

Мастер-Класс по Математике «Н~~Е~~равенства»



Логарифмические неравенства

$$\frac{\log_3(9x) - 13}{(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4} \leq 1$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

$$\frac{\log_3 9 + \log_3 x - 13}{(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x} \leq 1$$

$$\frac{\log_3 x - 11}{(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x} \leq 1$$

$$\log_3 x = a$$

ОДЗ:

$$x > 0$$

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 \neq 0$$

$$\frac{(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x \neq 0,}{\log_a b^k = k \log_a b} \leq 1$$

$$\log_3 x(\log_3 x - 4) \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$\log_3 x \neq 4$$

$$x \neq 3^4 \neq 81$$



$$\frac{a - 11}{a^2 - 4a} \leq 1$$

$$\frac{a - 11}{a(a - 4)} - 1 \leq 0$$

$$\frac{-a^2 + 5a - 11}{a(a - 4)} \leq 0$$

$$\frac{a^2 - 5a + 11}{a(a - 4)} \geq 0 \quad a$$

$$a^2 - 5a + 11 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 * 11 = -19$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ a > 4 \end{cases} \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 x < \log_3 1 \\ \log_3 x > \log_3 81 \end{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x > 81 \end{cases}$$

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Ответ: $x \in (0; 1) \cup (81; +\infty)$



Показательные неравенства

$$\frac{6 \cdot 9^{x-1} - 10}{81^{x-\frac{1}{2}} - 9} \leq 1$$

$$\leq 1 \quad a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$\frac{\frac{2}{3}(a-15)}{\frac{1}{9}(a^2-81)} \leq 1$$

$$\frac{6 \cdot 9^x \cdot \frac{1}{9} - 10}{81^x \cdot \frac{1}{9} - 9} \leq 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{6(a-15)}{a^2-81} - 1 \leq 0$$

$$\frac{6a - 90 - a^2 + 81}{a^2 - 81} \leq 0$$

$$9^x = a$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\frac{\frac{2}{3}a - 10}{\frac{1}{9}a^2 - 9} \leq 1$$

$$\frac{-a^2 + 6a - 9}{(a-9)(a+9)} \leq 0$$

$$\frac{a^2 - 6a + 9}{(a-9)(a+9)} \geq 0$$

$$\frac{a^2 - 6a + 9}{(a - 9)(a + 9)} \geq 0$$

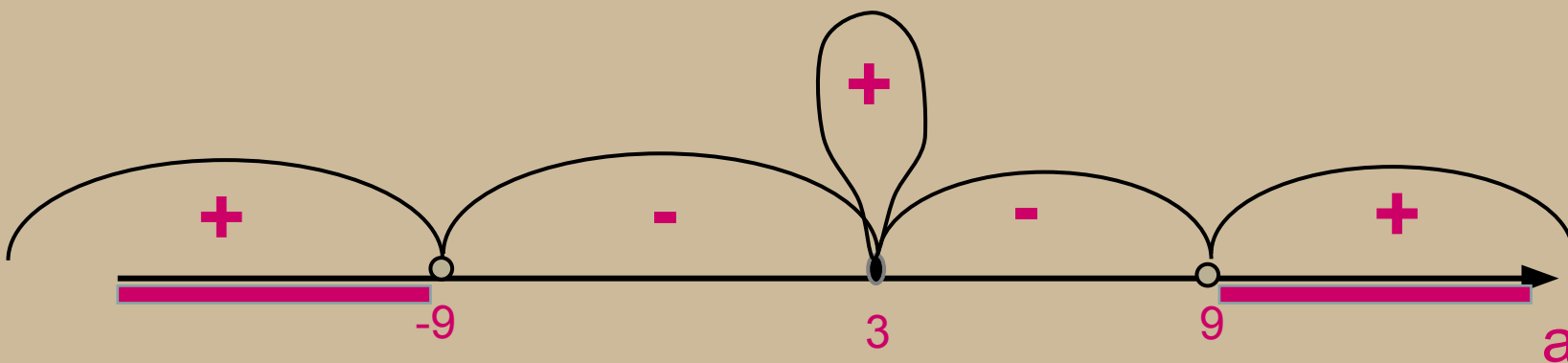
$$a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$$

$$\frac{(a - 3)^2}{(a - 9)(a + 9)} \geq 0$$

$$\begin{cases} a=3 & \begin{cases} 9^x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ a < -9 & \begin{cases} 9^x < -9 \\ \emptyset \end{cases} \\ a > 9 & \begin{cases} 9^x > 9 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup (1; \infty)$



Как решать финансовые задачи

ИЛИ «Финансовая математика»



Виды задач

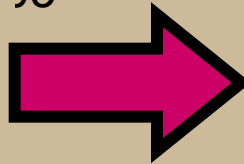
- Банки, вклады, кредиты
- Оптимальный выбор



15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

3



= ?

15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

S – сумма кредита

x_n – выплаты

k = 1,03

x_5 = 57500

$$1. \quad 9/9 \cdot S \cdot k - x_1 = 8/9 \cdot S$$

$$2. \quad 8/9 \cdot S \cdot k - x_2 = 7/9 \cdot S$$



$$8. \quad 2/9 \cdot S \cdot k - x_8 = 1/9 \cdot S$$

$$9. \quad 1/9 \cdot S \cdot k - x_9 = 0$$

15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

$$\begin{array}{l}
 1. \quad 9/9 \cdot S \cdot k - x_1 = 8/9 \cdot S \\
 2. \quad 8/9 \cdot S \cdot k - x_2 = 7/9 \cdot S \\
 3. \quad 7/9 \cdot S \cdot k - x_3 = 6/9 \cdot S \\
 4. \quad 6/9 \cdot S \cdot k - x_4 = 5/9 \cdot S \\
 +5. \quad 5/9 \cdot S \cdot k - x_5 = 4/9 \cdot S \\
 6. \quad 4/9 \cdot S \cdot k - x_6 = 3/9 \cdot S \\
 7. \quad 3/9 \cdot S \cdot k - x_7 = 2/9 \cdot S \\
 8. \quad 2/9 \cdot S \cdot k - x_8 = 1/9 \cdot S \\
 9. \quad 1/9 \cdot S \cdot k - x_9 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 S = 450000 \\
 k = 1,03
 \end{array}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 + x_9 = Z \quad (\text{сумма выплат})$$

$$9/9 + 8/9 + 7/9 + \dots + 2/9 + 1/9 = 45/9 = 5$$

$$8/9 + 7/9 + \dots + 2/9 + 1/9 = 36/9 = 4$$

$$5 \cdot S \cdot k - Z = 4 \cdot S$$

;

$$Z = 517500$$

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

1. а) x (кг алюминия)

б) $20-x$ (кг никеля)

$$\leftarrow x(\text{рабочих}) \cdot 10\text{ч} \cdot 0,1\text{кг/ч} = x$$

2. а) $\sqrt{10y}$ (кг алюминия)

б) $\sqrt{10 \cdot (20-y)}$ (кг никеля)

$$y^2 \rightarrow y$$

$$y \rightarrow \sqrt{y}$$



В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется $\sqrt{10x}$ человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется $\sqrt{10y}$ человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

1. а) x (кг алюминия)

б) $20-x$ (кг никеля)

$$\frac{x + \sqrt{10y}}{20 - x + \sqrt{10 \cdot (20 - y)}} = \frac{3}{1}$$

2. а) $\sqrt{10y}$ (кг алюминия)

б) $\sqrt{10 \cdot (20 - y)}$ (кг никеля)



В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется $\sqrt{10x}$ человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется $\sqrt{10y}$ человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

1. а) x (кг алюминия)

б) $20-x$ (кг никеля)

$$\frac{x + \sqrt{10y}}{20 - x + \sqrt{10 \cdot (20 - y)}} = \frac{3}{1}$$

2. а) $\sqrt{10y}$ (кг алюминия)

б) $\sqrt{10 \cdot (20 - y)}$ (кг никеля)



1. а) x (кг алюминия)

б) $20-x$ (кг никеля)

+

2. а) $\sqrt{10y}$ (кг алюминия)

б) $\sqrt{10 \cdot (20-y)}$ (кг никеля)

$$f(y) = 20 + \sqrt{10y} + \sqrt{10 \cdot (20-y)}$$

Найдём точку максимума функции

$$f'(y) = \frac{5}{\sqrt{10y}} - \frac{5}{\sqrt{200-10y}}$$

$$f'(y) = \frac{5(\sqrt{200-10y} - \sqrt{10y})}{\sqrt{200-10y}}$$

$$f'(y) = 0$$

$$\frac{x + \sqrt{10y}}{20 - x + \sqrt{10 \cdot (20-y)}} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{5(\sqrt{200-10y} - \sqrt{10y})}{\sqrt{200-10y}} = 0$$

$$y \neq 20$$

$$\sqrt{200-10y} - \sqrt{10y} = 0$$

$$\sqrt{200-10y} = \sqrt{10y} \quad | \wedge^2$$

$$200 - 10y = 10y$$

$$\underline{y = 10}$$



1. а) x (кг алюминия)

б) $20-x$ (кг никеля)

2. а) $\sqrt{10y}$ (кг алюминия)

б) $\sqrt{10 \cdot (20-y)}$ (кг никеля)

$$\frac{x + \sqrt{10y}}{20 - x + \sqrt{10 \cdot (20-y)}} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{x + 10}{20 - x + 10} = \frac{3}{1}$$

$$x + 10 = -3x + 90$$

$$4x = 80$$

$$\underline{x = 20}$$

$$m(\text{алюминия}) = x + \sqrt{10y} = 30 \text{ кг}$$

$$m(\text{никеля}) = 20 - x + \sqrt{10 \cdot (20-y)} = 10 \text{ кг}$$

$$m = 30 + 10 = 40 \text{ кг}$$

$$\underline{y = 10}$$

