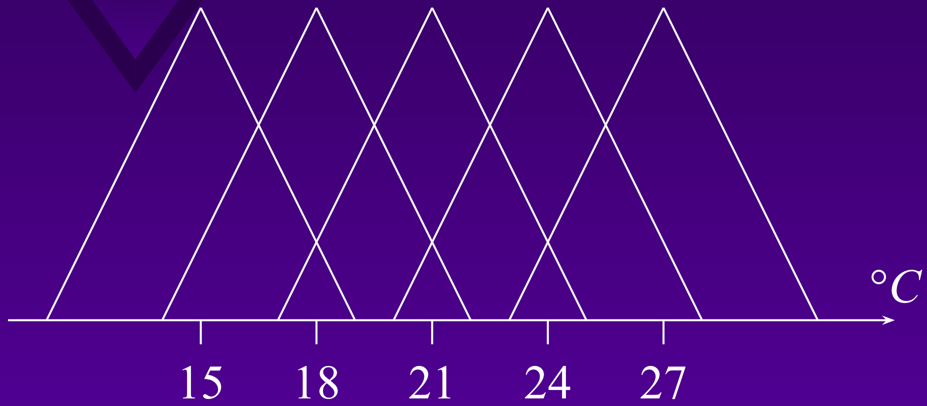
1. **Вероятностные правила голосования.**

   Пример: **«Правило случайного диктатора»** – вероятностная версия относительного большинства. Доминирующая стратегия – указать наилучшего для себя кандидата. Не выполняется «Парето-эффективность».

2. **Ограничение области предпочтений**

   Пример: **«однопиковые предпочтения»** – предпочтения, для которых при линейном упорядочении кандидатов полезность сначала возрастает до некоторого пика, а затем уменьшается.

Случай однопиковых предпочтений

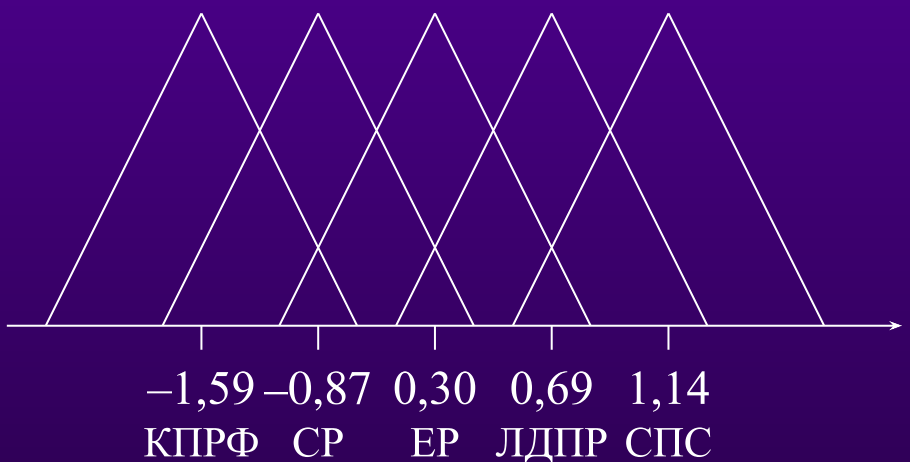


Коллективный выбор температуры в комнате (открыть / закрыть окно)

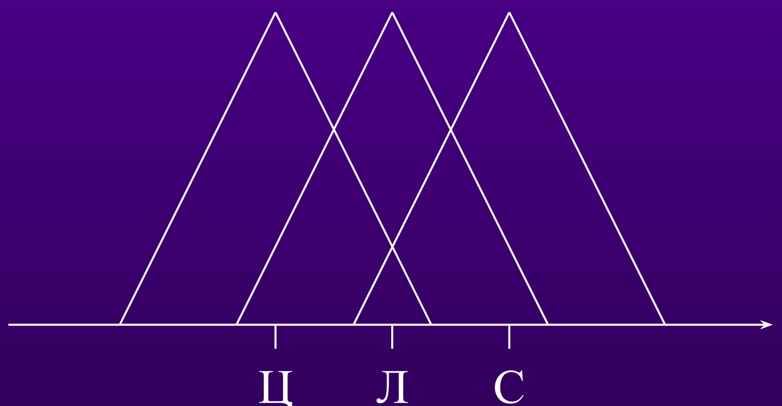
24>26 (4:1), 22>24 (3:2), 21>22 (3:2)

Из двух альтернатив побеждает поддержанная медианным избирателем!

Упорядочение не обязательно должно быть изначально. Можно придумать порядок, при котором предпочтения однопиковые!



Экономическая свобода



ЦСКА, Локомотив, Спартак

ЦСКА, Локомотив, Спартак

Л	Л	С	Ц	С	Ц
С	Ц	Л	Л	Ц	С
Ц	С	Ц	С	Л	Л

У Локомотива при игре с ЦСКА и Спартаком двойная поддержка трибун!

Сопоставление результатов в турнире троих и в чемпионате:

2000 – Локомотив во внутригрупповом выше Спартака, хотя в чемпионате Спартак по-прежнему (как и в 90-е) победитель с большим отрывом.

2001-2004, 2008 – одинаковые результаты в чемпионате и в турнире 3 команд.

2005-2006 (!!!) – Локомотив лучший в группе, хотя худший в чемпионате

2007 – Локомотив существенно хуже остальных в чемпионате, но второй в группе с большим опережением Спартака и рядом с 1 местом ЦСКА.

Неограниченная область предпочтений приводит к стратегическому поведению и плохим для всех исходам для любых правил голосования!

Выполнение аксиом для различных правил голосования

	О	Б	А	М	Ш	2	К	В	С	П	Д	Ж
Простота	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+
Однозначность	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+
Анонимность	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	+
Нейтральность	–	–	–	–	–	–	+	–	–	–	+	+
Состоятельность по Кондорсе	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–
Парето-эффективность	+	+	–	+	–	+	+	+	+	–	+	–
Монотонность	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	–
Пополнение	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	+	–
Участие	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	+	–
Неманипулируемость	–	–	–	–	–	–	+	–	–	–	+	+

О – относительное большинство
Б – правило Борда
А – правило антибольшинства
М – Борда со строго монотонной шкалой
Ш – Борда с произвольной шкалой
2 – относительное большинство, 2 тура

К – правило Кондорсе
В – вариация Копленда
С – вариация Симпсона
П – повестка дня
Д – правило диктатора
Ж – жребий

Теорема Эрроу

Более сложная задача – не просто найти победителя, но составить порядок

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ – избиратели, $A=\{a,b,c,\ldots\}$ – кандидаты.
$P(A)$ – множество линейных порядков на A
$R(A)$ – множество нестрогих порядков на A

$$\boldsymbol{P(A)^n \to R(A)}$$

Если |A|=2, есть единственное анонимное, нейтральное и монотонное правило – **правило большинства**. Оно также является неманипулируемым.

Теорема Эрроу о невозможности демократии: если |A|>2, существует единственное Парето-эффективное неманипулируемое правило – **правило диктатора**.

Пример стратегического поведения, приводящего к плохому для всех исходу, для правила Борда:

4	Л	Ц	С	С=Л=Ц=9	Л	Ц	С	Д=9
3	С	Л	Ц	Д=3	Д	Д	Д	М=6
2	Ц	С	Л	М=0	М	М	М	Л=Ц=С=5
1	Д	Д	Д		С	Л	Ц	
0	М	М	М		Ц	С	Л	

Метод Шульце (1997)
(метод разъезженного пути)

- Избиратели указывают в бюллетене предпочтения относительно кандидатур. 1 – наиболее желаемый кандидат, 2 – второй по предпочтительности и т.д.
- Разрешается ставить одинаковые числа нескольким кандидатурам.
- Разрешается вообще не заполнять поле для части кандидатур (в таком случае считается, что они одинаково хуже всех, для которых указано число).

Обработка результатов голосования:

$d(A,B)$ – число избирателей, строго предпочитающих кандидата A кандидату B.

Путь силы *p* от *A* до *B* – последовательность кандидатов $C(1),\ldots,C(n)$ со св-ми:

1. $C(1)=A$, $C(n)=B$.
2. $d(C(i),C(i+1)) > d(C(i+1),C(i))$, $i=1,\ldots,\mathrm{n}$.
3. $p=\min d(\mathrm{C}(i),\mathrm{C}(i+1))$.

Сила сильнейшего пути *p*(*A*,*B*) – максимальное значение силы пути от A до B. Если пути от кандидата A к кандидату B не существует, $p(A,B)=0$.

Победитель – кандидат А, такой что $p(A,B) \geq p(B,A)$ для каждого кандидата B.

Метод Шульце (1997). Пример

45 избирателей, 5 кандидатов:

5	5	8	3	7	2	7	8
A	*A*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*E*
C	*D*	*E*	*A*	*A*	*B*	*C*	*B*
B	*E*	*D*	*B*	*E*	*A*	*E*	*A*
E	*C*	*A*	*E*	*B*	*D*	*B*	*D*
D	*B*	*C*	*D*	*D*	*E*	*A*	*C*

	d(*,*A*)	*d*(*,*B*)	*d*(*,*C*)	*d*(*,*D*)	*d*(*,*E*)
d(*A*,*)		20	26	30	22
d(*B*,*)	25		16	33	18
d(*C*,*)	19	29		17	24
d(*D*,*)	15	12	28		14
d(*E*,*)	23	27	21	31	

	к *A*	к *B*	к *C*	к *D*	к *E*
от *A*		*A*-30-*D*-28-*C*-29-*B*	*A*-30-*D*-28-*C*	A-30-D	*A*-30-*D*-28-*C*-24-*E*
от *B*	*B*-25-*A*		*B*-33-*D*-28-*C*	*B*-33-*D*	*B*-33-*D*-28-*C*-24-*E*
от *C*	*C*-29-*B*-25-*A*	*C*-29-*B*		*C*-29-*B*-33-*D*	*C*-24-*E*
от *D*	*D*-28-*C*-29-*B*-25-*A*	*D*-28-*C*-29-*B*	*D*-28-*C*		*D*-28-*C*-24-*E*
от *E*	*E*-31-*D*-28-*C*-29-*B*-25-*A*	*E*-31-*D*-28-*C*-29-*B*	*E*-31-*D*-28-*C*	*E*-31-*D*	

$E > A$ (25:24), $E > B$ (28:24), $E > C$ (28:24), $E > D$ (31:24)

$A > B$ (28:25), $A > C$ (28:25), $A > D$ (30:25)

$C > B$ (29:28), $C > D$ (29:28)

$B > D$ (33:28)

$\boldsymbol{E > A > C > B > D}$

Метод Шульце. Еще примеры

Кондорсе:

23	17 8	2	10
A	*B* *C*	*B*	*C*
B	*C* *B*	*A*	*A*
C	*A* *A*	*C*	*B*

	$d(*,A)$	$d(*,B)$	$d(*,C)$
$d(A,*)$		33	25
$d(B,*)$	27		42
$d(C,*)$	35	18	

	к A	к B	к C
от A		A-33-B	A-33-B-42-C
от B	B-42-C-35-A		B-42-C
от C	C-35-A	C-35-A-33-B	

$B > A$ (35:33), $B > C$ (42:33), $C > A$ (35:33) **$B > C > A$**

Янг, 100 избирателей:

	A	B	C	D
A		76	38	34
B	24		36	68
C	62	64		30
D	66	32	70	

	к A	к B	к C	к D
от A		A-76-B	A-76-B-68-D-70-C	A-76-B-68-D
от B	B-68-D-66-A		B-68-D-70-C	B-68-D
от C	C-64-B-68-D-66-A	C-64-B		C-64-B-68-D
от D	D-66-A	D-66-A-76-B	D-70-C	

$A > B$ (76:66), $A > C$ (68:64), $A > D$ (68:66),

$B > C$ (68:64), $B > D$ (68:66), $D > C$ (70:64).

$A > B > D > C$. Общая поддержка этого порядка 76+38+34+36+68+70=**322.**

$D > C > A > B$. Общая поддержка этого порядка 66+32+70+62+64+76=**370 > 322.**

Спасибо за внимание!

http://math.isu.ru/filatov,
http://polnolunie.baikal.ru/me,
http://fial_.livejournal.com,
alexander.filatov@gmail.com