Теория устойчивости. Простейшие типы точек покоя.

Исследование на устойчивость некоторого решения

$$y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{4.1}$$

может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения — *точки покоя*, расположенной в начале координат.

Действительно, преобразуем систему уравнений (4.1) к новым переменным, полагая

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.4}$$

Новыми неизвестными функциями x_i являются отклонения $y_i - \bar{y}_i(t)$ прежних неизвестных функций от функций $\bar{y}_i(t)$, определяющих исследуемое на устойчивость решение.

В силу (4.4) в новых переменных система (4.1) принимает вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi_i(t,\ x_1 + \bar{y}_1(t),\ x_2 + \bar{y}_2(t),\ \ldots,\ x_n + \bar{y}_n(t))$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.5}$$

Очевидно, что исследуемому на устойчивость решению $y_i = \bar{y}_i(t)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ системы (4.1), в силу зависимости $x_i = y_i - \bar{y}_i(t)$, соответствует тривиальное решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ системы (4.5), причем исследование на устойчивость решения $y_i = \bar{y}_i(t)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ системы (4.1) может быть заменено исследованием на устойчивость тривиального решения системы (4.5). Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что на устойчивость исследуется тривиальное решение или, что одно и то же, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений

Сформулируем условия устойчивости в применении к точке покоя $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Точка покоя $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (4.5) устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

следует

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{при } t \geqslant T \geqslant t_0.$$

Или несколько иначе: точка покоя $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) < \delta_1^2(\varepsilon)$$

следует

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2$$

при $t \geqslant T$, т. е. траектория, начальная точка которой находится в δ_1-окрестности начала координат при $t \geqslant T$ не выходит за пределы ε-окрестности начала координат.

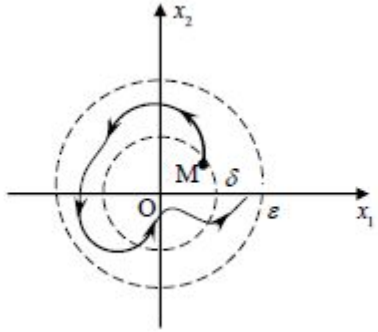


Рис. 8

Геометрически это означает, что если тривиальное решение устойчиво, то всякая траектория, определяемая начальной точкой $M(x_1(t_0), x_2(t_0))$ и начинающаяся внутри круга (сферы) радиуса δ, не покидает при $t \geq t_0$ круга (сферы) радиуса ε (рис. 8) с центром в начале координат.

Тривиальное решение системы *называется асимптотически устойчивым*, если существует $\delta > 0$ такое, что из совокупности неравенств $|x_i(t_0)| < \delta$ следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} |x_i(t)| = 0, \ i = 1, \ldots, n$, или, другими словами, если из неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) < \delta^2$ следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) = 0.$$

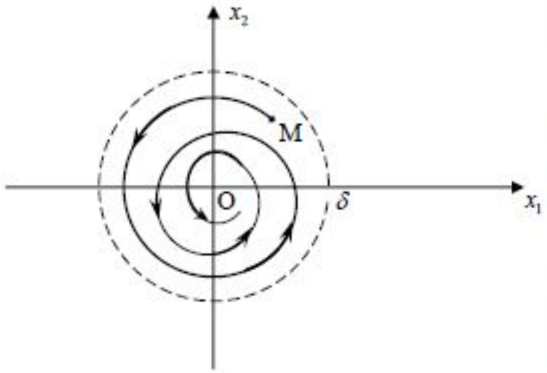


Рис. 9

Геометрическая иллюстрация этого определения – рис. 9: если **тривиальное решение асимптотически устойчиво**, то любая траектория, которая определяется начальной точкой $M(x_1(t_0), x_2(t_0))$ в круге радиуса δ, не только не выйдет из этого круга, но и будет стремиться к его центру $O(0,0)$.

Пусть имеем систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1}$$

причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Точка $x = 0$, $y = 0$, в которой правые части уравнений системы (1) обращаются в ноль, называется *точкой покоя системы* (1).

Для исследования точки покоя системы (1) надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

и найти его корни λ_1 и λ_2.

Возможны следующие случаи.

1. Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения (2) вещественные и разные:

   а) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел, рис. 32);

   б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел, рис. 33);

   в) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Точка покоя неустойчива (седло, рис. 34).

2. Корни характеристического уравнения (2) комплексные: $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$:

   а) $p < 0$, $q \neq 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус, рис. 35);

   б) $p > 0$, $q \neq 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус, рис. 36);

   в) $p > 0$, $q \neq 0$. Точка покоя устойчива (центр, рис. 37).

3. Корни $\lambda_1 = \lambda_2$ кратные:

   а) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел, рис. 38, 39);

   б) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел, рис. 40, 41).

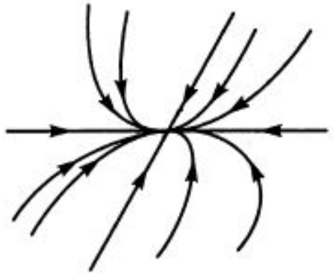


Рис. 32

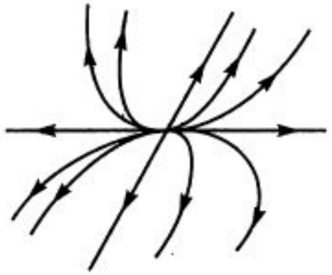


Рис. 33

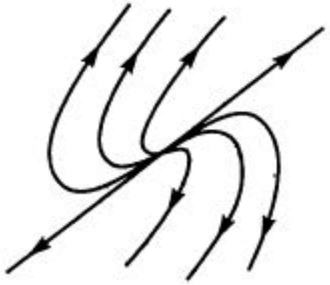


Рис. 40

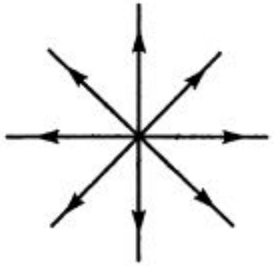


Рис. 41

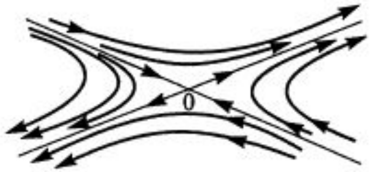


Рис. 34

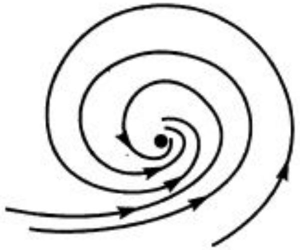


Рис. 35

Рис. 36

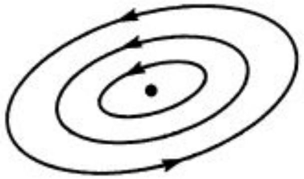


Рис. 37

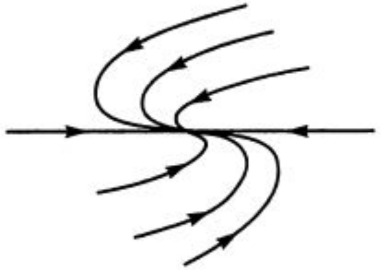


Рис. 38

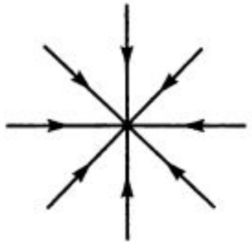


Рис. 39

Замечание Классификация точек покоя тесно связана с классификацией особых точек

Действительно, в рассматриваемом случае система

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y,\\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y,\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

путем исключения t могла бы быть сведена к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \tag{4.12}$$

интегральные кривые которого совпадают с траекториями движения системы (4.6). При этом точка покоя $x=0$, $y=0$ системы (4.6) является особой точкой уравнения (4.12).

962. $y' = \frac{x-4y}{2y-3x}$.

962 $\begin{cases}\dot{x} = -3x+2y \\ \dot{y} = x-4y\end{cases}$

$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = 12+7\lambda+\lambda^2-2 = \lambda^2+7\lambda+10=0$ – устойчивый узел, асимптотическая устойчивость

$\boxed{\lambda_1=-5 \quad \lambda_2=-2}$

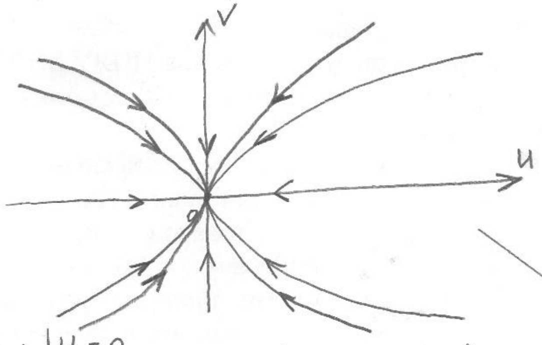
$\lambda_1=-5: \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{1 \mid -1}$

$\lambda_2=-2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{2 \mid 1}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 e^{-5t}}_{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{C_2 e^{-2t}}_{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} u = C_1 e^{-5t} \\ v = C_2 e^{-2t} \end{cases} \quad e^{-t} = \frac{u^{1/5}}{C^{1/5}}$

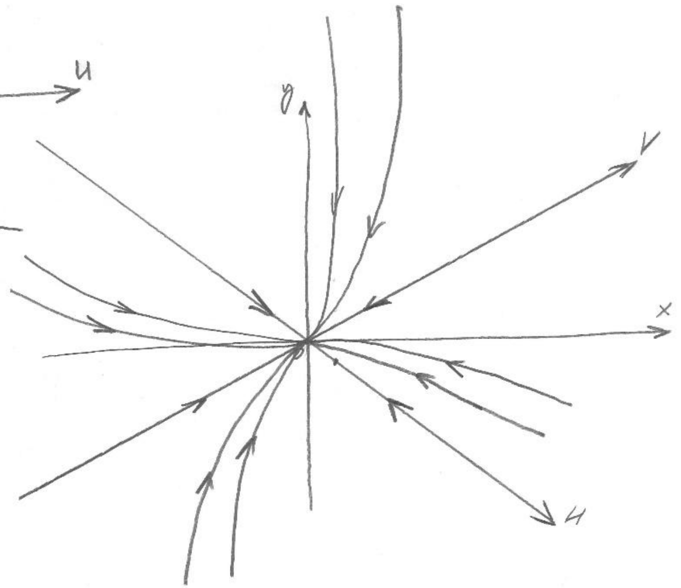
$v = C_2 \frac{u^{2/5}}{C_1^{2/5}}$



$C_1=0: \begin{cases} u=0 \\ v=C_2 e^{-2t} \end{cases} \quad v \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$C_2=0: \begin{cases} u=C_1 e^{-5t} \\ v=0 \end{cases} \quad u \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$\begin{cases} u \xrightarrow{t\to\infty} 0 \\ v \xrightarrow{t\to\infty} 0 \end{cases}$



965. $y' = \dfrac{x - 2y}{3x - 4y}$.

965 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = -6 - \lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\boxed{\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2}$ – седло, неуст.

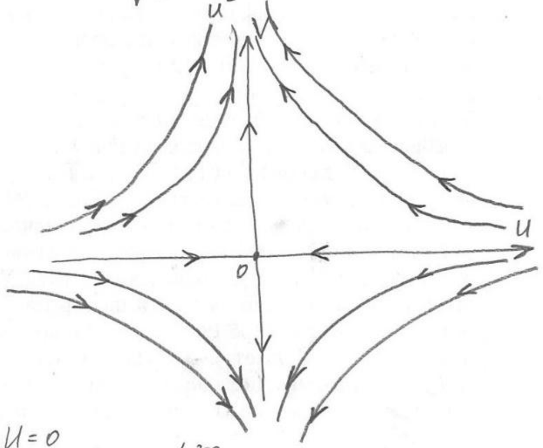
$\lambda_1 = -1: \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim (1 \ \ -1) \qquad \boxed{1 \mid 1}$

$\lambda_2 = 2: \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \sim (1 \ \ -4) \qquad \boxed{4 \mid 1}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 e^{-t}}_{U} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{C_2 e^{2t}}_{V} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} U = C_1 e^{-t} \\ V = C_2 e^{2t} \end{cases} \qquad e^t = \dfrac{C_1}{U}$

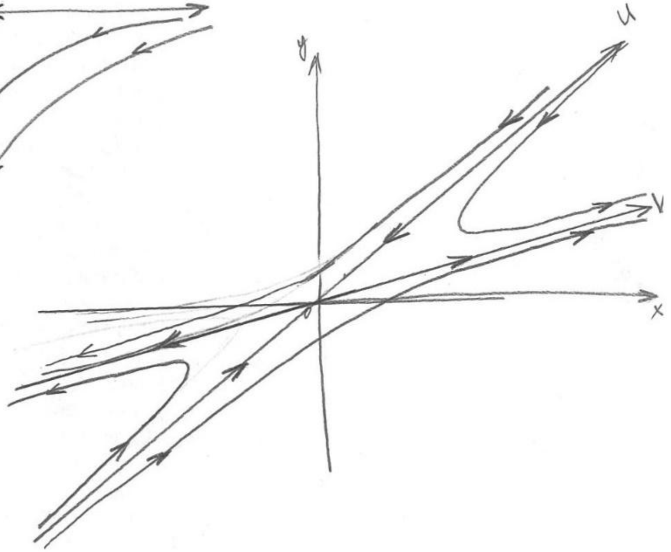
$V = \dfrac{C_1^2 C_2}{U^2}$



$C_1 = 0: \begin{cases} U = 0 \\ V = C_2 e^{2t} \end{cases} \quad V \xrightarrow{t \to \infty} \infty$

$C_2 = 0: \begin{cases} U = C_1 e^{-t} \\ V = 0 \end{cases} \quad U \xrightarrow{t \to \infty} 0$

$\begin{cases} U \xrightarrow{t \to \infty} 0 \\ V \xrightarrow{t \to \infty} \pm\infty \end{cases}$



975. $\begin{cases} \dot x = -2x - 5y, \\ \dot y = 2x + 2y. \end{cases}$

975 $\begin{cases} \dot x = -2x - 5y \\ \dot y = 2x + 2y \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 4 + 10 = \lambda^2 + 6 = 0$$

$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}\,i}$ – центр, уст.

$\lambda_1 = \sqrt{6}\,i: \begin{pmatrix} -2-\sqrt6 i & -5 \\ 2 & 2-\sqrt6 i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2-\sqrt6 i \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{2-\sqrt6 i \mid -2}$

$$x_{1,2} = e^{\sqrt6 i t}\begin{pmatrix} 2-\sqrt6 i \\ -2 \end{pmatrix} = (\cos\sqrt6 t + i\sin\sqrt6 t)\begin{pmatrix} 2-\sqrt6 i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\sqrt6 t + \sqrt6\sin\sqrt6 t \\ -2\cos\sqrt6 t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2\sin\sqrt6 t - \sqrt6\cos\sqrt6 t \\ -2\sin\sqrt6 t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2\cos\sqrt6 t + \sqrt6\sin\sqrt6 t \\ -2\cos\sqrt6 t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2\sin\sqrt6 t - \sqrt6\cos\sqrt6 t \\ -2\sin\sqrt6 t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = (2C_1 - \sqrt6 C_2)\cos\sqrt6 t + (\sqrt6 C_1 + 2C_2)\sin\sqrt6 t \\ y = -2C_1\cos\sqrt6 t - 2C_2\sin\sqrt6 t \end{cases}$$

Покажем, что фазовые траектории – эллипсы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2C_1 - \sqrt6 C_2 & \sqrt6 C_1 + 2C_2 \\ -2C_1 & -2C_2 \end{vmatrix} = -4C_1C_2 + 2\sqrt6 C_2^2 + 2\sqrt6 C_1^2 + 4C_1C_2 = 2\sqrt6(C_1^2 + C_2^2)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & \sqrt6 C_1 + 2C_2 \\ y & -2C_2 \end{vmatrix} = -2C_1 x - (\sqrt6 C_1 + 2C_2)y \quad \Rightarrow \cos\sqrt6 t = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2C_1 - \sqrt6 C_2 & x \\ -2C_1 & y \end{vmatrix} = (2C_1 - \sqrt6 C_2)y + 2C_1 x \quad \Rightarrow \sin\sqrt6 t = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\cos^2\sqrt6 t + \sin^2\sqrt6 t = 1$$

$$\frac{(2C_1 x + (\sqrt6 C_1 + 2C_2)y)^2}{(2\sqrt6(C_1^2 + C_2^2))^2} + \frac{(2C_1 x + (2C_1 - \sqrt6 C_2)y)^2}{(2\sqrt6(C_1^2 + C_2^2))^2} = 1$$ – ур-ие линии второго порядка (1)

$x(t), y(t)$ – периодические ф-ции, $T = \frac{2\pi}{\sqrt6} \Rightarrow$ траектории замкнуты (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ эллипсы

Найдем прямые, на которых расположены оси эллипсов.

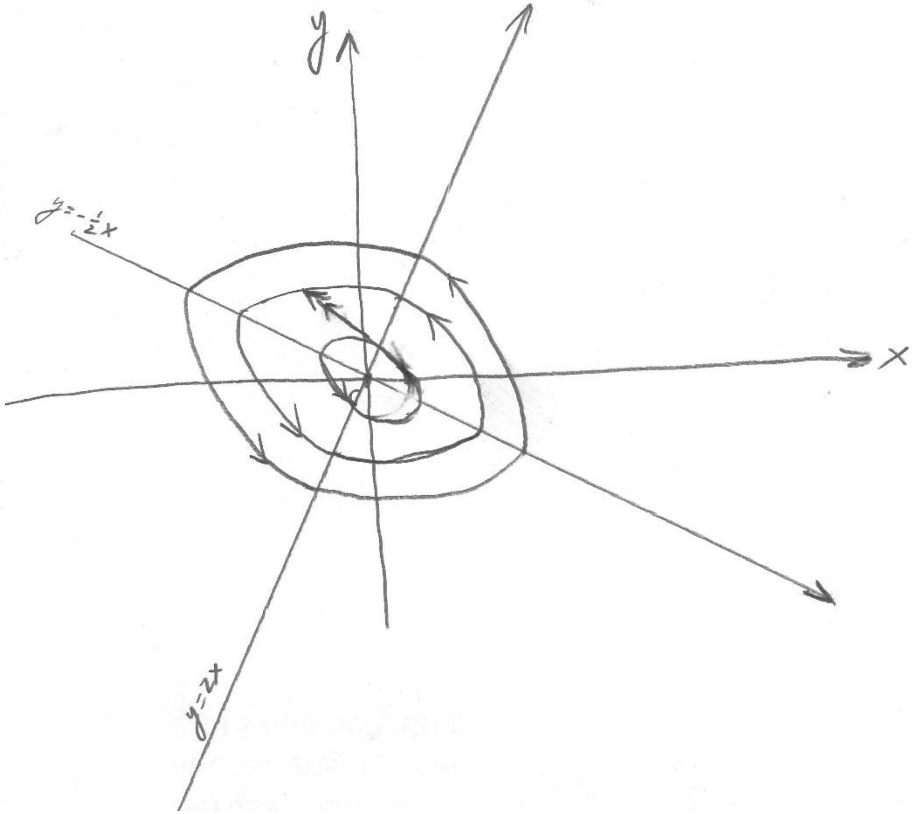
Найдем экстремум ф-ции: $f(x,y) = x^2+y^2 \quad (=r^2)$

$$\frac{df}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x(-2x-5y)+2y(2x+2y) = -4x^2-10xy+4xy+4y^2 =$$

Экстремумы на прямой $y=kx$

$$= 4y^2-6xy-4x^2 = 4k^2x^2-6kx^2-4x^2 = 2x^2(2k^2-3k-2) = 0$$

$k_{1,2} = 2, -\frac{1}{2}$



Найдем направление движения по траекториям:

Вектор скорости:

$\vec{V} = \{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\} = \{-2x-5y, 2x+2y\}$

В т. $(1,0)$: $\vec{V} = \{-2, 2\}$

963. $y' = \dfrac{y-2x}{y}$.

963 $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -2x + y \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$D = 1 - 8 = -7$$

$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i}$ – фокус

$Re\, \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow$ неуст.

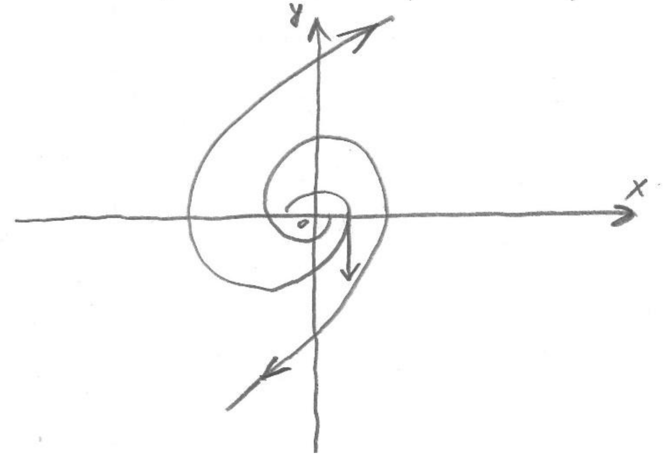
$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i & 1 \end{pmatrix}$

2	$1+\sqrt{7}i$

$$x_{1,2} = e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i\right)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{7} i \end{pmatrix} = e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + i \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{7} i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t \\ \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t - \sqrt{7} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \end{pmatrix} + i e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \\ \sqrt{7} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t \\ \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t - \sqrt{7} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \end{pmatrix} + C_2 e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \\ \sqrt{7} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \end{pmatrix}$$



$\bar V = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\} = \{ y, -2x + y \}$

В т. $(1,0)$: $\bar V = \{0, -2\}$

976. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

976 $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & +1-\lambda \end{vmatrix} = 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ $\boxed{\lambda_{1,2} = 2}$ – вырожденный узел, неуст.

$\lambda_{1,2} = 2: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim (1 \ \ 1)$ $\boxed{1 \mid -1}$

$\vec{X}_{1,2} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta} t) e^{2t}$

$\dot{\vec{x}} = (\lambda \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} t + \vec{\beta}) \cancel{e^{\lambda t}} = A(\vec{\alpha} + \vec{\beta} t) \cancel{e^{\lambda t}}$

$\begin{cases} A\vec{\beta} = \lambda \vec{\beta} \\ A\vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} + \vec{\beta} \end{cases}$

1) $\vec{\beta} = \vec{0}$, $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim (1 \ \ 1 \mid 1)$ $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

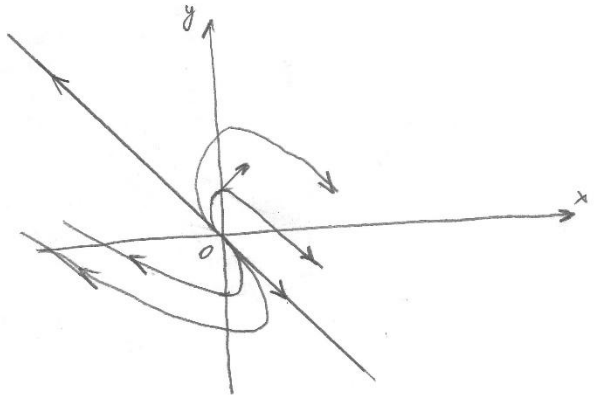
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] e^{2t} = (C_1 + C_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

$\begin{cases} x = e^{2t}(C_1 + C_2 + C_2 t) \\ y = e^{2t}(-C_1 - C_2 t) \end{cases}$

$C_2 = 0: \begin{cases} x = C_1 e^{2t} \\ y = -C_1 e^{2t} \end{cases}$ $y = -x$

т. $(1, 0)$ $\bar{V} = \{3, -1\}$

т. $(0, 1)$ $\bar{V} = \{1, 1\}$



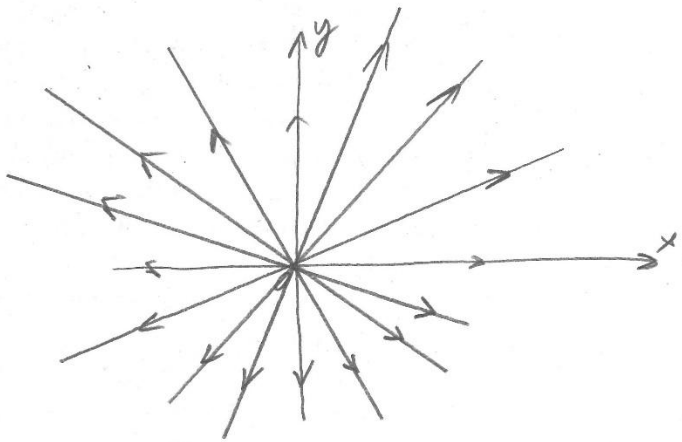
969. $y' = \dfrac{y}{x}$.

969 $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^2$ – дикретический узел, неуст.

$\boxed{\lambda_{1,2} = 1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = C_1 e^t \\ y = C_2 e^t \end{cases}$ $y = \dfrac{c_2}{c_1} x$



977. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -6x + 4y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 12 + \lambda^2 - 7\lambda - 12 = \lambda(\lambda - 7) = 0$$

$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 7$ неуст

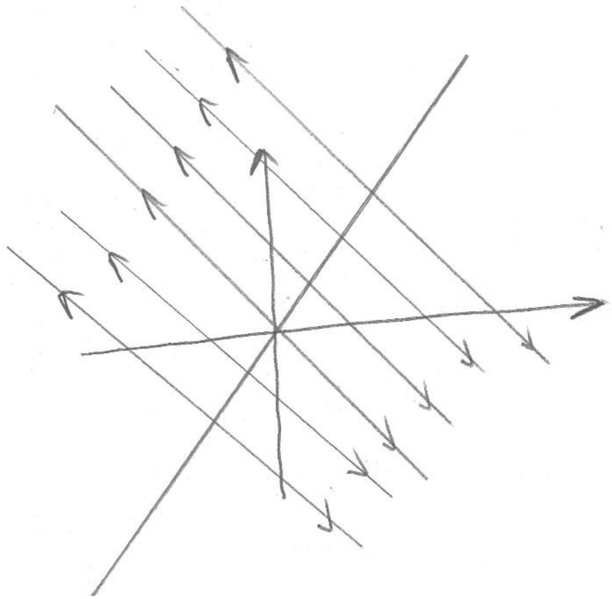
$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{2 \mid 3}$

$\lambda_2 = 7: \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{1 \mid -2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{7t}$$

$$\begin{cases} x = 2C_1 + C_2 e^{7t} \\ y = 3C_1 - 2C_2 e^{7t} \end{cases}$$

$y = 7C_1 - 2x$



978. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 \qquad \lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0: \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1 \mid 2}$$

$$x_{1,2} = \alpha + \beta t \qquad \dot{x} = \beta = A(\alpha + \beta t)$$

$$\begin{cases} \beta = A\alpha \\ 0 = A\beta \end{cases}$$

1) $\beta = 0$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

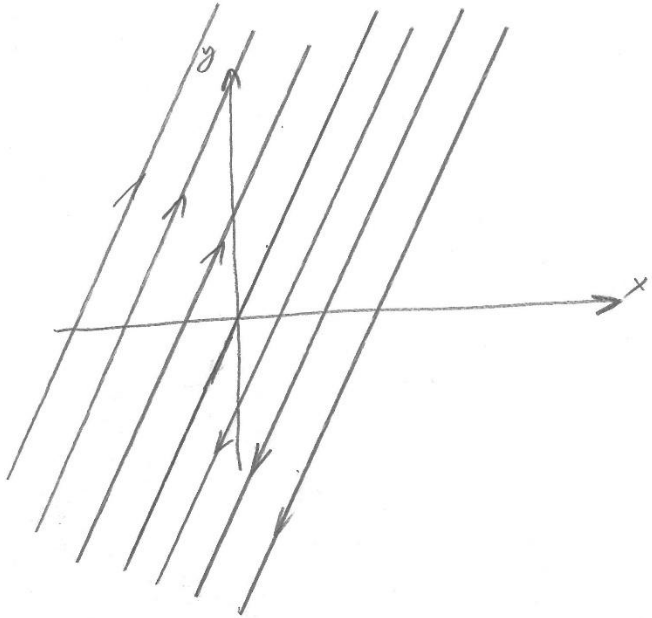
2) $\beta \neq 0$; $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{matrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right) \sim \left(-2 \quad 1 \mid 1\right) \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \right]$$

$C_2 = 0$: $\begin{cases} x = C_1 \\ y = 2C_1 \end{cases}$ – точки покоя; $y = 2x$

$C_2 \neq 0$: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 t \\ y = 2C_1 + C_2 + 2C_2 t = 2x + C_2 \end{cases}$



Домашнее задание

961-978 (остальные)