



ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРОМ НА ОГЭ

Выполнение задания 23 (ОГЭ по математике)

Задача 23 – это задача с параметром,
задача высокого уровня сложности.

В последнее время ее называют

«задачей на построение графика».

Чтобы выполнить это задание необходимо уметь:

- Выполнять преобразования алгебраических выражений (приводить подобные слагаемые, раскладывать выражения на множители, сокращать дроби; находить область допустимых значений переменной)
- Решать уравнения, неравенства и системы (линейные и второй степени)
- Строить и читать графики функций (линейной, квадратичной, обратно-пропорциональной, модуля, кусочной функции), уметь преобразовывать графики функции $y = f(x)$ в графики $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$, модуль в кусочную функцию.
- Строить и исследовать простейшие математические модели (исследовать уравнение на предмет числа корней, исследовать поведение линейной функции в зависимости от значений коэффициентов, выстраивать алгоритм, позволяющий решить задачу с параметром)

Основным условием получения положительной оценки является верное построение графика.

Верное построение графика включает в себя следующее:

- Правильно подобранный и отображенный на рисунке масштаб
- Содержательную таблицу значений или объяснение построения графика
- Выколотую точку (точки), обозначенную в соответствии с ее координатами



Можно условно разбить все задачи 23 на два типа:

1. Задачи, в которых требуется построить график и затем найти значения параметра
2. Задачи, в которых требуется найти значения параметра и затем построить график.

Сегодня мы рассмотрим задачи 23, относящиеся к первому типу
(задачи на построение графика).

Задачи на построение графика, в свою очередь, также можно разбить на несколько групп:

- Построение графика дробно-рациональной функции
- Построение графика кусочно-гладкой функции
- Построение графика функции, содержащей модуль

Рассмотрим задачи первой группы.

К ней относятся те задачи, в которых нужно сократить дробь и построить график функции, учитывая, что область определения начальной и упрощенной функции, как правило, различаются.

Задания этой группы решаются по следующему алгоритму:

- 1) Разложить на множители числитель и знаменатель дроби, входящей в уравнение функции
- 2) Выписать область определения функции (ОДЗ)
- 3) Сократить дробь
- 4) Построить график получившегося уравнения и учесть ОДЗ (то есть отметить «выколотые» точки)
- 5) Пользуясь графиком, найти те значения параметра, которые спрашиваются в условии

ЗАДАЧА № 1

Постройте график функции

$y = \frac{x^3 - x}{x}$ и определите, при каких значениях p прямая

$y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

РЕШЕНИЕ:

Сначала построим график данной функции.

Область определения функции $y = \frac{x^3 - x}{x}$ – множество всех чисел, кроме 0.

Чтобы построить график функции $y = \frac{x^3 - x}{x}$, необходимо преобразовать дробь $\frac{x^3 - x}{x}$.

Разложим числитель на множители.

После вынесения за скобки общего множителя x , получим: $y = \frac{x(x^2 - 1)}{x}$.

Сократим дробь на x , получим: $y = x^2 - 1$.

Графиком функции $y = x^2 - 1$ является парабола :

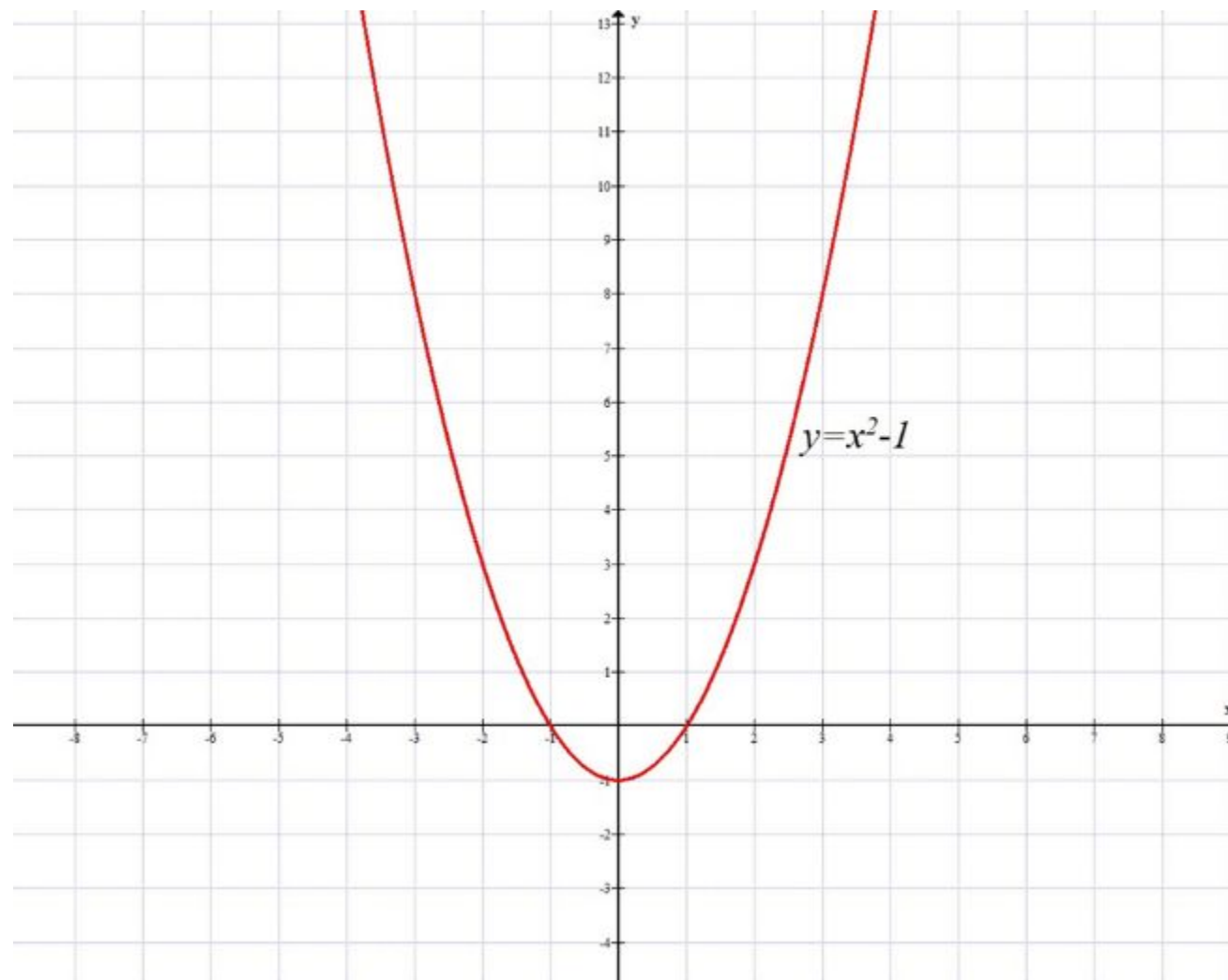
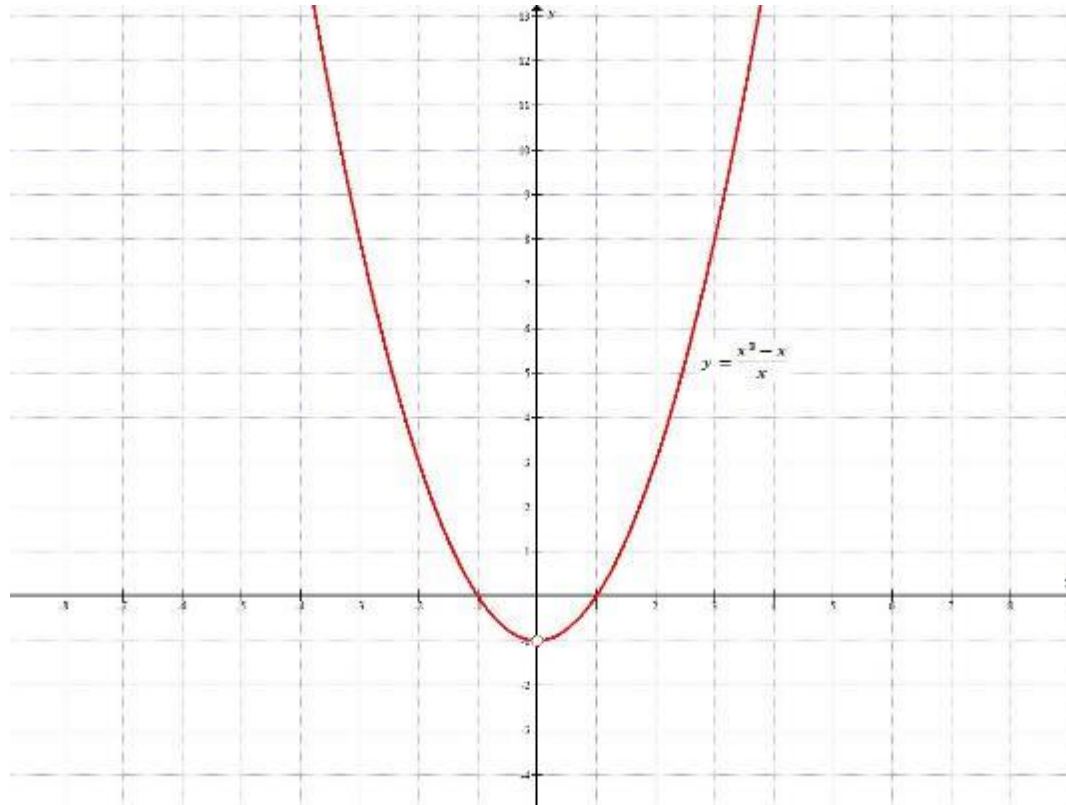


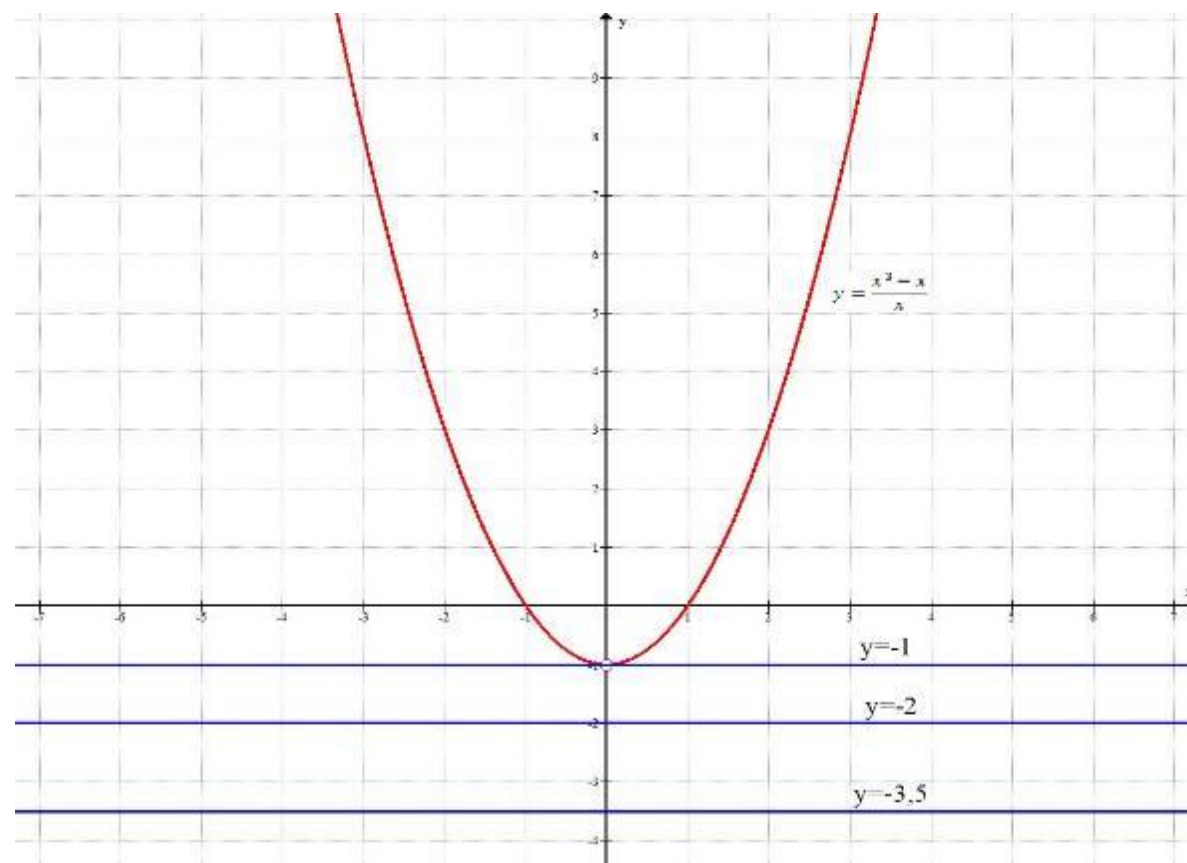
График исходной функции получается из параболы $y = x^2 - 1$ удалением точки с абсциссой 0; $y(0) = -1$.

Таким образом, графиком функции $y = \frac{x^3 - x}{x}$ является та же парабола, но с «выколотой» точкой $(0; -1)$:



Прямая $y = p$ параллельна оси абсцисс.

Она имеет с графиком или две общие точки (при $p > -1$), или не имеет с графиком точек пересечения (при $p \leq -1$):



Ответ: при $p \leq -1$.

ЗАДАЧА № 2.

Постройте график функции

$$y = 2 - \frac{x^4 + 3x^3}{x^2 + 3x}$$

и определите , при каких значениях t прямая

$y = t$ имеет с этим графиком ровно две общих точки.

РЕШЕНИЕ:

Сначала построим график данной функции.

Найдём ОДЗ: $x^2 + 3x = 0$; $x(x + 3) = 0$; $x = 0$ или $x = -3$

Область определения функции $y = 2 - \frac{x^4 + 3x^3}{x^2 + 3x}$ — множество всех чисел, кроме -3 и 0 .

Чтобы построить график функции $y = 2 - \frac{x^4 + 3x^3}{x^2 + 3x}$, необходимо преобразовать

выражение $2 - \frac{x^4 + 3x^3}{x^2 + 3x}$.

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители.

После вынесения за скобки общего множителя x^3 в числителе и x в знаменателе, получим: $y = 2 - \frac{x^3(x+3)}{x(x+3)}$.

Сократим дробь на $x(x + 3)$, получим: $y = 2 - x^2$.

Графиком функции $y = 2 - x^2$ является парабола :

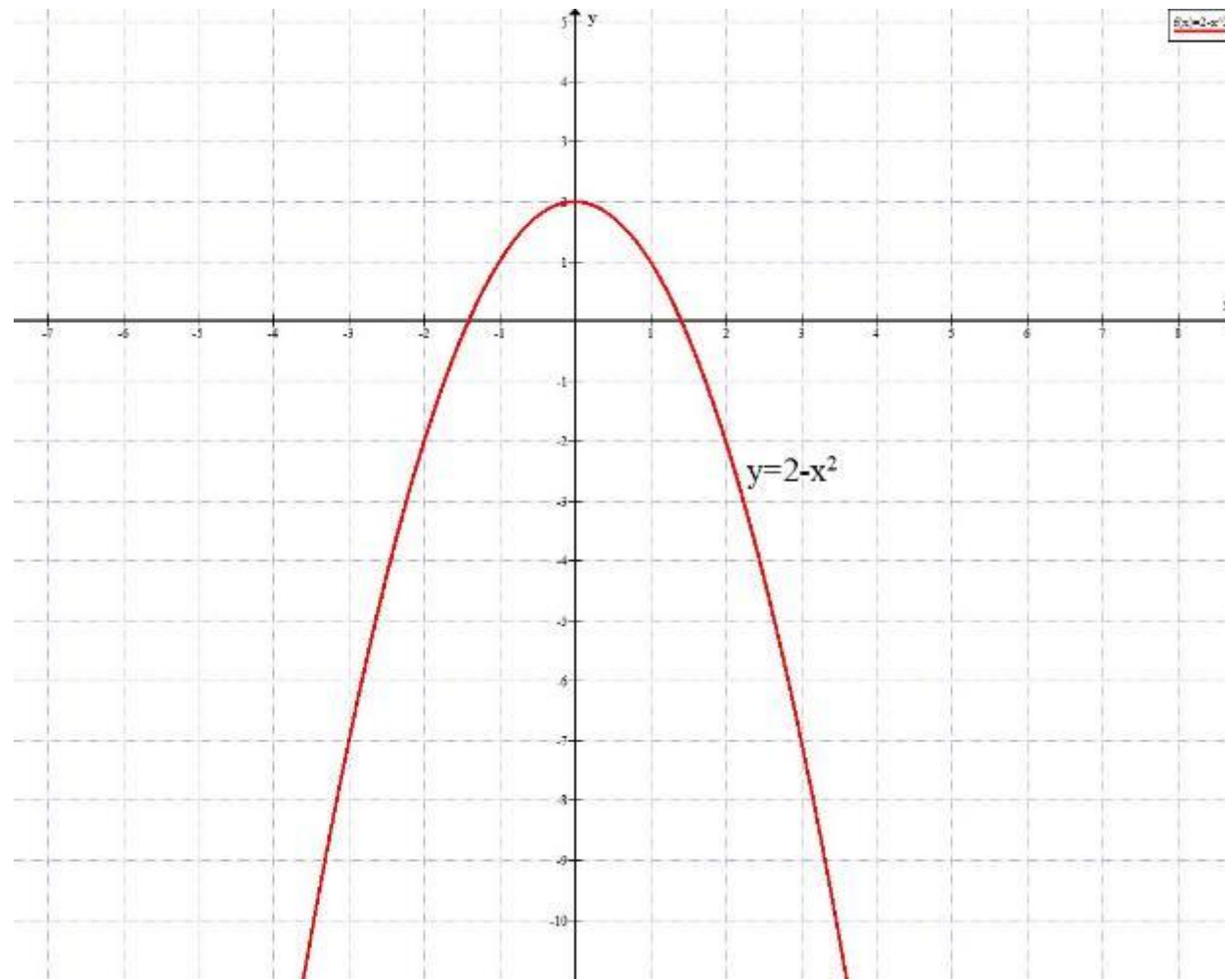


График исходной функции получается

из параболы $y = 2 - x^2$

удалением точек с абсциссой 0 и -3;

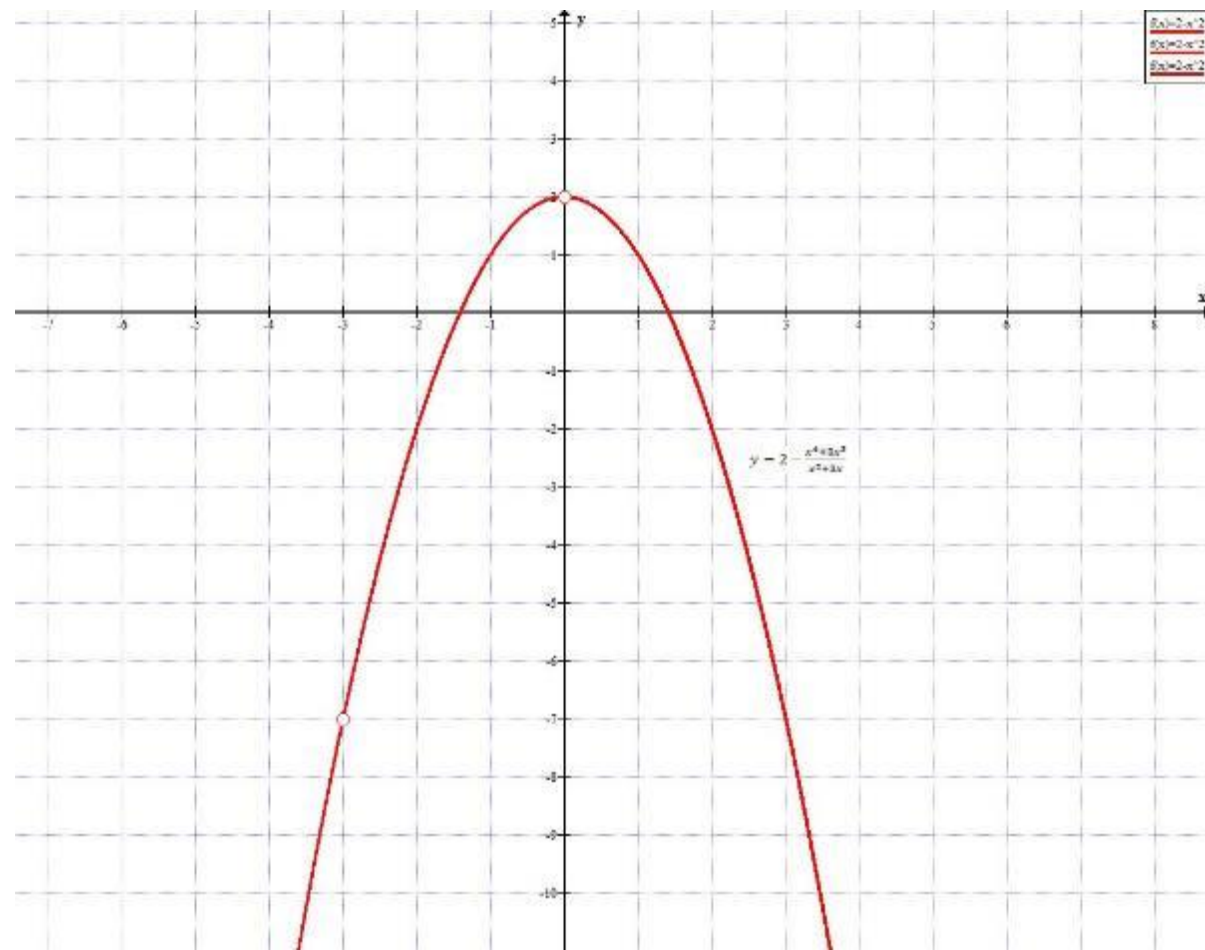
$$y(0) = 2; y(-3) = -7$$

Таким образом, графиком функции

$$y = 2 - \frac{x^4 + 3x^3}{x^2 + 3x} \text{ является та же}$$

парабола, но с «выколотыми»

точками $(0; 2)$ и $(-3; -7)$:



Прямая $y = t$ параллельна оси абсцисс.

Она имеет с графиком

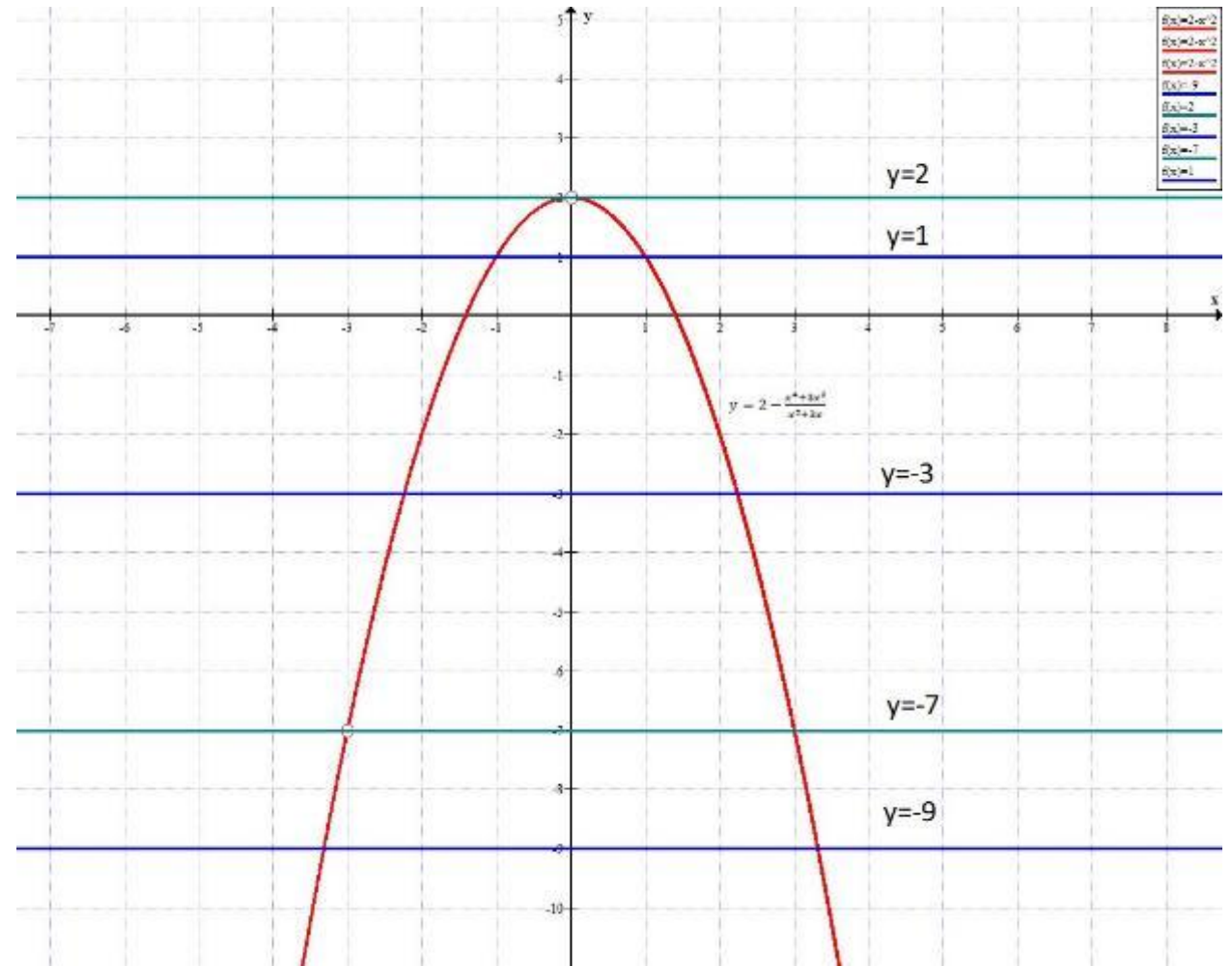
одну (при $t = 2$ и $t = -7$),

две общие точки

(при $t < -7$ и $-7 < t < 2$),

или не имеет с графиком

точек пересечения (при $t > 2$):



Ответ : при при $t < -7$ и $-7 < t < 2$.

ЗАДАЧА № 3

Постройте график функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$

и определите, при каких значениях m

прямая $y = m$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

РЕШЕНИЕ:

Сначала построим график данной функции.

Область определения функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$ — множество всех чисел, кроме -2 .

Чтобы построить график функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$, необходимо преобразовать выражение $\frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$.

Разложим в числителе дроби на множители вторую скобку. Для этого найдём корни квадратного трёхчлена $x^2 + 7x + 10$ $x_1 = -2; x_2 = -5$

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

Исходная дробь примет вид: $\frac{(x+1)(x+2)(x+5)}{x+2}$

Сократим дробь на $(x + 2)$, получим: $y = (x + 1)(x + 5)$.

Раскрыв скобки, имеем: $y = x^2 + 6x + 5$.

Графиком функции $y = x^2 + 6x + 5$ является парабола :

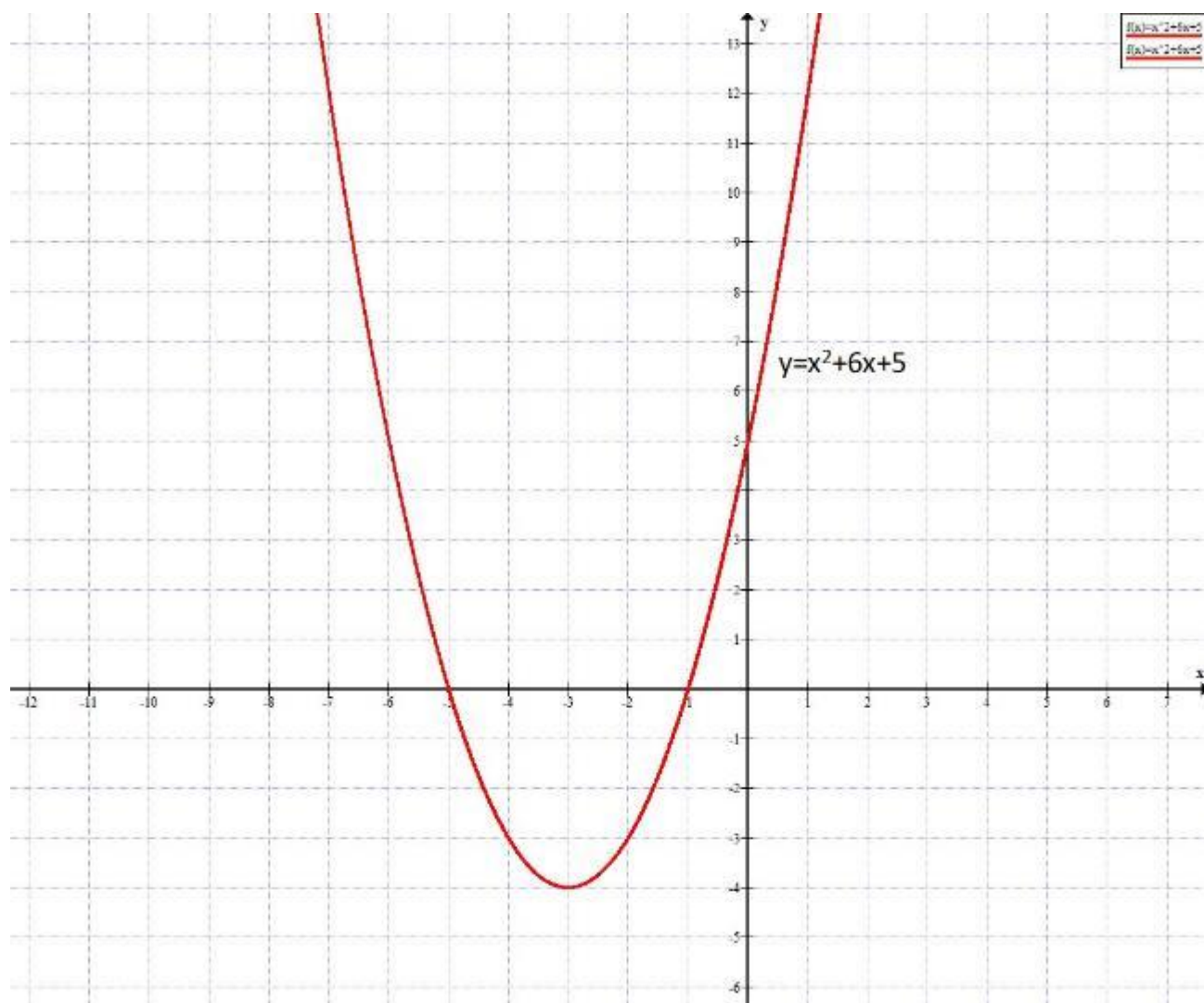


График исходной функции получается

из параболы $y = x^2 + 6x + 5$

удалением точки с

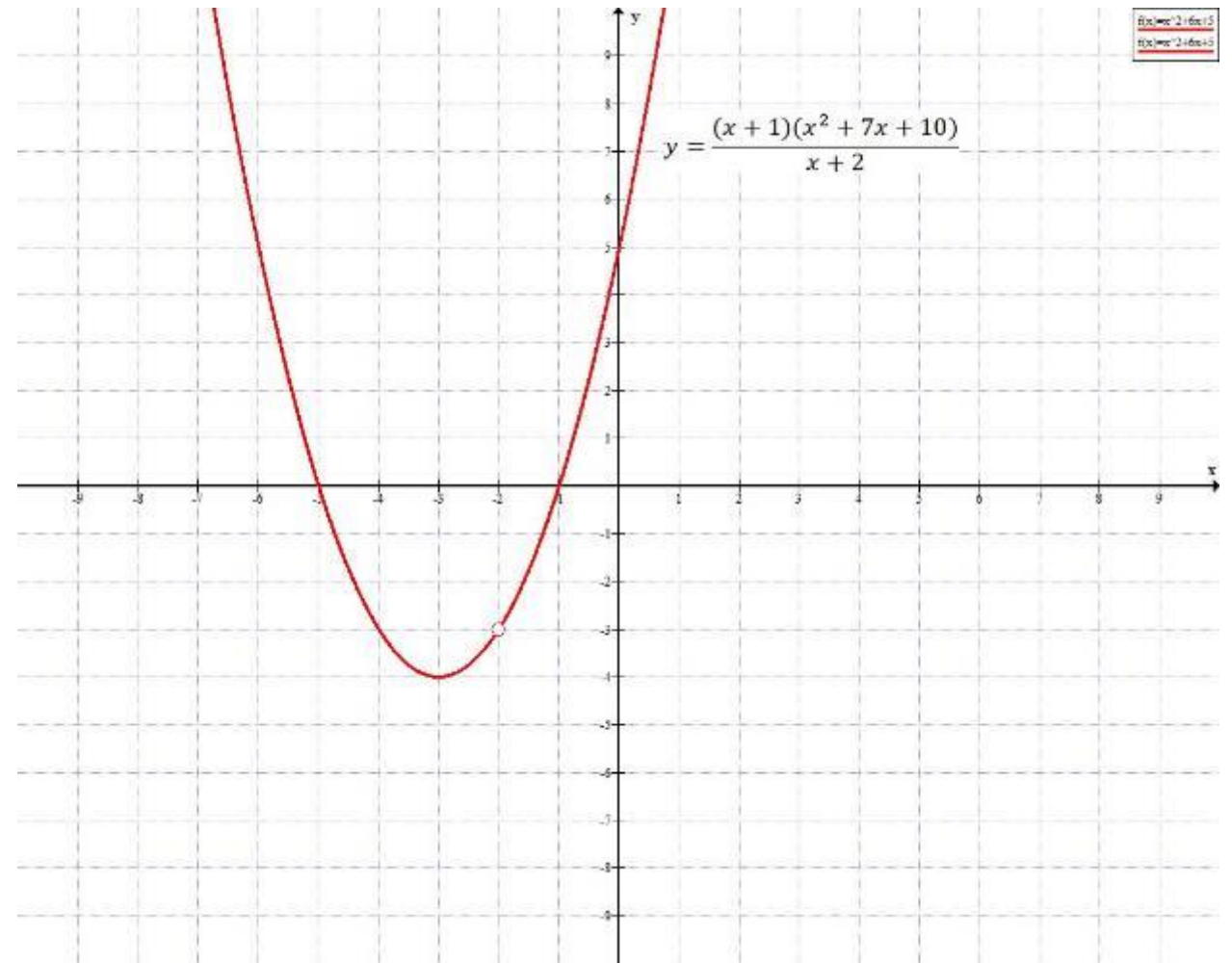
абсциссой -2 ; $y(-2) = -3$.

Таким образом, графиком функции

$y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$ является

та же парабола, но

с «выколотой» точкой $(-2; -3)$:



Прямая $y = t$ параллельна оси абсцисс.

Она имеет с графиком

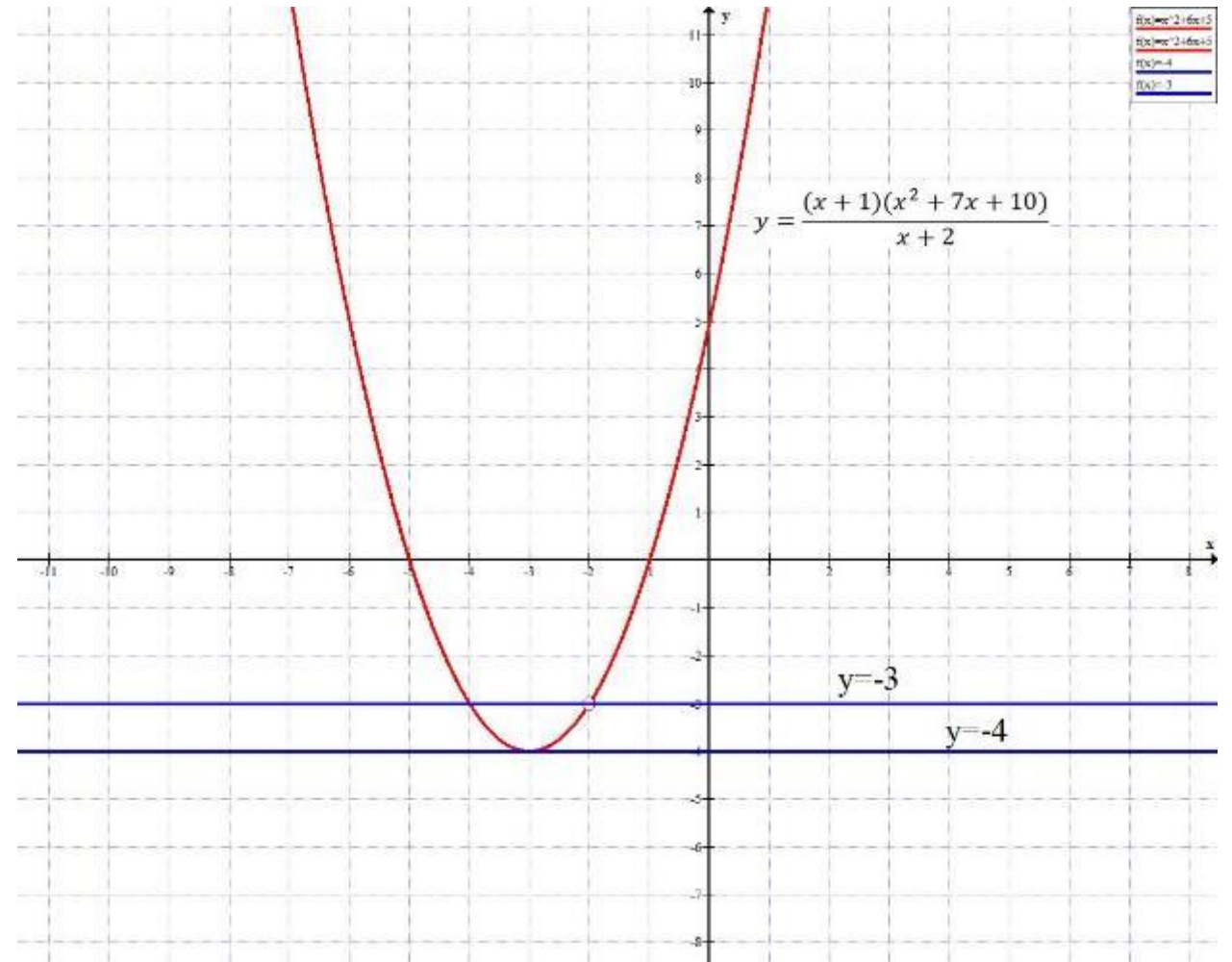
одну (при $t = -4$ и $t = -3$),

две общие точки

(при $t > -3$ и $-4 < t < -3$),

или не имеет с графиком

точек пересечения (при $t < -4$):



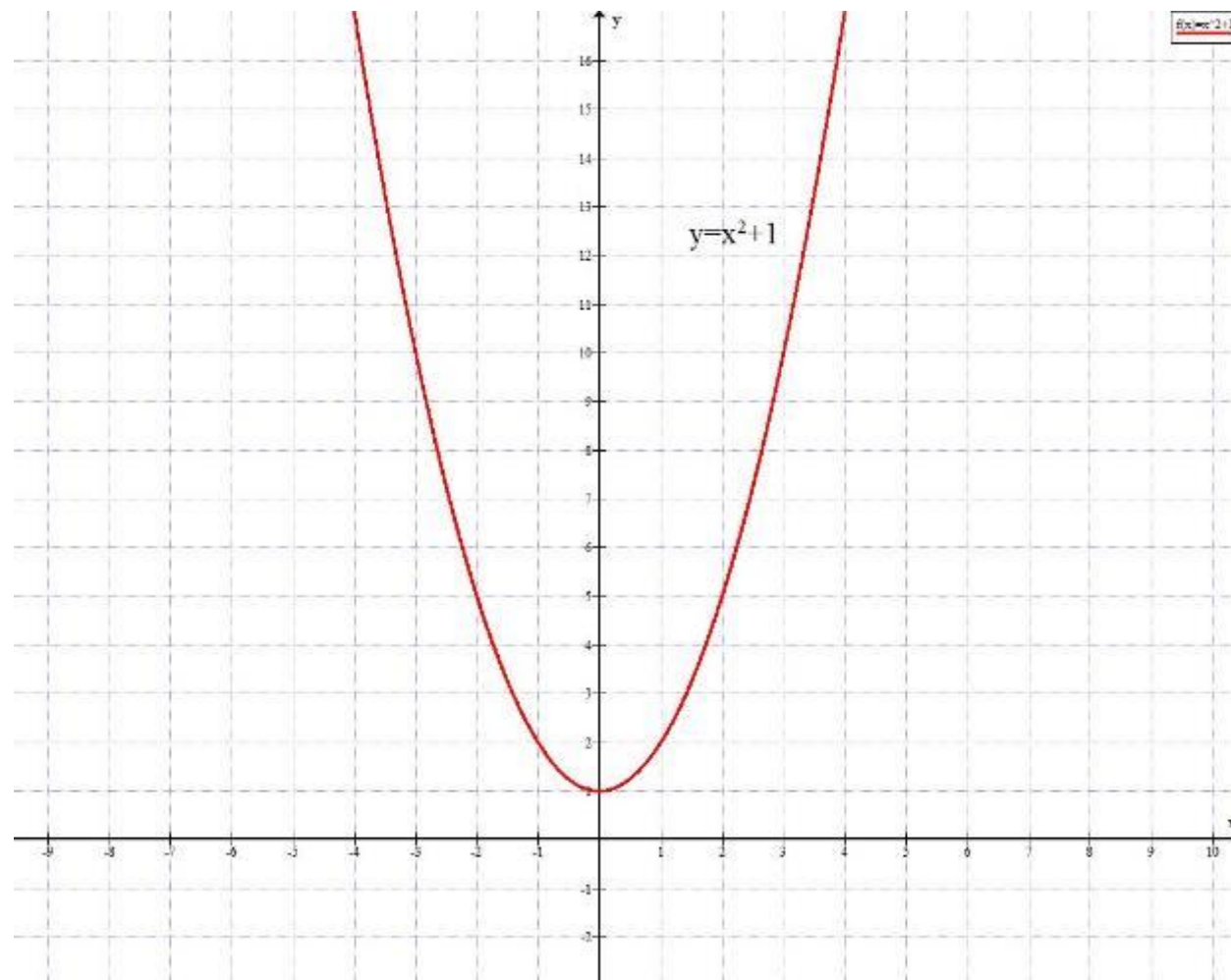
Ответ : при $t = -4$ и $t = -3$.

ЗАДАЧА № 4

Найдите все значения p , при каждом из которых прямая $y = px$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 1$ ровно одну общую точку.
Постройте этот график и все такие прямые.

РЕШЕНИЕ:

Сначала построим график данной функции. Графиком функции $y = x^2 + 1$ является парабола, которая получена из параболы $y = x^2$ в результате сдвига вдоль оси OY на 1 единичный отрезок вверх:



Прямая $y = px$ проходит через начало координат и имеет с графиком функции $y = x^2 + 1$ ровно одну общую точку, если она касается этой параболы. Условие касания реализуется, когда уравнение $x^2 + 1 = px$ имеет один корень. Уравнение квадратное, оно имеет один корень, если дискриминант квадратного уравнения $x^2 - px + 1 = 0$ $D = p^2 - 4$ равен нулю. Получаем: $p^2 = 4$; $p = \pm 2$.

Таким образом, прямая $y = px$, проходящая через начало координат, имеет с графиком функции $y = x^2 + 1$ ровно одну общую точку при $p = \pm 2$, т.е. таких прямых две: $y = 2x$ и $y = -2x$.

Чтобы найти координаты точек касания каждой прямой с параболой, подставим значения параметра $p = \pm 2$ в уравнение $x^2 - px + 1 = 0$.

Решим два квадратных уравнения :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

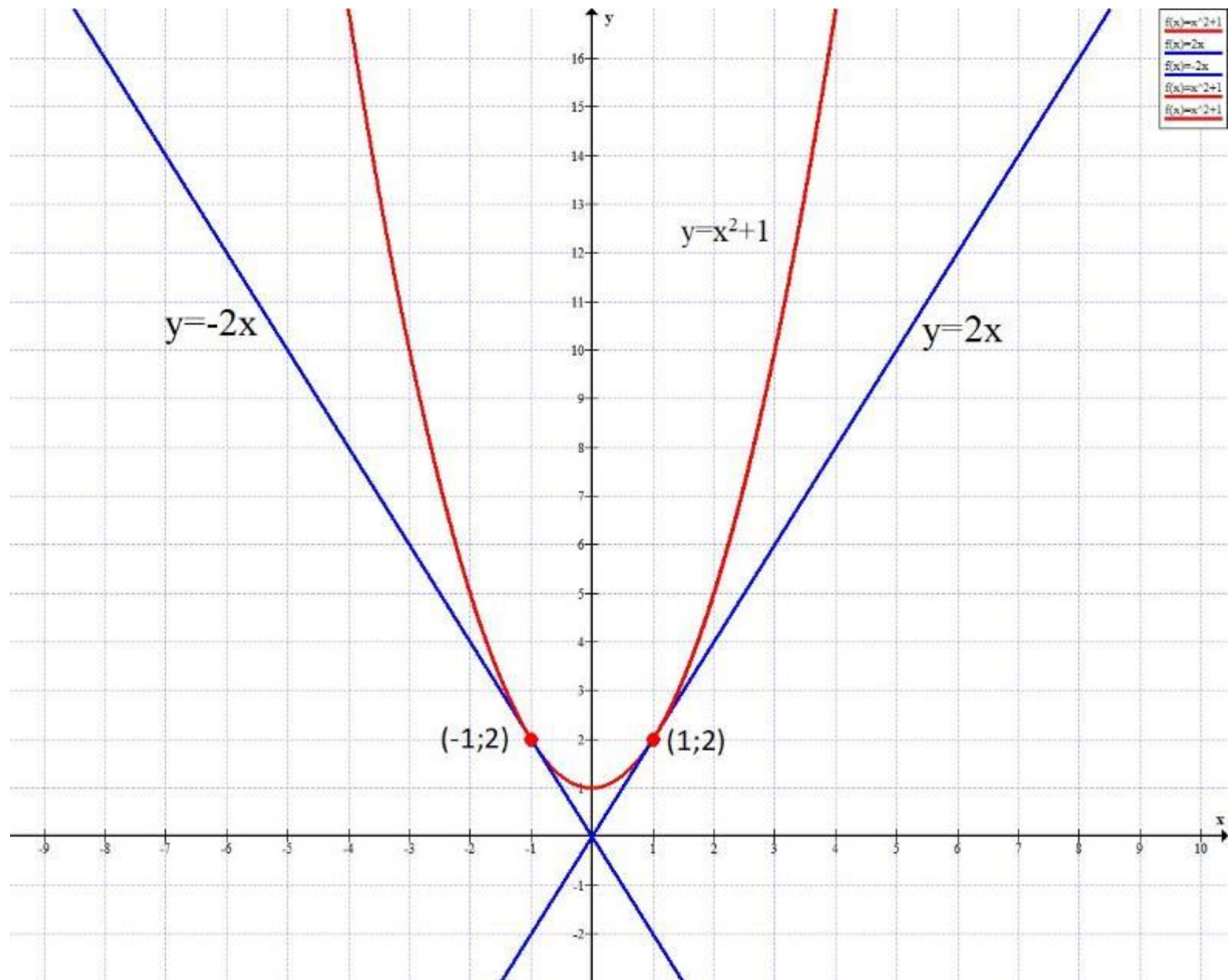
$$x = 1$$

$$y(1) = 2 \quad (1; 2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$y(-1) = 2 \quad (-1; 2)$$



Ответ: $p = \pm 2$

ЗАДАЧА № 5

Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 6,25)(x+1)}{-1-x}$

и определите, при каких значениях

параметра k прямая $y = kx$ имеет

с этим графиком ровно одну общую точку.

Сначала построим график данной функции.

Область определения функции $y = \frac{(x^2+6,25)(x+1)}{-1-x}$ — множество всех чисел, кроме -1 .

Чтобы построить график функции $y = \frac{(x^2+6,25)(x+1)}{-1-x}$, необходимо преобразовать выражение $\frac{(x^2+6,25)(x+1)}{-1-x}$.

Сократим дробь на $(x + 1)$, получим: $y = -(x^2 + 6,25)$

Раскрыв скобки, имеем: $y = -x^2 - 6,25$.

Графиком функции $y = -x^2 - 6,25$ является парабола,

которая получена из параболы $y = -x^2$ в результате сдвига вдоль оси ОУ на 6,25 единичных отрезков вниз:

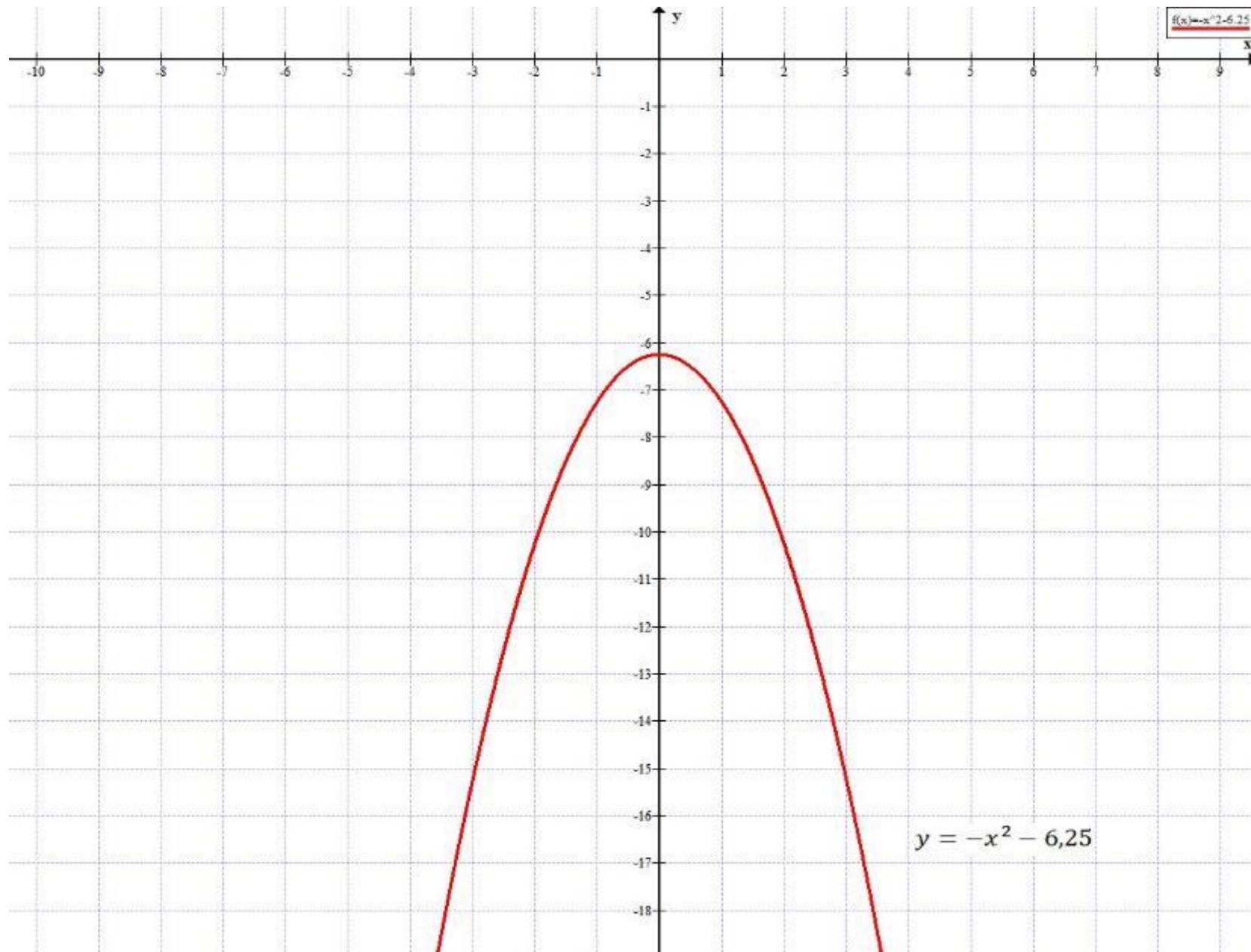


График исходной функции получается

из параболы $y = -x^2 - 6,25$ удалением точки с

абсциссой -1 ; $y(-1) = -7,25$.

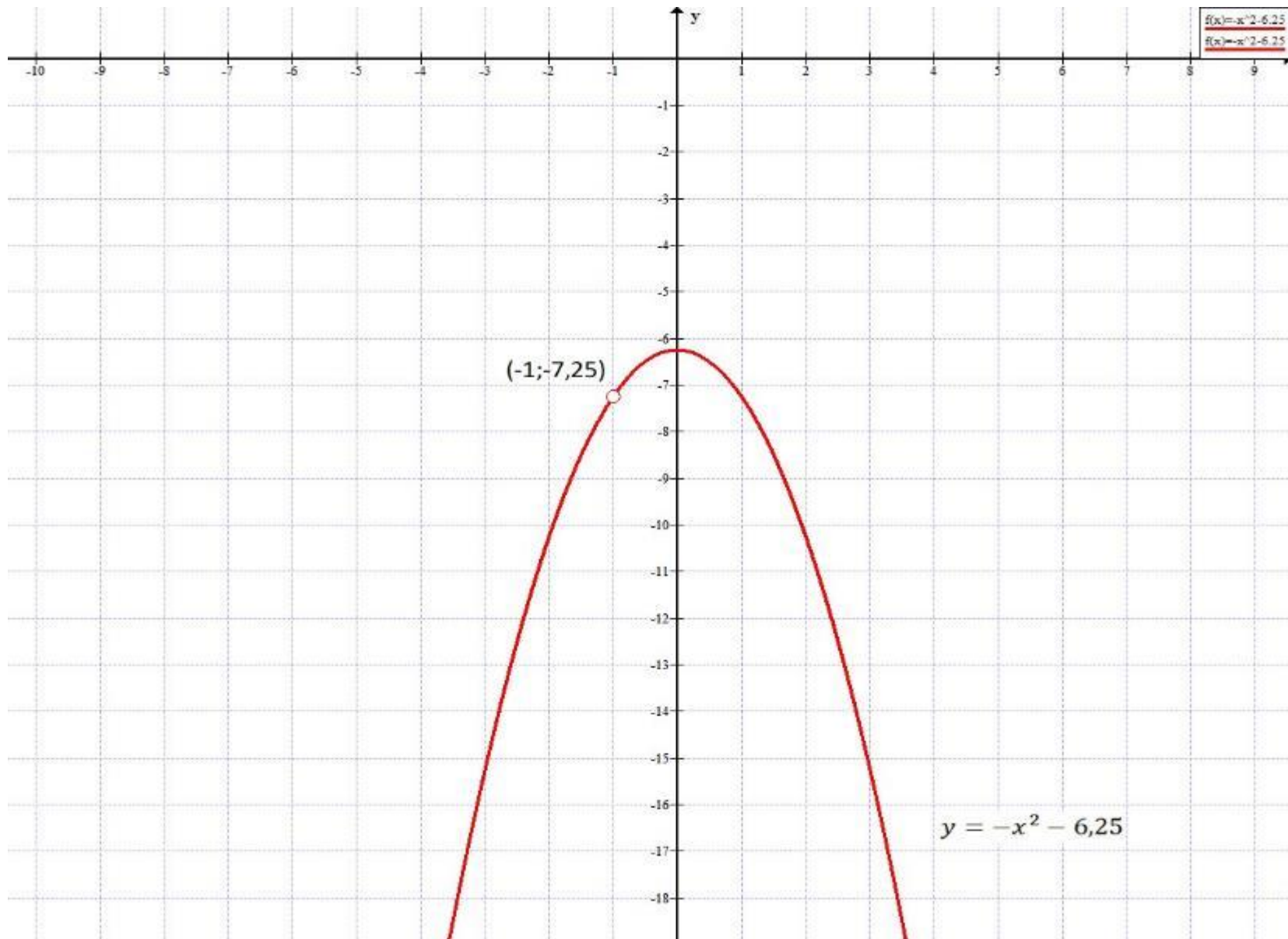
Таким образом, графиком функции

$$y = \frac{(x^2+6,25)(x+1)}{-1-x} -$$

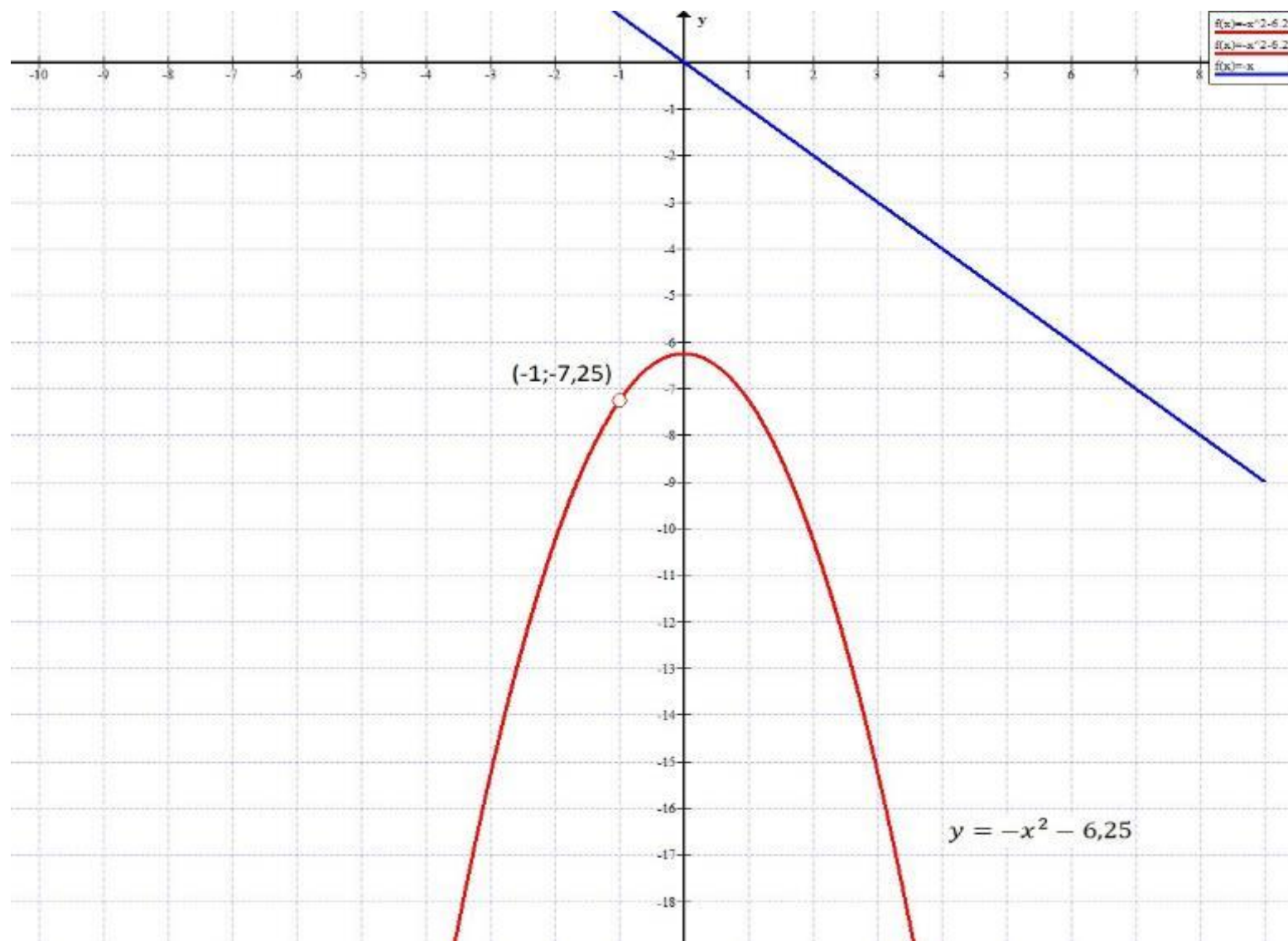
является та же парабола, но с «выколотовой» точкой $(-1;-7,25)$.

Ветви параболы направлены вниз,

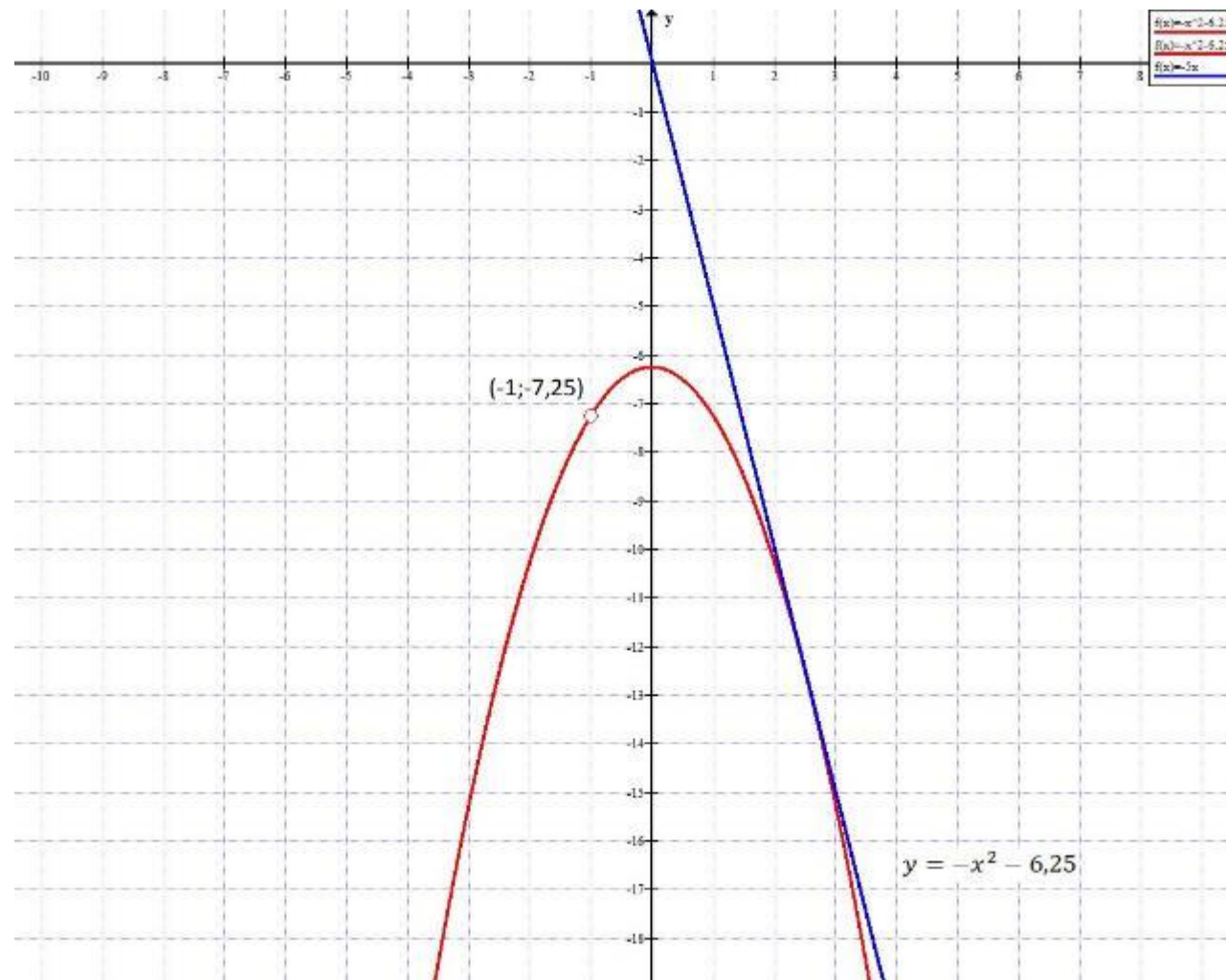
вершиной является точка $(0; -6,25)$:



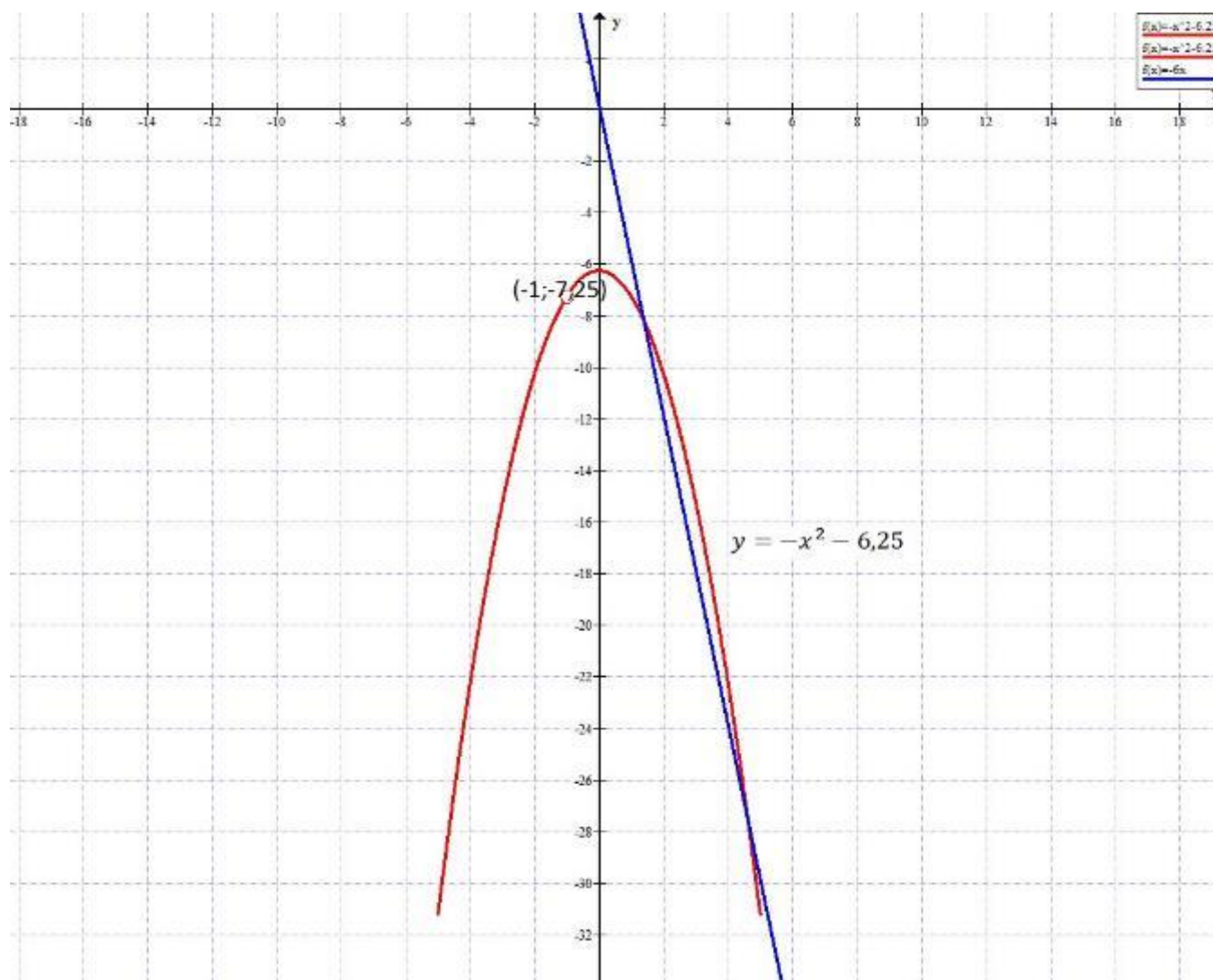
Прямая $y = kx$ может эту параболу не пересекать



может касаться её (одна точка
пересечения)



может иметь две общих точки (две точки пересечения)



Чтобы прямая $y = kx$ имела с этим графиком ровно одну общую точку, нужно чтобы

1) или прямая $y = kx$ касалась параболы (и абсцисса точки касания не равна -1),

2) или прямая $y = kx$ пересекает параболу в двух точках так, чтобы у одной из них абсцисса была равна -1.

1) Условие касания реализуется, когда уравнение $-x^2 - 6,25 = kx$ имеет один корень. Уравнение квадратное, оно имеет один корень, если дискриминант этого квадратного уравнения

$$-x^2 - kx - 6,25 = 0 \quad D = k^2 - 25 \text{ равен нулю. Получаем: } k^2 = 25; k = \pm 5.$$

Таким образом, прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, имеет с графиком функции $y = -x^2 - 6,25$ ровно одну общую точку при $k = \pm 5$, т.е. таких прямых две:

$$y = 5x \text{ и } y = -5x.$$

Чтобы найти координаты точек касания каждой прямой с параболой, подставим значения параметра $k = \pm 5$ в уравнение $-x^2 - kx - 6,25 = 0$. Решим два квадратных уравнения :

$$-x^2 - 5x - 6,25 = 0$$

$$x = -2,5$$

$$y(-2,5) = -12,5 \quad (-2,5; -12,5)$$

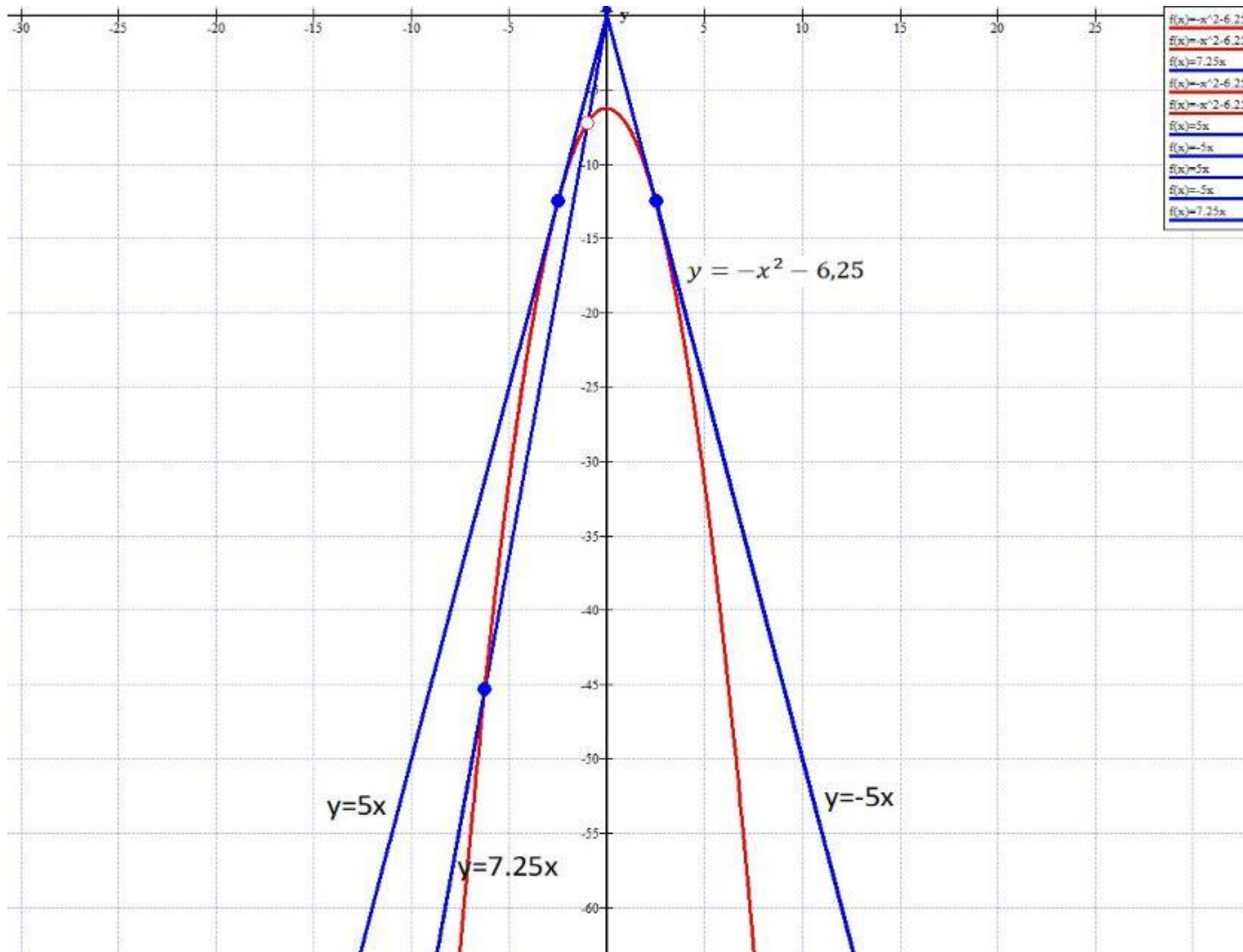
$$-x^2 + 5x - 6,25 = 0$$

$$x = 2,5$$

$$y(2,5) = -12,5 \quad (2,5; -12,5)$$

2) Для рассмотрения второго случая подставим $x = -1$

в уравнение $-x^2 - 6,25 = kx$ и определим значение параметра k : $k = 7,25$.



Ответ: $k = 5$; $k = -5$; $k = 7,25$