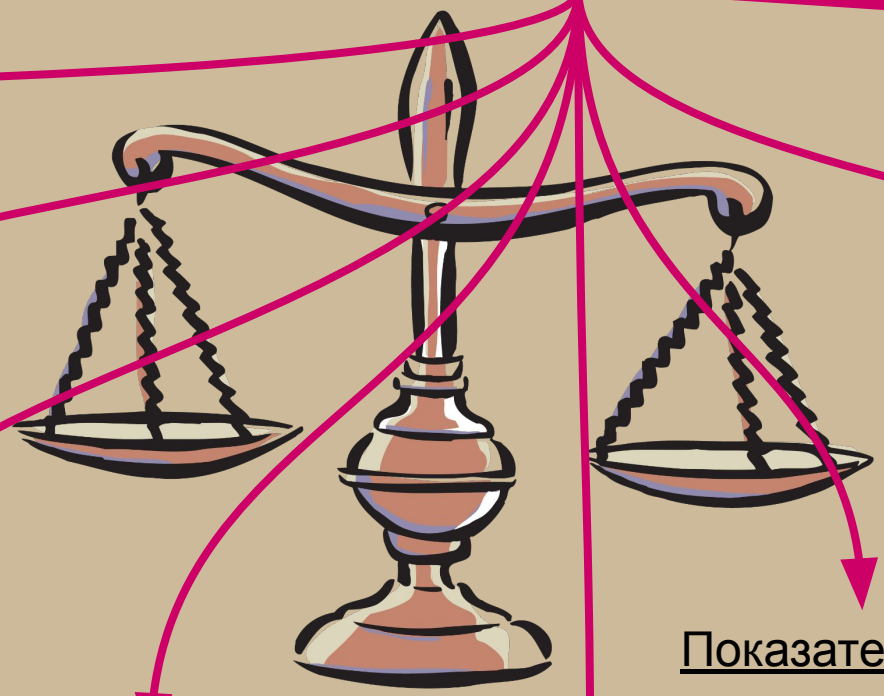
Мастер-Класс по Математике «НЕравенства»



Рациональные

Иррациональные

С модулем

Логарифмические

Смешанные

Показательные

С логарифмами по переменному основанию

ШКОЛА КВЕНТИН

Логарифмические неравенства

$$\frac{\log_3(9x) - 13}{(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4} \leq 1$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

$$\frac{\log_3 9 + \log_3 x - 13}{(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x} \leq 1$$

$$\frac{\log_3 x - 11}{(log_3 x)^2 - 4\,log_3 x} \leq 1$$

$$\log_3 x = a$$

ОДЗ:

$x > 0$

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 \neq 0$

$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x \neq 0,$

$\log_a b^k = k\log_a b$

$\log_3 x(\log_3 x - 4) \neq 0$

$x \neq 1$

$\log_3 x \neq 4$

$x \neq 3^4 \neq 81$

$$\frac{a - 11}{a^2 - 4a} \leq 1$$

ШКОЛА КВЕНТИН

$$\frac{a-11}{a^2-4a} \le 1$$

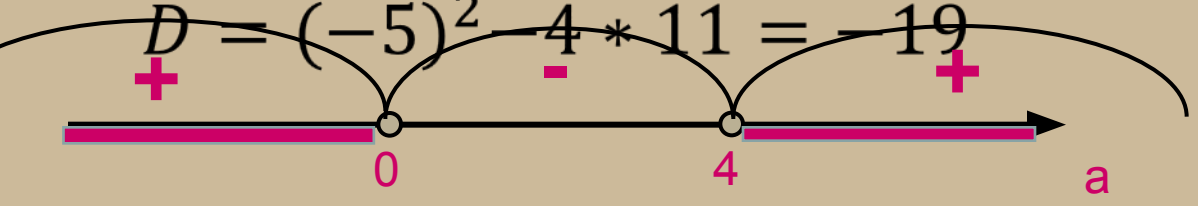
$$\frac{a-11}{a(a-4)} - 1 \le 0$$

$$\frac{-a^2+5a-11}{a(a-4)} \le 0$$

$$\frac{a^2-5a+11}{a(a-4)} \ge 0$$

$$a^2-5a+11=0$$

$$D=(-5)^2-4*11=-19$$



$$\left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_3 x<0 \\ \log_3 x>4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x<\log_3 1 \\ \log_3 x>\log_3 81 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>81 \end{array}\right.$$

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Ответ: x∈ (0;1)∪(81;+∞)

ШКОЛА КВЕНТИН

Показательные неравенства

$$\frac{6*9^{x-1}-10}{81^{x-\frac{1}{2}}-9} \leq 1$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{6 \cdot 9^x \cdot \frac{1}{9} - 10}{81^x \cdot \frac{1}{9} - 9} \leq 1$$

$$9^x = a$$

$$\frac{\frac{2}{3}a - 10}{\frac{1}{9}a^2 - 9} \leq 1$$

$$\frac{\frac{2}{3}(a-15)}{\frac{1}{9}(a^2-81)} \leq 1$$

$$\frac{6(a-15)}{a^2-81} - 1 \leq 0$$

$$\frac{6a-90-a^2+81}{a^2-81} \leq 0$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\frac{-a^2+6a-9}{(a-9)(a+9)} \leq 0$$

$$\frac{a^2-6a+9}{(a-9)(a+9)} \geq 0$$

$$\frac{a^2-6a+9}{(a-9)(a+9)} \geq 0$$

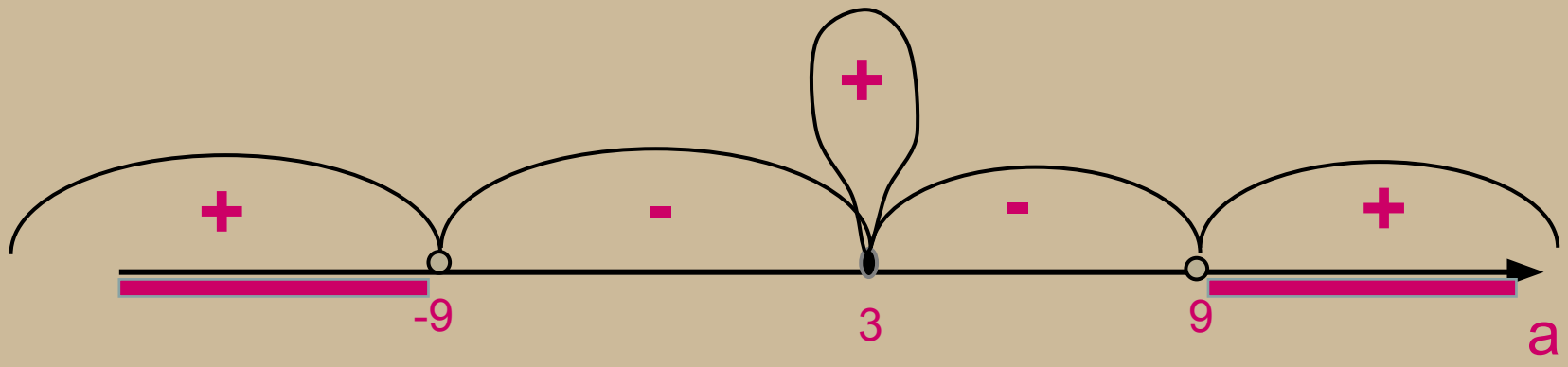
$$a^2-6a+9=0$$

$$D=(-6)^2-4*9=0$$

$$\frac{(a-3)^2}{(a-9)(a+9)} \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a<-9 \\ a>9 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 9^x=3 \\ 9^x<-9 \\ 9^x>9 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ \varnothing \\ x>1 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (1;\infty)$



Как решать финансовые задачи

или «Финансовая математика»

Виды задач

- Банки, вклады, кредиты
- Оптимальный выбор

ШКОЛА КВЕНТИН

15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

= ?

15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

S – сумма кредита

$\mathbf{x_n}$ – выплаты

k = 1,03

$\mathbf{x_5}$ = 57500

1. $9/9 \cdot S \cdot k - x_1 = 8/9 \cdot S$
2. $8/9 \cdot S \cdot k - x_2 = 7/9 \cdot S$

8. $2/9 \cdot S \cdot k - x_8 = 1/9 \cdot S$
9. $1/9 \cdot S \cdot k - x_9 = 0$

15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

1. $9/9 \cdot S \cdot k - x_1 = 8/9 \cdot S$
2. $8/9 \cdot S \cdot k - x_2 = 7/9 \cdot S$
3. $7/9 \cdot S \cdot k - x_3 = 6/9 \cdot S$
4. $6/9 \cdot S \cdot k - x_4 = 5/9 \cdot S$
5. $5/9 \cdot S \cdot k - x_5 = 4/9 \cdot S$
6. $4/9 \cdot S \cdot k - x_6 = 3/9 \cdot S$
7. $3/9 \cdot S \cdot k - x_7 = 2/9 \cdot S$
8. $2/9 \cdot S \cdot k - x_8 = 1/9 \cdot S$
9. $1/9 \cdot S \cdot k - x_9 = 0$

+

$S = 450000$

$k = 1{,}03$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_8 + x_9 = Z$ (сумма выплат)

$9/9 + 8/9 + 7/9 + \ldots + 2/9 + 1/9 = 45/9 = 5$

$8/9 + 7/9 + \ldots + 2/9 + 1/9 = 36/9 = 4$

$$5 \cdot S \cdot k - Z = 4 \cdot S$$

$Z = 517000$

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи *x* кг алюминия в день требуется человеко-часов труда, а для добычи *y* кг никеля в день требуется человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

1. а) x *(кг алюминия)*

б) $20-x$ *(кг никеля)*

$\mathbf{x}$*(рабочих)* $\cdot$ **10***ч* $\cdot$ **0,1***кг/ч* $= \mathbf{x}$

2. а) $\sqrt{10y}$ *(кг алюминия)*

б) $\sqrt{10\cdot(20-y)}$ *(кг никеля)*

$\mathbf{y^2 \to y}$

$\mathbf{y \to \sqrt{y}}$

ШКОЛА КВЕНТИН

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи *x* кг алюминия в день требуется человеко-часов труда, а для добычи *y* кг никеля в день требуется человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

1. а) x *(кг алюминия)*

   б) $20-x$ *(кг никеля)*

2. а) $\sqrt{10y}$ *(кг алюминия)*

   б) $\sqrt{10\cdot(20-y)}$ *(кг никеля)*

$$\frac{x+\sqrt{10y}}{20-x+\sqrt{10\cdot(20-y)}}=\frac{3}{1}$$

ШКОЛА КВЕНТИН

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи *x* кг алюминия в день требуется человеко-часов труда, а для добычи *y* кг никеля в день требуется человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

1. а) x *(кг алюминия)*

   б) $20-x$ *(кг никеля)*

$$\frac{x+\sqrt{10y}}{20-x+\sqrt{10\cdot(20-y)}}=\frac{3}{1}$$

2. а) $\sqrt{10y}$ *(кг алюминия)*

   б) $\sqrt{10\cdot(20-y)}$ *(кг никеля)*

ШКОЛА КВЕНТИН

1. а) x *(кг алюминия)*

б) $20-x$ *(кг никеля)*

+

2. а) $\sqrt{10y}$ *(кг алюминия)*

б) $\sqrt{10\cdot(20-y)}$ *(кг никеля)*

$$f(y) = 20 + \sqrt{10y} + \sqrt{10\cdot(20-y)}$$

Найдём точку максимума функции

$$f'(y) = \frac{5}{\sqrt{10y}} - \frac{5}{\sqrt{200-10y}}$$

$$f'(y) = \frac{5(\sqrt{200-10y} - \sqrt{10y})}{\sqrt{200-10y}}$$

$f'(y) = 0$

$$\boxed{\frac{x+\sqrt{10y}}{20-x+\sqrt{10\cdot(20-y)}} = \frac{3}{1}}$$

$$\frac{5(\sqrt{200-10y} - \sqrt{10y})}{\sqrt{200-10y}} = 0$$

$y \neq 20$

$\sqrt{200 - 10y} - \sqrt{10y} = 0$

$\sqrt{200 - 10y} = \sqrt{10y} \mid ^2$

$200 - 10y = 10y$

y = 10

ШКОЛА КВЕНТИН

1. а) x *(кг алюминия)*

б) $20-x$ *(кг никеля)*

2. а) $\sqrt{10y}$ *(кг алюминия)*

б) $\sqrt{10\cdot(20-y)}$ *(кг никеля)*

$$\boxed{\frac{x+\sqrt{10y}}{20-x+\sqrt{10\cdot(20-y)}} = \frac{3}{1}}$$

$$\frac{x+10}{20-x+10} = \frac{3}{1}$$

$x + 10 = -3x + 90$

$4x = 80$

$\underline{x = 20}$

$\underline{y = 10}$

m(алюминия) = $x + \sqrt{10y}$ = 30 кг

m(никеля) = $20 - x + \sqrt{10\cdot(20-y)}$ = 10 кг

m = 30 + 10 = 40 *кг*

ШКОЛА КВЕНТИН