ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРОМ НА ОГЭ

Выполнение задания 23
(ОГЭ по математике)

Задача 23 – это задача с параметром,

задача высокого уровня сложности.

В последнее время ее называют

<u>«задачей на построение графика».</u>

Чтобы выполнить это задание необходимо уметь:

- Выполнять преобразования алгебраических выражений (приводить подобные слагаемые, раскладывать выражения на множители, сокращать дроби; находить область допустимых значений переменной)
- Решать уравнения, неравенства и системы (линейные и второй степени)
- Строить и читать графики функций (линейной, квадратичной, обратно-пропорциональной, модуля, кусочной функции), уметь преобразовывать графики функции $y = f(x)$ в графики $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$, модуль в кусочную функцию.
- Строить и исследовать простейшие математические модели (исследовать уравнение на предмет числа корней, исследовать поведение линейной функции в зависимости от значений коэффициентов, выстраивать алгоритм, позволяющий решить задачу с параметром)

Основным условием получения положительной оценки является верное построение графика.

Верное построение графика включает в себя следующее:

- Правильно подобранный и отображенный на рисунке масштаб
- Содержательную таблицу значений или объяснение построения графика
- Выколотую точку (точки), обозначенную в соответствии с ее координатами

Можно условно разбить все задачи 23 на два типа:

1. Задачи, в которых требуется построить график и затем найти значения параметра
2. Задачи, в которых требуется найти значения параметра и затем построить график.

Сегодня мы рассмотрим задачи 23, относящиеся к первому типу

(задачи на построение графика).

Задачи на построение графика, в свою очередь, также можно разбить на несколько групп:

- Построение графика дробно-рациональной функции
- Построение графика кусочно-гладкой функции
- Построение графика функции, содержащей модуль

Рассмотрим задачи первой группы.

К ней относятся те задачи, в которых нужно сократить дробь и построить график функции, учитывая, что область определения начальной и упрощенной функции, как правило, различаются.

Задания этой группы решаются по следующему алгоритму:

1) Разложить на множители числитель и знаменатель дроби, входящей в уравнение функции
2) Выписать область определения функции (ОДЗ)
3) Сократить дробь
4) Построить график получившегося уравнения и учесть ОДЗ (то есть отметить «выколотые» точки)
5) Пользуясь графиком, найти те значения параметра, которые спрашиваются в условии

ЗАДАЧА № 1

Постройте график функции

$y = \frac{x^3 - x}{x}$ и определите , при каких значениях p прямая

$y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

РЕШЕНИЕ:

Сначала построим график данной функции.

Область определения функции $y = \frac{x^3 - x}{x}$ – множество всех чисел , кроме 0.

Чтобы построить график функции $y = \frac{x^3 - x}{x}$, необходимо преобразовать дробь $\frac{x^3 - x}{x}$.

Разложим числитель на множители.

После вынесения за скобки общего множителя x, получим : $y = \frac{x(x^2 - 1)}{x}$.

Сократим дробь на x , получим : $y = x^2 - 1$.

Графиком функции $y = x^2 - 1$ является парабола :

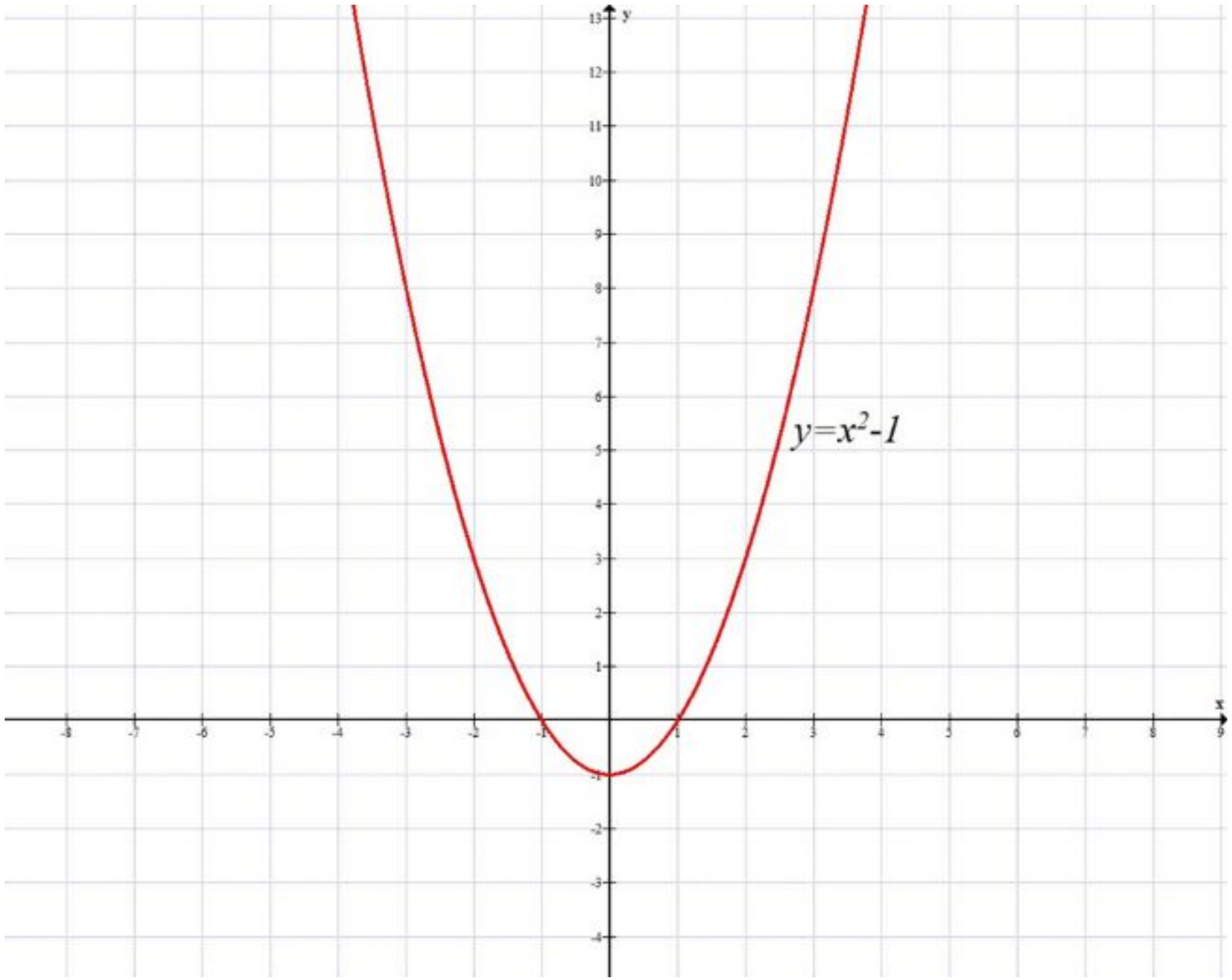
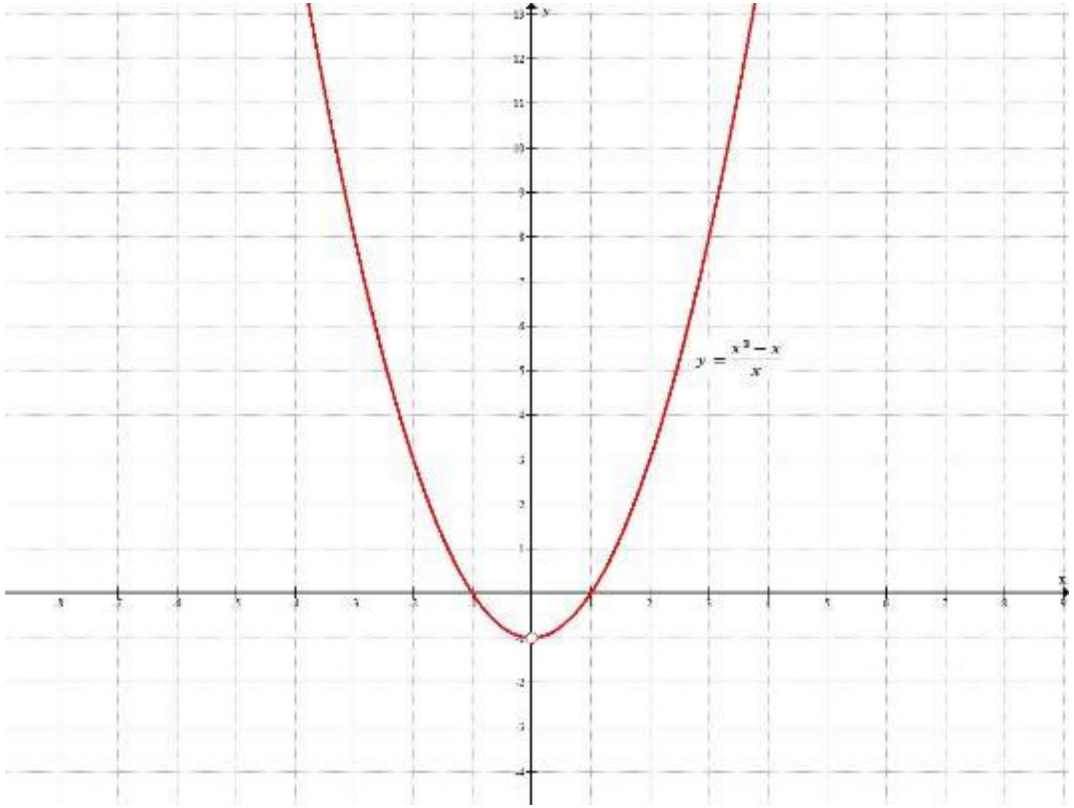


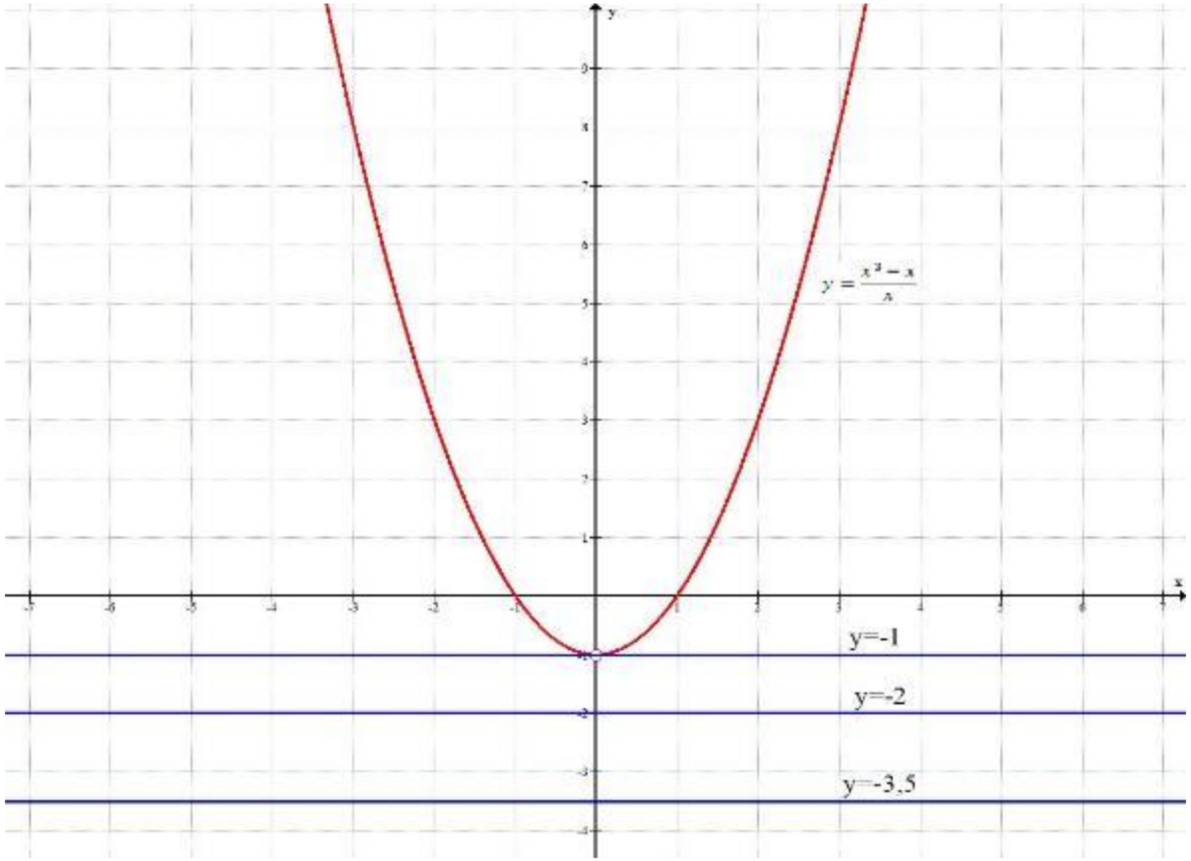
График исходной функции получается из параболы $y = x^2 - 1$ удалением точки с абсциссой 0; $y(0) = -1$.

Таким образом, графиком функции $y = \frac{x^3 - x}{x}$ является та же парабола, но с «выколотой» точкой (0; -1) :



Прямая $y = p$ параллельна оси абсцисс.

Она имеет с графиком или две общие точки (при $p > -1$) , или не имеет с графиком точек пересечения (при $p \leq -1$):



Ответ: при $p \leq -1$.

ЗАДАЧА № 2.

Постройте график функции

$$y = 2 - \frac{x^4+3x^3}{x^2+3x}$$

и определите , при каких значениях m прямая

$y = m$ имеет с этим графиком ровно две общих точки.

РЕШЕНИЕ:

Сначала построим график данной функции.

Найдём ОДЗ: $x^2 + 3x = 0$; $x(x+3) = 0$; $x = 0$ или $x = -3$

Область определения функции $y = 2 - \frac{x^4+3x^3}{x^2+3x}$ — множество всех чисел , кроме -3 и 0.

Чтобы построить график функции $y = 2 - \frac{x^4+3x^3}{x^2+3x}$, необходимо преобразовать выражение $2 - \frac{x^4+3x^3}{x^2+3x}$.

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители.

После вынесения за скобки общего множителя x^3 в числителе и x в знаменателе , получим : $y = 2 - \frac{x^3(x+3)}{x(x+3)}$.

Сократим дробь на $x(x+3)$, получим : $y = 2 - x^2$.

Графиком функции $y = 2 - x^2$ является парабола :

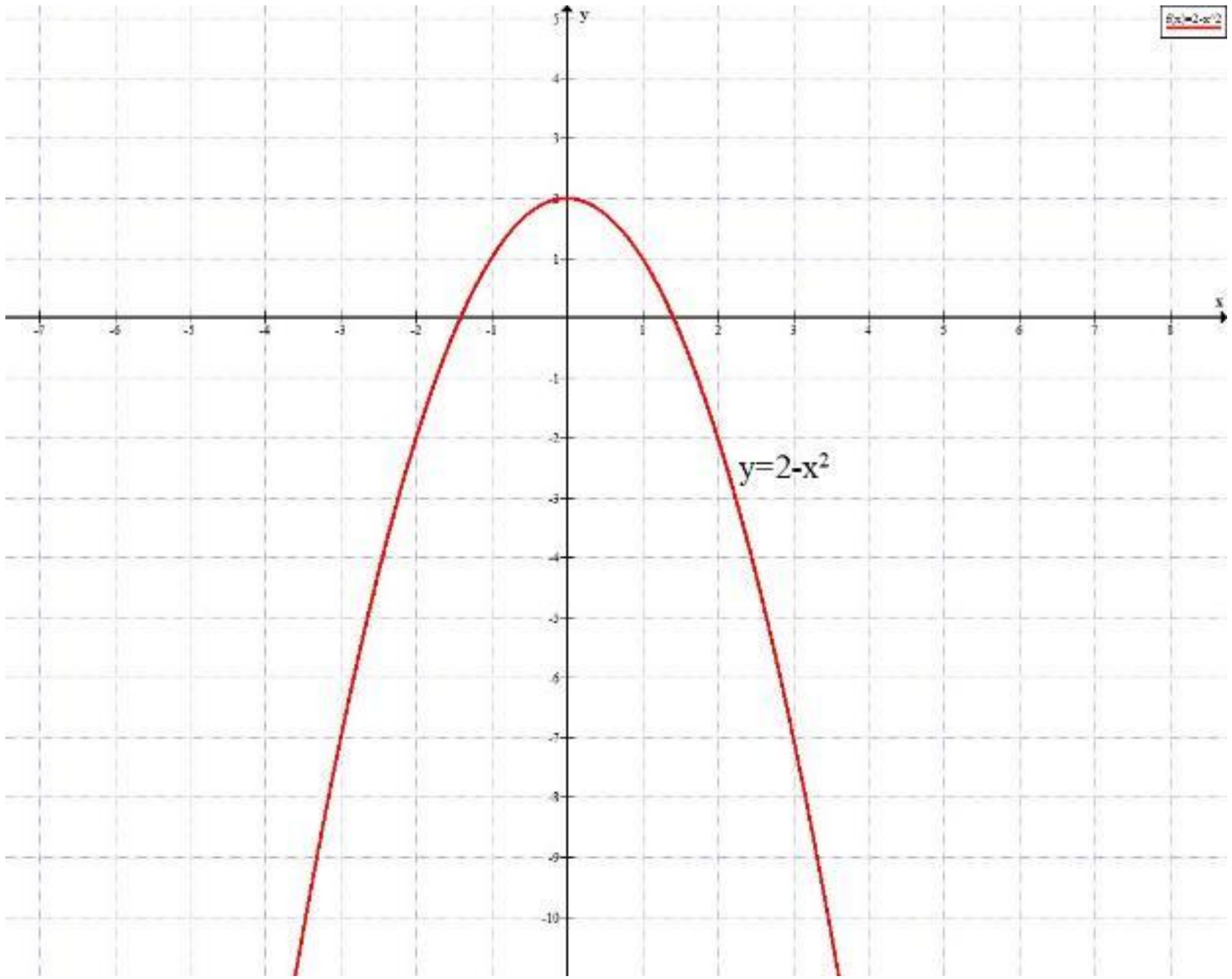


График исходной функции получается

из параболы $y = 2 - x^2$

удалением точек с абсциссой 0 и -3;

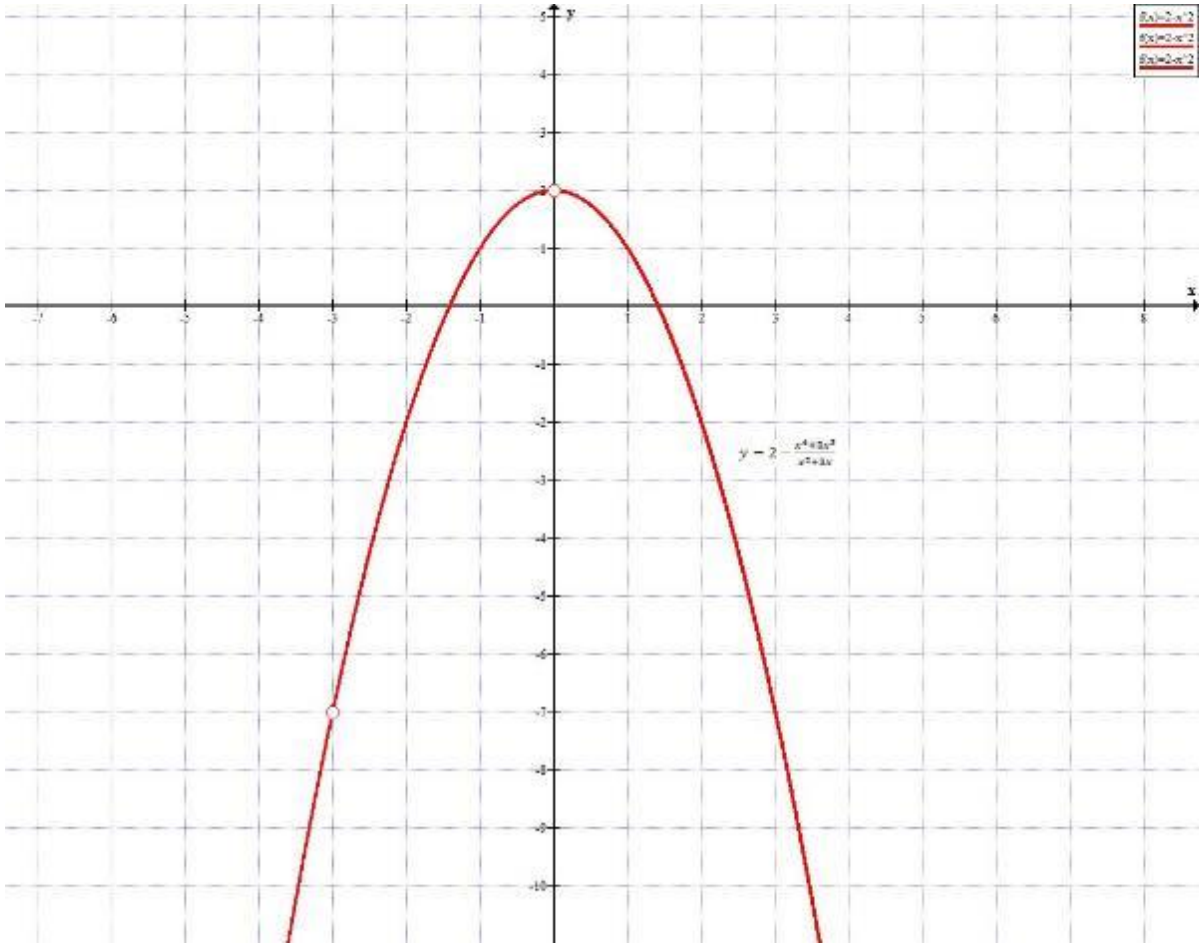
$y(0) = 2;\ y(-3) = -7$

Таким образом, графиком функции

$y = 2 - \frac{x^4+3x^3}{x^2+3x}$ является та же

парабола, но с «выколотыми»

точками (0; 2) и (-3; -7) :



Прямая $y = m$ параллельна оси абсцисс.

Она имеет с графиком

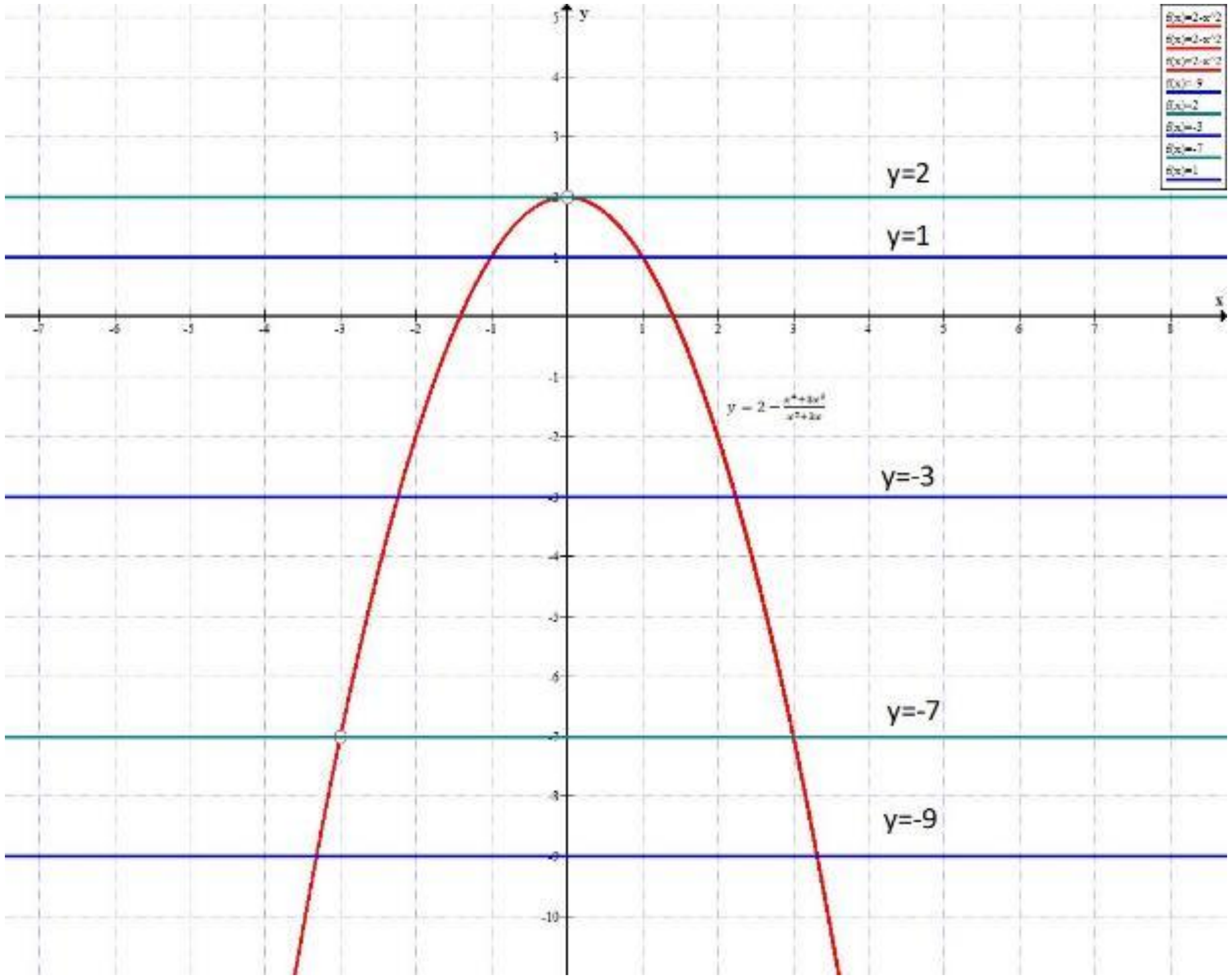
одну (при $m = 2$ и $m = -7$) ,

две общие точки

(при $m < -7$ и $-7 < m < 2$) ,

или не имеет с графиком

точек пересечения (при $m > 2$):



Ответ : при при $m < -7$ и $-7 < m < 2$.

ЗАДАЧА № 3

Постройте график функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$

и определите, при каких значениях m

прямая $y = m$ имеет с этим графиком ровно

одну общую точку.

РЕШЕНИЕ:

Сначала построим график данной функции.

Область определения функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$ – множество всех чисел ,

кроме -2.

Чтобы построить график функции $y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$, необходимо преобразовать

выражение $\frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$.

Разложим в числителе дроби на множители вторую скобку. Для этого найдём корни квадратного трёхчлена $x^2 + 7x + 10$ $x_1 = -2; x_2 = -5$

$x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

Исходная дробь примет вид: $\frac{(x+1)(x+2)(x+5)}{x+2}$

Сократим дробь на $(x+2)$, получим : $y = (x+1)(x+5)$.

Раскрыв скобки, имеем: $y = x^2 + 6x + 5$.

Графиком функции $y = x^2 + 6x + 5$ является парабола :

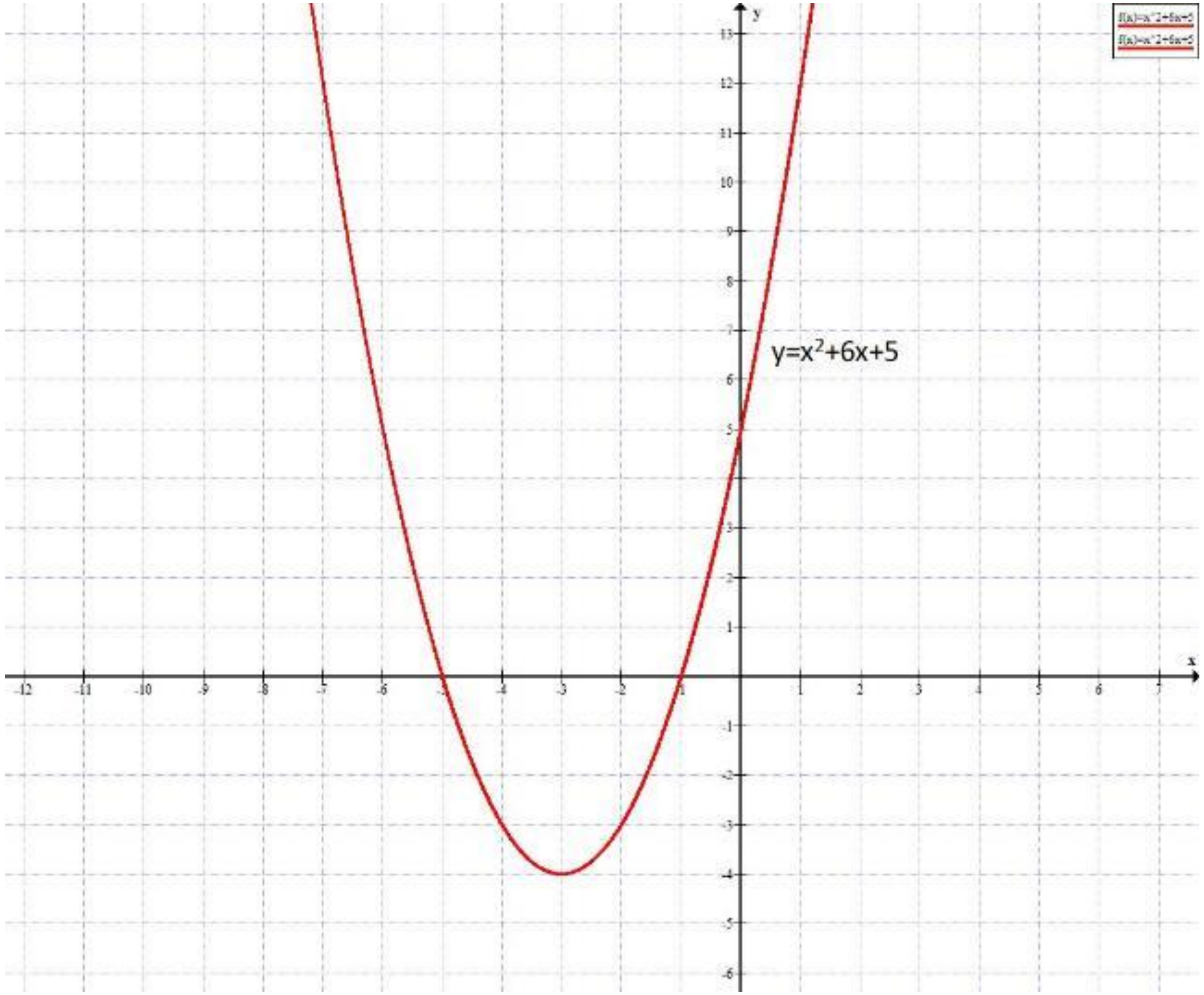


График исходной функции получается

из параболы $y = x^2 + 6x + 5$

удалением точки с

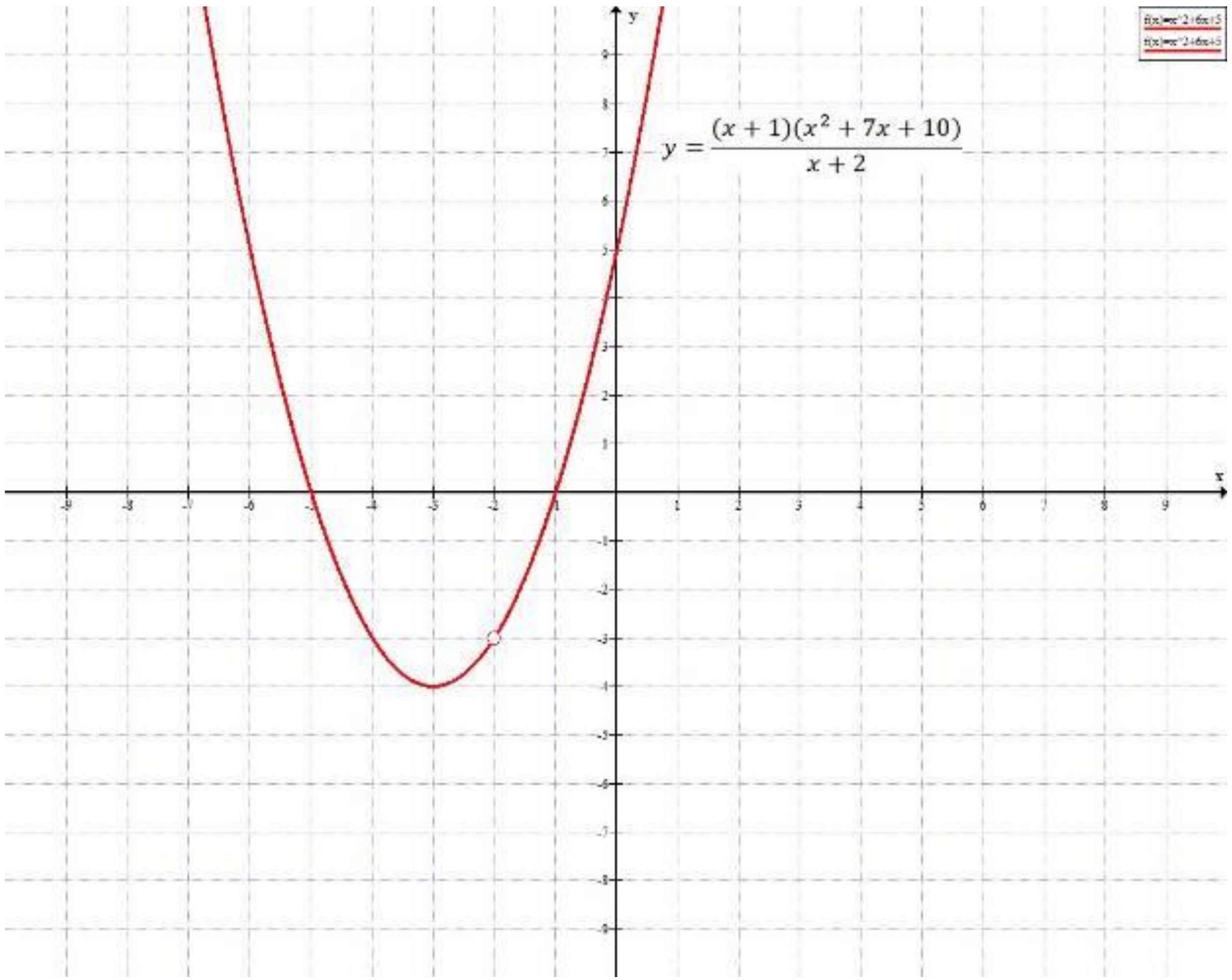
абсциссой -2 ; $y(-2) = -3$.

Таким образом, графиком функции

$y = \frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}$ является

та же парабола, но

с «выколотой» точкой (-2;-3) :



Прямая $y = m$ параллельна оси абсцисс.

Она имеет с графиком

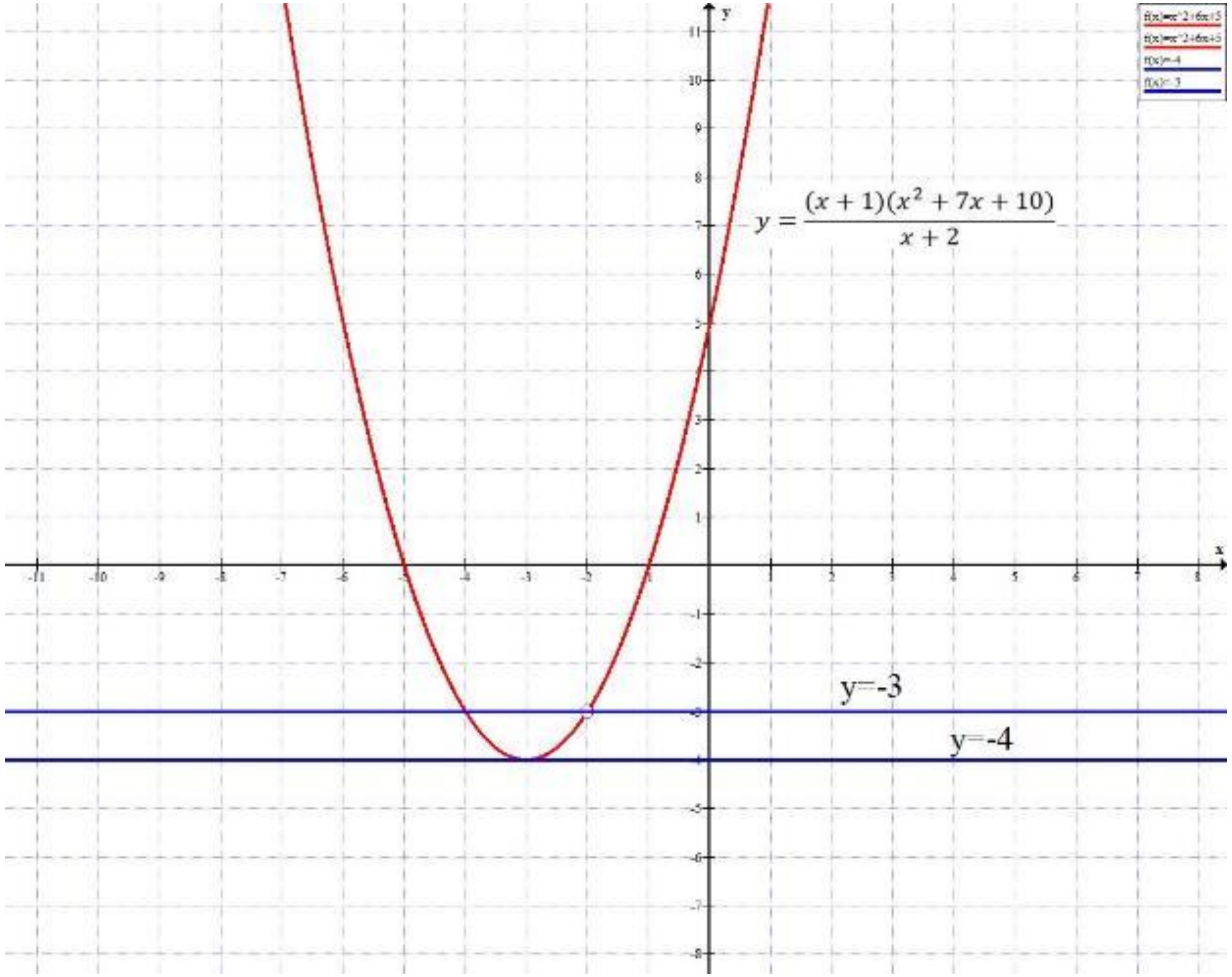
одну (при $m = -4$ и $m = -3$),

две общие точки

(при $m > -3$ и $-4 < m < -3$),

или не имеет с графиком

точек пересечения (при $m < -4$):



Ответ: при $m = -4$ и $m = -3$.

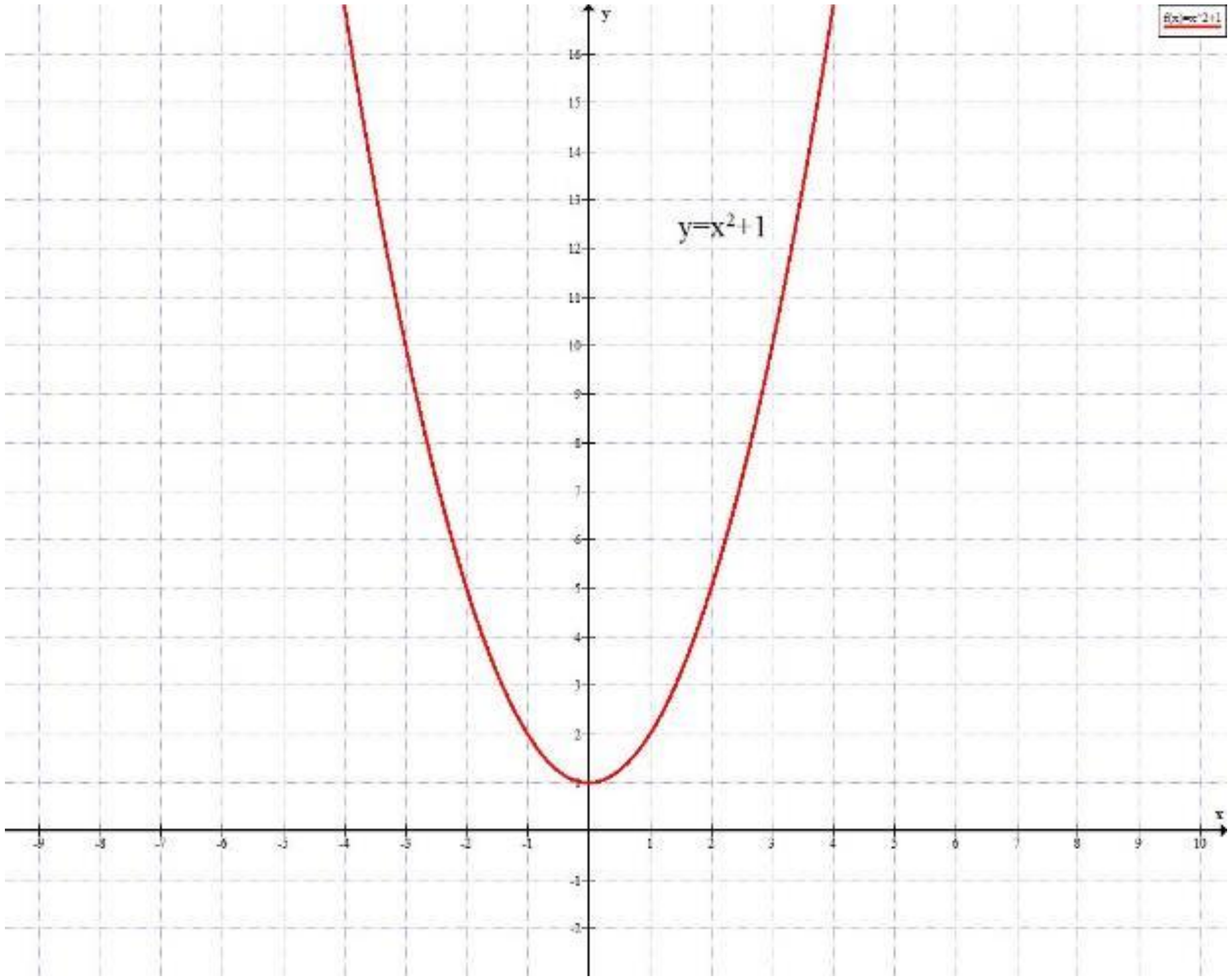
ЗАДАЧА № 4

Найдите все значения p, при каждом из которых прямая $y = px$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 1$ ровно одну общую точку.

Постройте этот график и все такие прямые.

РЕШЕНИЕ:

Сначала построим график данной функции. Графиком функции $y = x^2 + 1$ является парабола, которая получена из параболы $y = x^2$ в результате сдвига вдоль оси OY на 1 единичный отрезок вверх:



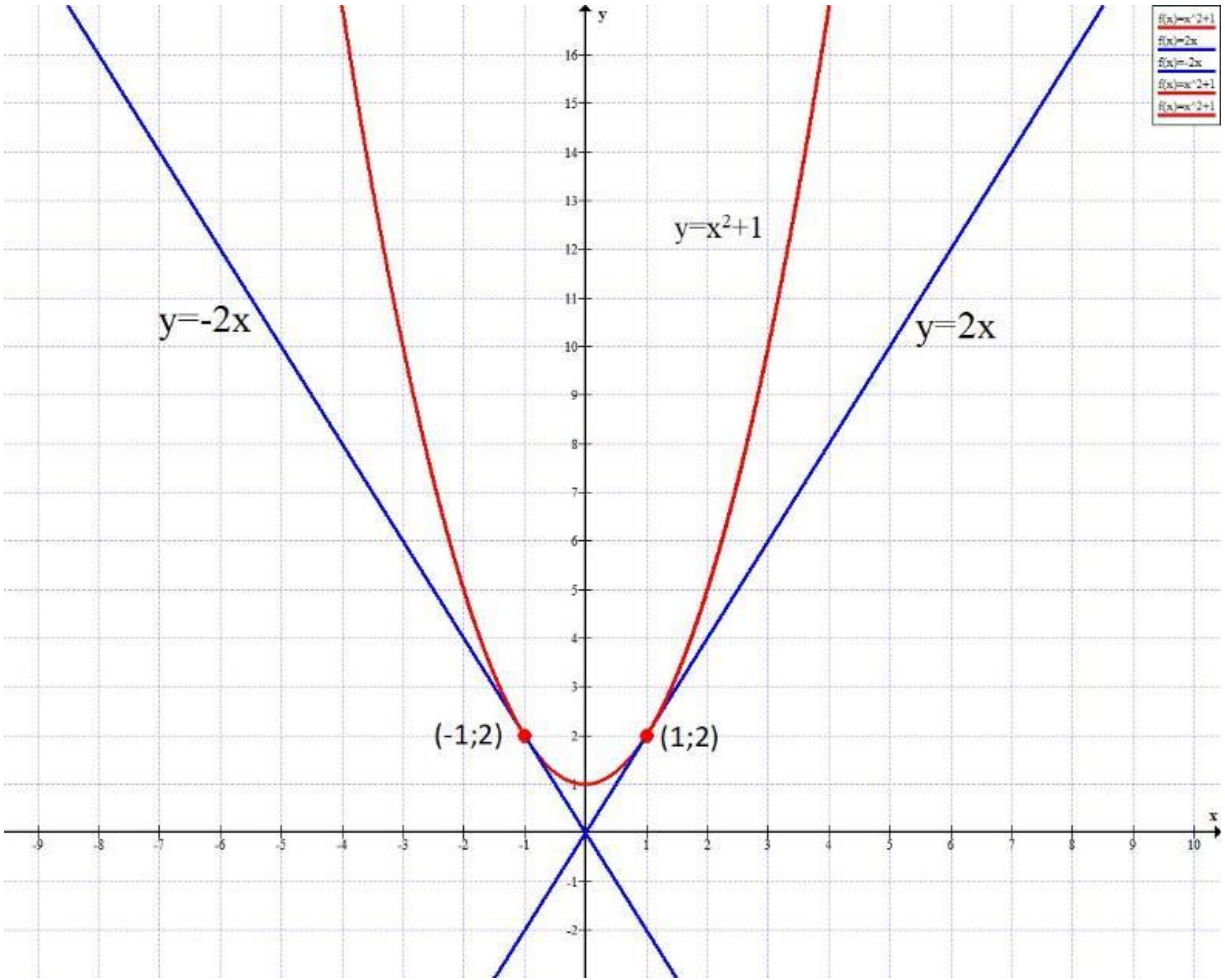
Прямая $y = px$ проходит через начало координат и имеет с графиком функции $y = x^2 + 1$ ровно одну общую точку , если она касается этой параболы. Условие касания реализуется, когда уравнение $x^2 + 1 = px$ имеет один корень. Уравнение квадратное, оно имеет один корень, если дискриминант квадратного уравнения $x^2 - px + 1 = 0$ $D = p^2 - 4$ равен нулю. Получаем: $p^2 = 4$; $p = \pm 2$.

Таким образом, прямая $y = px$, проходящая через начало координат, имеет с графиком функции $y = x^2 + 1$ ровно одну общую точку при $p = \pm 2$, т.е. таких прямых две: $y = 2x$ и $y = -2x$.

Чтобы найти координаты точек касания каждой прямой с параболой, подставим значения параметра $p = \pm 2$ в уравнение $x^2 - px + 1 = 0$.

Решим два квадратных уравнения :

$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$
$x = 1$	$x = -1$
$y(1) = 2$ (1;2)	$y(-1) = 2$ (-1;2)



Ответ: $p = \pm 2$

ЗАДАЧА № 5

Постройте график функции $y = \frac{(x^2+6,25)(x+1)}{-1-x}$

и определите, при каких значениях

параметра k прямая $y = kx$ имеет

с этим графиком ровно одну общую точку.

Сначала построим график данной функции.

Область определения функции $y = \frac{(x^2+6,25)(x+1)}{-1-x}$ – множество всех чисел , кроме -1.

Чтобы построить график функции $y = \frac{(x^2+6,25)(x+1)}{-1-x}$, необходимо преобразовать выражение $\frac{(x^2+6,25)(x+1)}{-1-x}$.

Сократим дробь на $(x+1)$, получим : $y = -(x^2 + 6,25)$

Раскрыв скобки, имеем: $y = -x^2 - 6,25$.

Графиком функции $y = -x^2 - 6,25$ является парабола,

которая получена из параболы $y = -x^2$ в результате сдвига вдоль оси OY на 6,25 единичных отрезков вниз:

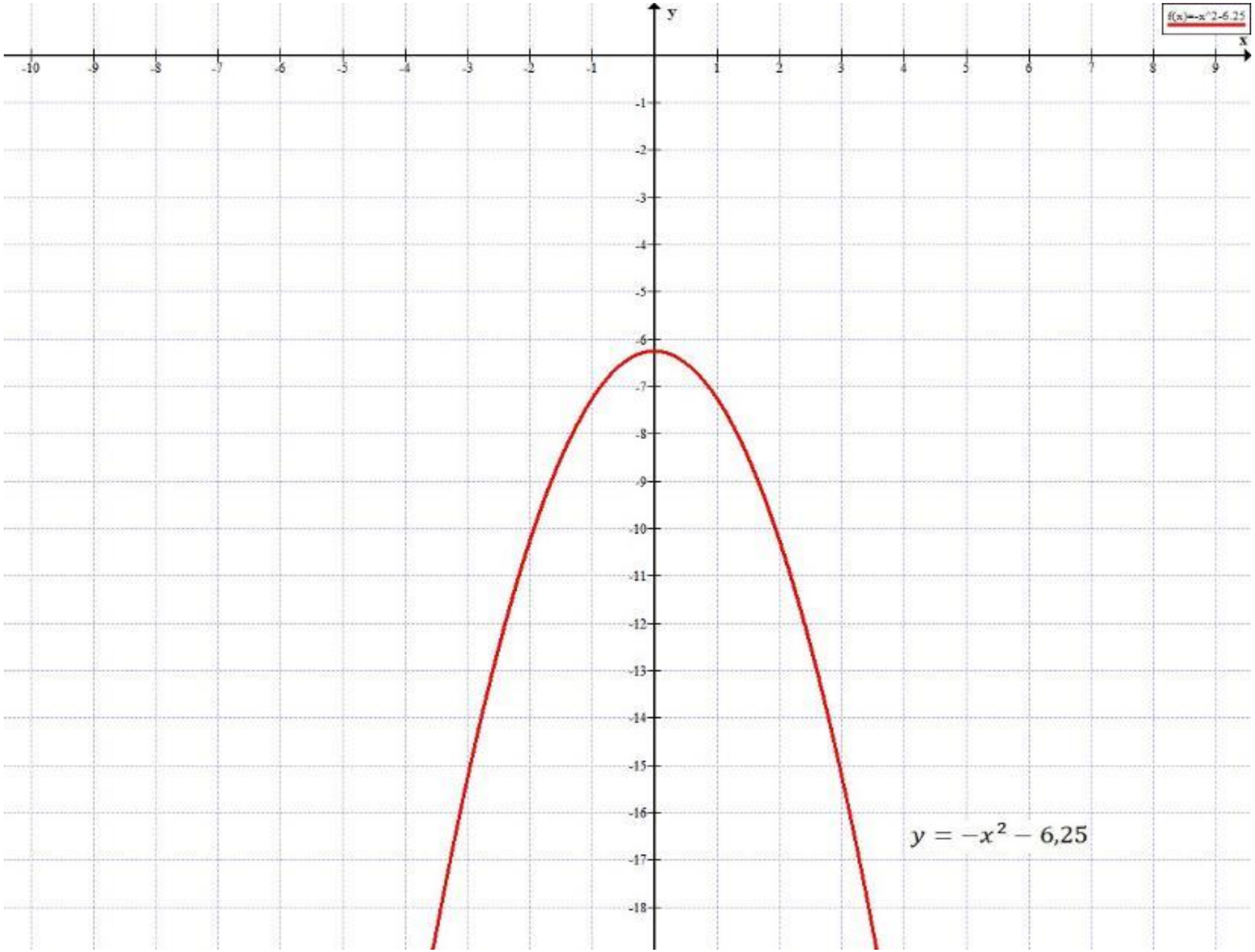

f(x)=-x^2-6.25
$y = -x^2 - 6{,}25$

График исходной функции получается

из параболы $y = -x^2 - 6{,}25$ удалением точки с

абсциссой -1 ; $y(-1) = -7{,}25$.

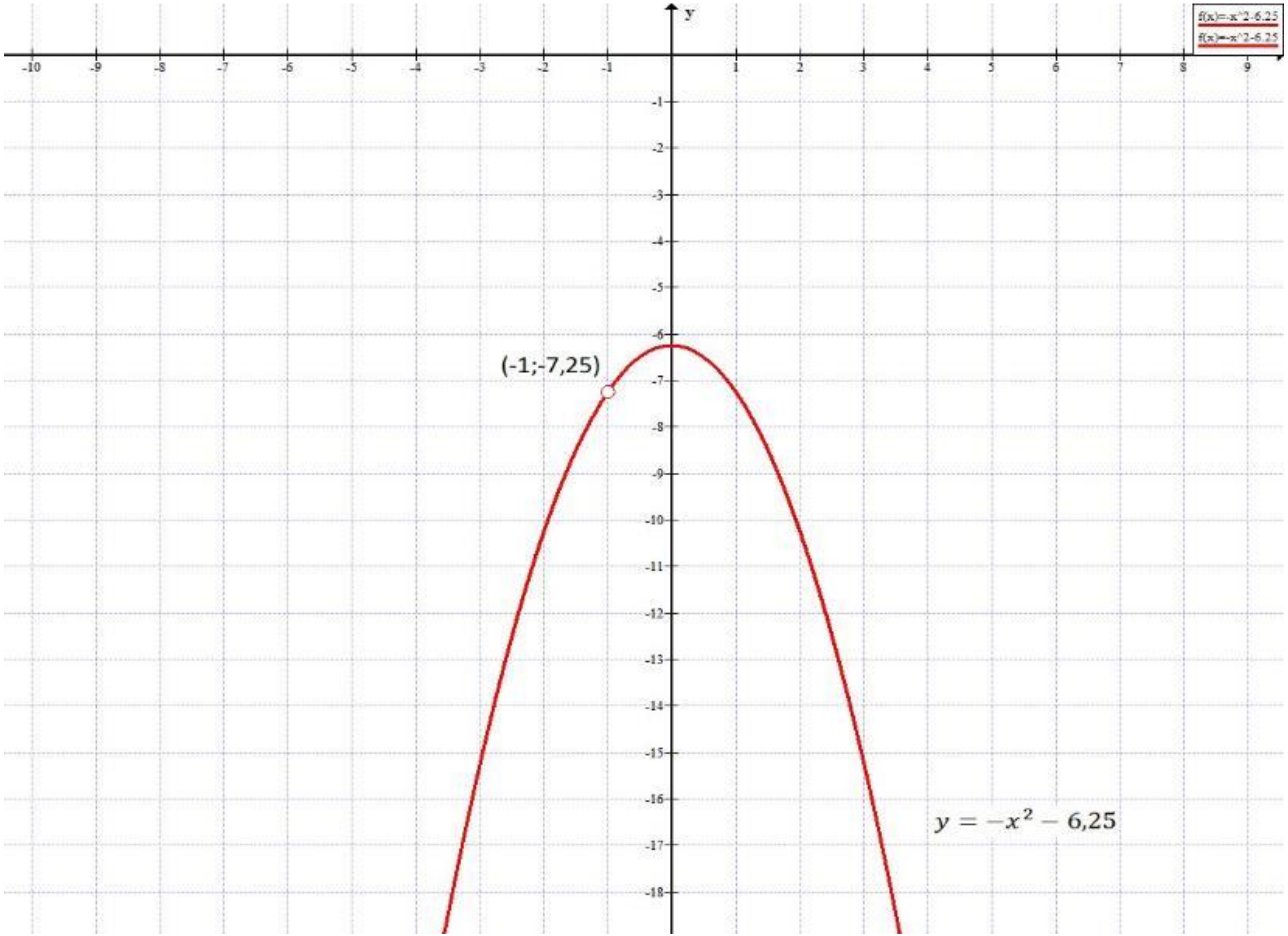
Таким образом, графиком функции

$y = \frac{(x^2+6{,}25)(x+1)}{-1-x}$ –

является та же парабола, но с «выколотой» точкой (-1;-7,25) .

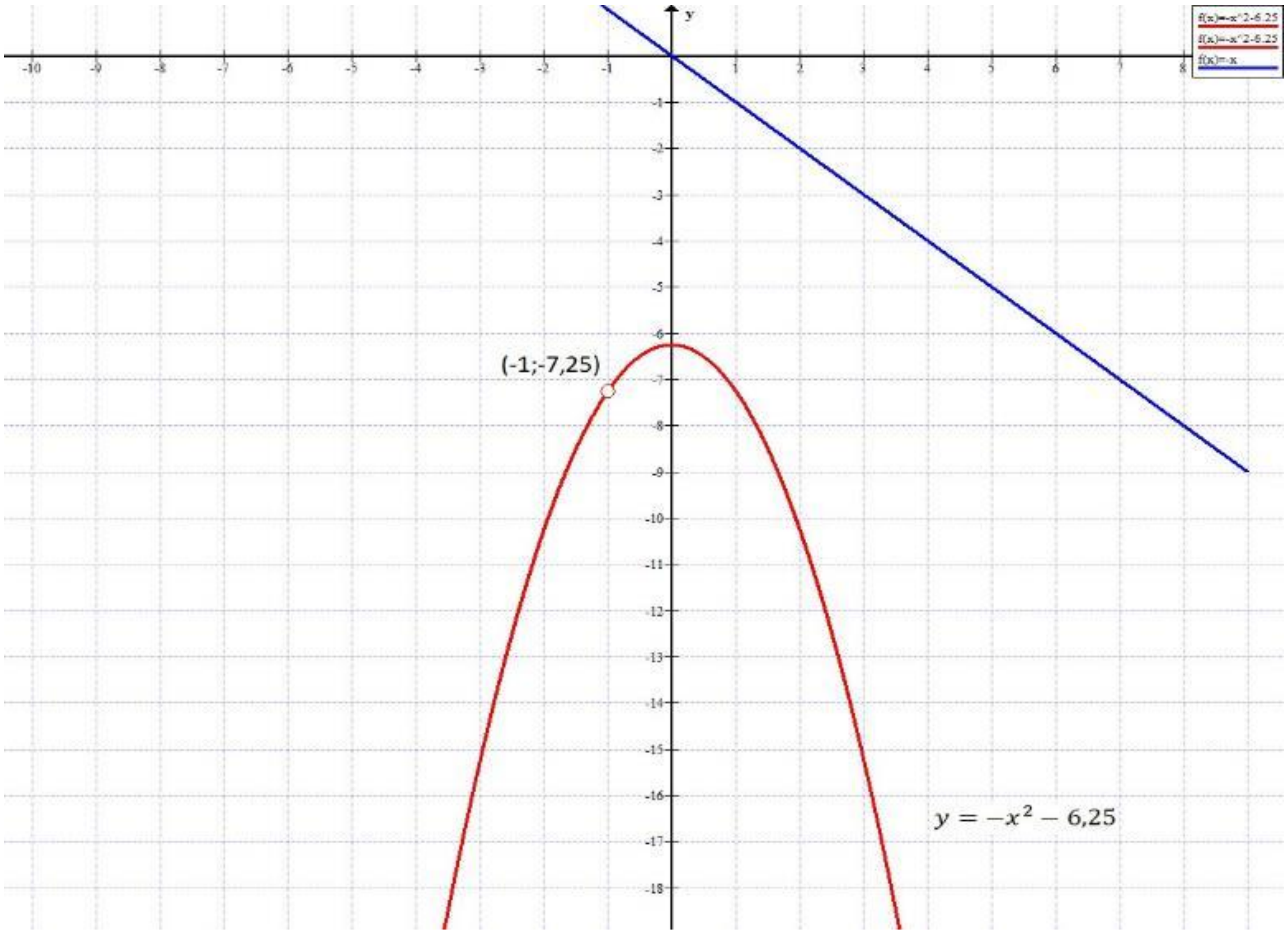
Ветви параболы направлены вниз,

вершиной является точка (0; -6,25) :

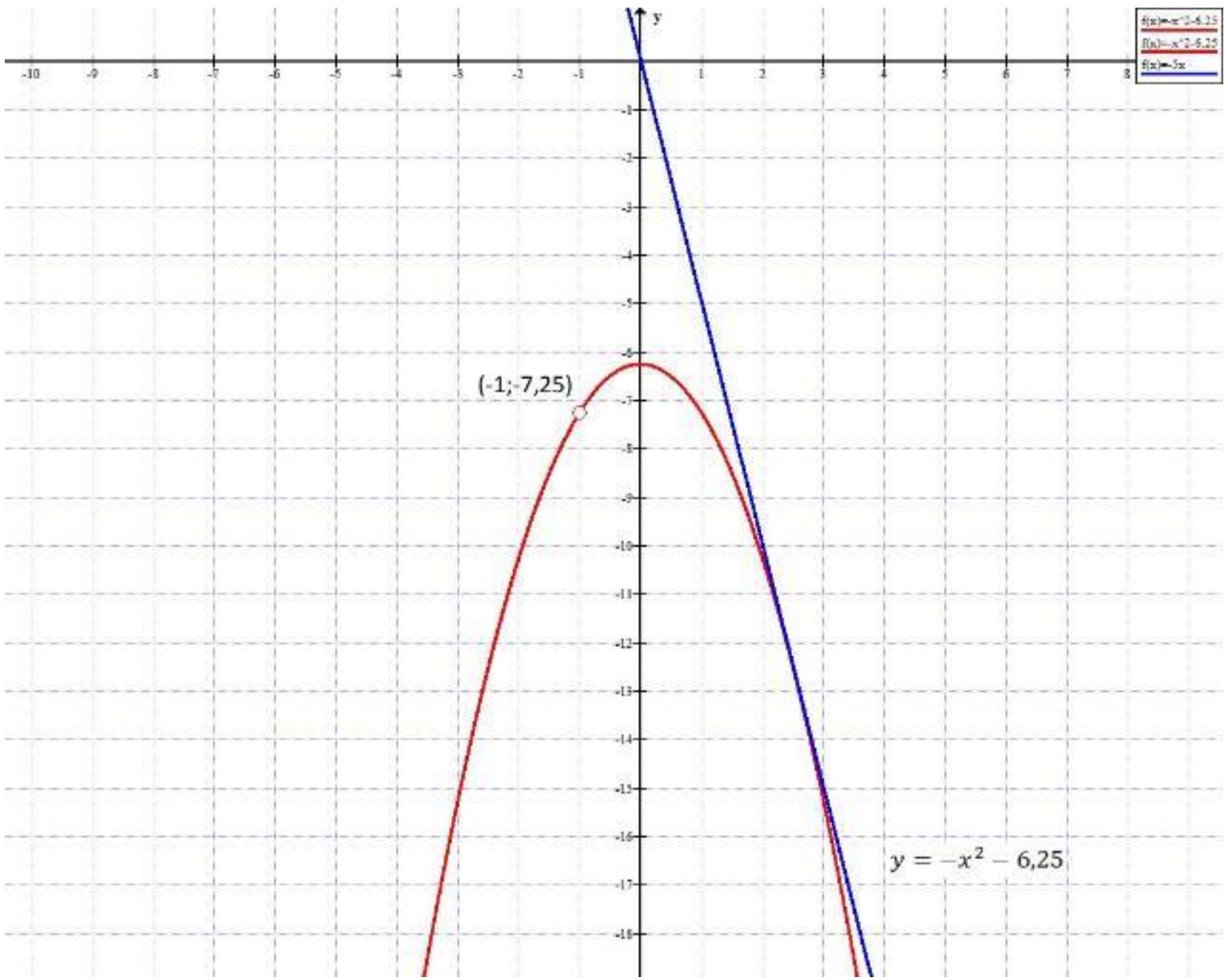


y
f(x)=-x^2-6.25
f(x)=-x^2-6.25
(-1;-7,25)
$y = -x^2 - 6{,}25$

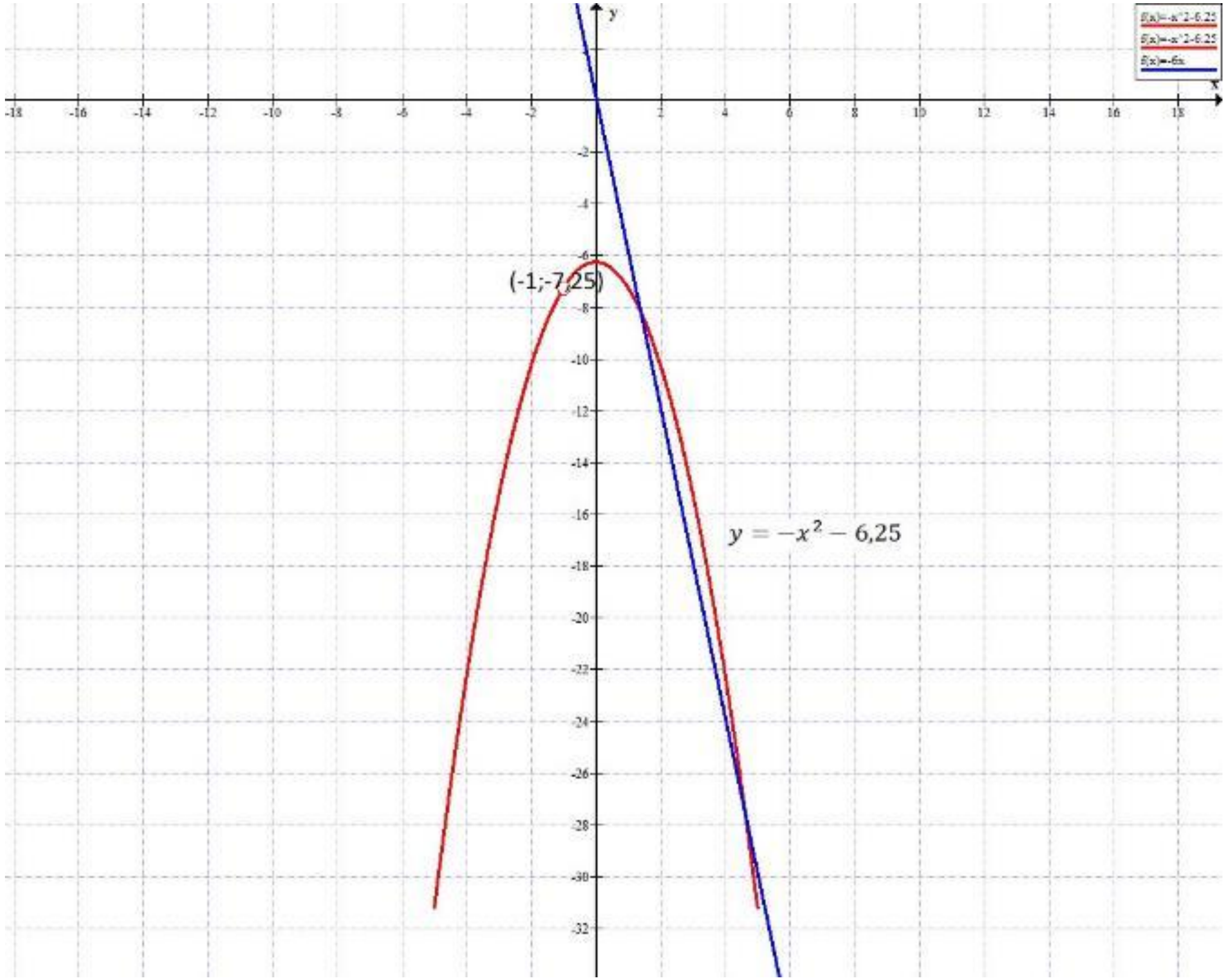
Прямая $y = kx$ может эту параболу не пересекать



может касаться её (одна точка
пересечения)



может иметь две общих точки (две точки пересечения)



Чтобы прямая $y = kx$ имела с этим графиком ровно одну общую точку, нужно чтобы

1) или прямая $y = kx$ касалась параболы (и абсцисса точки касания не равна -1),

2)или прямая $y = kx$ пересекает параболу в двух точках так, чтобы у одной из них абсцисса была равна -1.

1) Условие касания реализуется, когда уравнение $-x^2 - 6{,}25 = kx$ имеет один корень. Уравнение квадратное, оно имеет один корень, если дискриминант этого квадратного уравнения

$-x^2 - kx - 6{,}25 = 0$ $\quad D = k^2 - 25$ равен нулю. Получаем: $k^2 = 25$; $k = \pm 5$.

Таким образом, прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, имеет с графиком функции $y = -x^2 - 6{,}25$ ровно одну общую точку при $k = \pm 5$, т.е. таких прямых две:

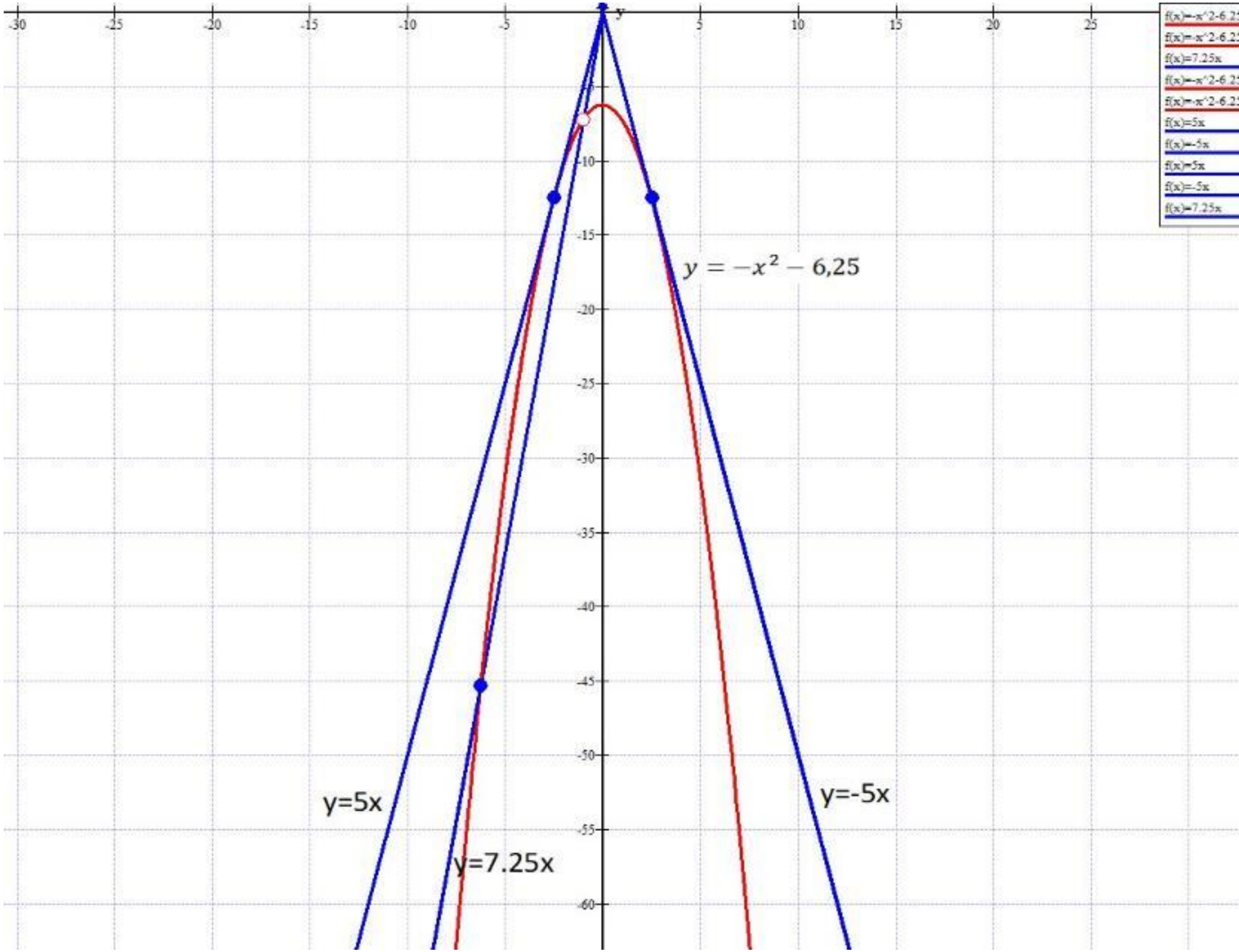
$y = 5x$ и $y = -5x$.

Чтобы найти координаты точек касания каждой прямой с параболой, подставим значения параметра $k = \pm 5$ в уравнение $-x^2 - kx - 6{,}25 = 0$. Решим два квадратных уравнения :

$-x^2 - 5x - 6{,}25 = 0$	$-x^2 + 5x - 6{,}25 = 0$
$x = -2{,}5$	$x = 2{,}5$
$y(-2{,}5) = -12{,}5$ (-2,5;-12,5)	$y(2{,}5) = -12{,}5$ (2,5;-12,5)

2) Для рассмотрения второго случая подставим $x = -1$

в уравнение $-x^2 - 6{,}25 = kx$ и определим значение параметра k: $k = 7{,}25$.



Ответ: $k = 5;\ k = -5\ ;\quad k = 7{,}25$