ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение. **Дискретная случайная величина** X **называется распределенной по биномиальному закону,** если она принимает значения 0, 1, 2, …, n, с вероятностями, определяемыми по формуле Бернулли:

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, m=0, 1, 2, …, n.

Математическое ожидание и дисперсия: $M[X] = np$, $D[X] = npq$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Определение. **Дискретная случайная величина** X **распределена по закону Пуассона**, если ее возможные значения составляют бесконечный ряд целых чисел 0, 1, 2, …, m, … (*счетное множество значений*), а соответствующие им вероятности выражаются формулой Пуассона:

$$p_m = P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a > 0$ – параметр распределения Пуассона.

Математическое ожидание и дисперсия: $M[X] = D[X] = a$.

РАВНОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

<u>*Определение.*</u> **Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределенной на интервале** $[a, b]$, если ее плотность распределения на этом интервале постоянна и равна нулю вне этого интервала:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b], \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функция распределения СВ X, равномерно распределенной на интервале $[a, b]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a < x \le b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ СВ X:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}, \quad D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_x = \sqrt{D[X]} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания в интервал $[\alpha, \beta]$: $P(\alpha \le X \le \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}.$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение. **Непрерывная случайная величина** X **распределена по показательному (экспоненциальному) закону**, если её плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0,\\ 0, & \text{при } x<0,\end{cases}$$

где $\lambda>0$ – параметр распределения.

Функция распределения:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0,\\ 0, & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

$$M[X]=\frac{1}{\lambda},\qquad D[X]=\frac{1}{\lambda^2},\qquad \sigma_x=\frac{1}{\lambda}.$$

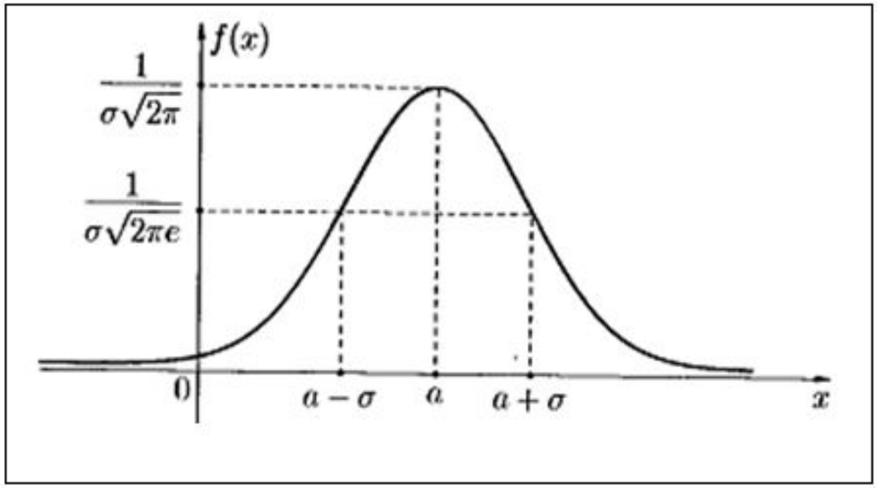
Вероятность попадания в интервал $[a,b]$: $P(a\le X\le b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение. **Непрерывная случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами a и $\sigma > 0$**, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty \le x \le \infty.$$

Нормальное распределение имеет два параметра. Кратко нормальный закон распределения записывается в виде $N(a, \sigma^2)$.

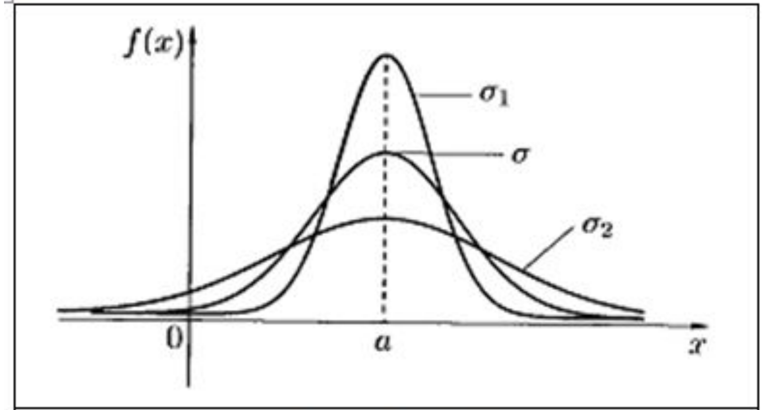


Кривую нормальной плотности распределения называют нормальной или гауссовой. Кривая симметрична относительно значения $x = a$ и имеет в этой точке максимум, равный

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Рассмотрим поведение кривой нормальной плотности распределения при изменении её параметров.

Очевидно, что при увеличении (уменьшении) параметра a при неизменном значении параметра σ^2 кривая будет смещаться вправо (влево) вдоль числовой оси с сохранением своей формы.



$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$

При изменении параметра σ^2 форма кривой изменяется: при уменьшении σ^2 вершина кривой «заостряется» и поднимается вверх, при увеличении σ^2 вершина кривой становится все более «пологой» и опускается (*площадь под кривой всегда равна единице!*).

Нормальный закон распределения с параметрами a=0 и σ^2=1 называется стандартным нормальным распределением. Его краткое обозначение – $N(0, 1)$. Плотность распределения стандартной СВ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Случайная величина, подчиняющаяся стандартному нормальному распределению, называется стандартной нормальной СВ.

Найдем функцию распределения нормально распределенной СВ с параметрами $\left(a,\ \sigma^2\right)$. В соответствии с выражением для функции распределения СВ с известной плотностью распределения имеем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt.$$

Произведем замену переменной, положив $z=\dfrac{t-a}{\sigma}$. Тогда $t=\sqrt{2}\sigma z+a$, $dz=\sigma dt$, а для пределов интегрирования получаем: при $t=-\infty$ $z=-\infty$, при $t=x$ $z=(x-a)/\sigma$. Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2}dt.$$

Представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(x-a)/\sigma} e^{-z^2/2}dz.$$

Первый интеграл в сумме равен

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2}dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(z/\sqrt{2}\right)^2}d\left(z/\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\frac{1}{2},$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$ (известный интеграл Эйлера - Пуассона).

Второй интеграл есть значение нормированной функции Лапласа

$$\Phi_0(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{u} e^{-t^2/2}dt$$

при значении аргумента $u=(x-a)/\sigma$.

Таким образом, функция нормального распределения с параметрами $\left(a,\ \sigma^2\right)$ выражается через нормированную функцию Лапаласа соотношением

$$F(x)=0,5+\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нормированная функция Лапласа, называемая иногда просто функцией Лапласа, обладает следующими свойствами:

$$\Phi_0(0)=0;\quad \Phi_0(-x)=-\Phi_0(x);\quad \Phi_0(\infty)=0,5;\quad \Phi_0(-\infty)=-0,5.$$

Имеются таблицы приближеных значений функциии Лапласа, которые приводится в учебниках по теории вероятностей и в справочниках по математике. Для вычисления значений $\Phi_0(x)$ могут также использоваться встроенные функции в электронных таблицах Excel, в пакетах Mathcad и Matlab.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ НОРМАЛЬНОЙ СВ

Теорема. **Математическое ожидание случайной величины** X**, распределенной по нормальному закону** $N(a,\sigma^2)$**, равно параметру** a **этого закона**, т.е.

$$M[X]=a,$$

а её дисперсия равна параметру σ^2**,** т.е.

$$D[X]=\sigma^2.$$

Доказательство. По определению математического ожидания НСВ

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Произведем замену переменной, положив $t = \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$. Тогда $x = \sqrt{2}\sigma t + a$, $dx = \sqrt{2}\sigma dt$, пределы интегрирования не изменяются и, следовательно,

$$M[X] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sigma t + a\right) e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 0 + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = a$$

(первый интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных относительно нуля пределах, второй представляет собой известный интеграл Эйлера-Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$).

При нахождении дисперсии сделаем такую же замену переменной, как и при вычислении предыдущего интеграла. Проведя преобразования, получим:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2 t^2 \sigma\sqrt{2} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2.$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}2\sigma^2t^2\sigma\sqrt{2}dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sigma^2$$

Здесь учтено, что интегрирование по частям дает следующий результат:

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\left\{\begin{matrix} u=t,\ \ du=dt \\ dv=te^{-t^2}dt,\ \ v=-0,5e^{-t^2}\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким образом, параметры a и σ^2 нормального распределения являются математическим ожиданием и дисперсией нормально распределенной СВ. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной СВ равно σ.

Так как плотность распределения нормальной СВ является унимодальной и четной функцией, причем абсцисса максимума плотности совпадает со значением математического ожидания, то мода и медиана нормальной СВ равны её математическому ожиданию. Предлагается самостоятельно показать, что асимметрия и эксцесс нормального распределения равны нулю.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ НОРМАЛЬНОЙ СВ В З АДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ

Найдем вероятность попадания нормальной СВ X в интервал от α до β. Из свойств плотности и функции распределения известно, что эта вероятность равна разности значений функции на концах интервала. Поэтому

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (*)$$

На практике часто приходится вычислять вероятность попадания нормальной СВ в интервал, симметричный относительно её математичесого ожидания

Пусть $\delta > 0$ – произвольное число. Вычислим вероятность того, что нормальная СВ отклонится от своего математического ожидания на величину, меньшую δ, т.е. вероятность

$$P(a - \delta < X < a + \delta) = P(|X - a| < \delta).$$

По формуле (*) при $\alpha = a - \delta$ и $\beta = a + \delta$ получаем

$$P(|X - a| < \delta) = \Phi_0\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ НОРМАЛЬНОЙ СВ В З АДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=\Phi_0\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)=\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\cdot\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Здесь использовано свойство нечетности нормированной функции Лапласа: $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$.

Таким образом, для нормально распределенной с параметрами a и σ^2 СВ вероятность отклонения от математического ожидания на величину δ равна

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=2\cdot\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Пусть $\delta=3\sigma$. Тогда

$$P\left(|X-a|<3\sigma\right)=2\cdot\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\cdot\Phi_0(3)=2\cdot0,49865=0,9973,$$

т.е. событие $|X-a|<3\sigma$ почти достоверное.

Таким образом, вероятность того, что нормальная случайная величина примет значения вне интервала $(a-3\sigma,a+3\sigma)$ равна всего 0,0027. Такое событие можно практически считать невозможным. Это есть так называемое **правило трёх сигм.**

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ НОРМАЛЬНОЙ СВ В З АДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ

Правило трёх сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от своего математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Правило трёх сигм часто применяется на практике для доказательства нормальности эмпирических случайных величин.

Пример вычисления вероятности попадания СВ в интервал.

Величина ошибки измерения амплитуды сигнала распределена по нормальному закону с параметрами a=0, $\sigma = 15$ мВ. Определить вероятность того, что значение ошибки измерения по абсолютной величине не превысит 20 мВ.

Решение. В данном примере случайная величина X означает ошибку измерения амплитуды сигнала, которая распределена по нормальному закону. Событие, состоящее в том, что ошибка измерения по абсолютной величине не превосходит 20 мВ, равносильно тому, что случайная величина X заключена в интервале от -20 мВ до +20 мВ. Вероятность этого события равна

$$P(-20 < X < 20) = \Phi_0\left(\frac{15}{20}\right) - \Phi_0\left(-\frac{15}{20}\right) = 2 \cdot \Phi_0(0,75) = 2 \cdot 0,258 = 0,516.$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Центральная предельная теорема является теоретической основой нормального распределения. По существу это группа теорем, которые устанавливают связь между законом распределения суммы случайных величин и его предельной формой – нормальным законом распределения.

Приведем простейшую формулировку центральной предельной теоремы.

Теорема. Пусть для последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ выполняются условия:

1) при любых n случайные величины $X_1, X_2, .., X_n$ – независимы в совокупности;

2) одинаково распределены;

3) существует $M[X_k^2]$.

Обозначим: $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $\tilde{Y}_n = Y_n - M[Y_n]$, $Z_n = \dfrac{\tilde{Y}_n}{\sigma\sqrt{n}}$, где $\sigma^2 = D[X_k], k = \overline{1, n}$.

Утверждается, что при $n \to \infty$ и некоторых *дополнительных* условиях распределение случайной величины Z_n подчиняется стандартному нормальному закону: $f(Z_n) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-Z_n^2/2}$.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Качественная суть дополнительных условий такова. Каждое из слагаемых X_k должно быть малым, равновероятным по знаку и не должно превобладать над остальными. Строгая математическая формализация условий дана Ляпуновым и др.

Центральная предельная теорема играет большую роль в приложениях теории веоятностей, связанных с выбором и обоснованием закона распределения реальных случайных явлений. Одним из характерных примеров применения этой теоремы является баллистика, изучающая явления рассеивания снарядов (ракет) при стрельбе по цели.

На траекторию полета снаряда действует множество независимых факторов: колебания скорости и направления ветра, атмосферного давления, температуры и влажности воздуха; отклонения величины заряда и веса снаряда от номинала; ошибка прицеливания и т.д. Результатом этих многочисленных воздействий, каждое из которых вносит равномерный вклад в общую сумму (*ограниченночть дисперсий!*), является то, что отклонение точки попадания от цели хорошо описывается нормальным законом распределения.

Другим примером является теория и практика измерений. Всякое измерение неизбежно связано с погрешностями. Реально наблюдаемая погрешность является суммой элементарных погрешностей, вызванных многочисленными факторами, каждый из которых лишь незначительно влияет на результат измерения. В силу центральной предельной теоремы результирующая погрешность должна быть нормальной случайной величиной. Практика подтверждает это положение.

Гипергеометрический закон распределения

Дискретная случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, …, min (n, M) с вероятностями

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где m=0, 1, 2, …, m, …, min(n, M), $M \le N$, $m \le n$, $n \le N$; n, M, N – натуральные числа.

Гипергеометрическое распределение возникает в случаях, подобных следующему: в урне N шаров, из них M белых, остальные черные. Из урны вынимается n шаров. Требуется найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет ровно m белых (остальные черные). Случайная величина X – число белых шаров среди извлеченных из урны.

Математическое ожидание СВ: $M[X] = n \cdot \dfrac{M}{N}$.

Дисперсия СВ: $D[X] = n \cdot \dfrac{M}{N-1} \cdot \dfrac{(N-M)(N-n)}{N^2}$.

Распределение Рэлея

Непрерывная случайная величина X распределена по закону Рэлея, если её плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), & \text{при } x \ge 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\sigma > 0$ – параметр распределения.

Функция распределения:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right).$$

Математическое ожидание: $M[X] = \sigma\sqrt{\pi/2}$.

Дисперсия: $D[X] = (2 - \pi/2)\sigma^2$.

Распределение введено в 1880 г. Джоном Уильямом Стреттом (лордом Рэлеем) при решении задачи о распределении амплитуды суммы гармонических колебаний со случайными начальными фазами.

Распределение Рэлея. Применения

1. В радиотехнике. Распределение амплитуды суммы гармонических колебаний с примерно одинаковыми амплитудами и случайными равномерно распределенными начальными фазами при большом числе суммируемых колебаний описывается законом Рэлея.

2. В теории стрельбы. Если отклонения точки попадания от цели для двух взаимно перпендикулярных направлений нормально распределены и некоррелированы, координаты цели совпадают с началом координат, то, обозначив разброс по осям как X и Y, получим выражение для величины промаха R в виде $R=\sqrt{X^2+Y^2}$. В этом случае величина R имеет распределение Рэлея.