

# **Теория устойчивости. Простейшие типы точек покоя.**

Исследование на устойчивость некоторого решения

$$y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения — *точки покоя*, расположенной в начале координат.

Действительно, преобразуем систему уравнений (4.1) к новым переменным, полагая

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4)$$

Новыми неизвестными функциями  $x_i$  являются отклонения  $y_i - \bar{y}_i(t)$  прежних неизвестных функций от функций  $\bar{y}_i(t)$ , определяющих исследуемое на устойчивость решение.

В силу (4.4) в новых переменных система (4.1) принимает вид

$$\frac{dx_i}{dt} = - \frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1(t), x_2 + \bar{y}_2(t), \dots, x_n + \bar{y}_n(t)) \\ (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.5)$$

Очевидно, что исследуемому на устойчивость решению  $y_i = \bar{y}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.1), в силу зависимости  $x_i = y_i - \bar{y}_i(t)$ , соответствует тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.5), причем исследование на устойчивость решения  $y_i = \bar{y}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.1) может быть заменено исследованием на устойчивость тривиального решения системы (4.5). Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что на устойчивость исследуется тривиальное решение или, что одно и то же, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений

Сформулируем условия устойчивости в применении к точке покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4.5) устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

следует

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{при } t \geq T \geq t_0.$$

Или несколько иначе: точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta_1(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta_1^2(\varepsilon)$$

следует

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2$$

при  $t \geq T$ , т. е. траектория, начальная точка которой находится в  $\delta_1$ -окрестности начала координат при  $t \geq T$  не выходит за пределы  $\varepsilon$ -окрестности начала координат.

Тривиальное решение системы называется *асимптотически устойчивым*, если существует  $\delta > 0$  такое, что из совокупности неравенств  $|x_i(t_0)| < \delta$  следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t)| = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , или, другими словами, если из неравенства

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta^2 \quad \text{следует, что}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) = 0.$$

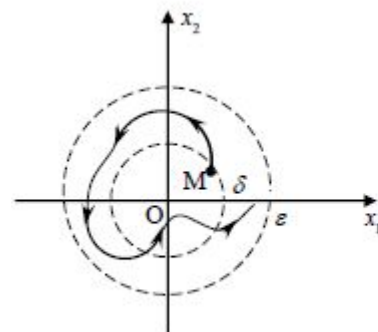


Рис. 8

Геометрически это означает, что если тривиальное решение устойчиво, то всякая траектория, определяемая начальной точкой  $M(x_1(t_0), x_2(t_0))$  и начинающаяся внутри круга (сферы) радиуса  $\delta$ , не покидает при  $t \geq t_0$  круга (сферы) радиуса  $\varepsilon$  (рис. 8) с центром в начале координат.

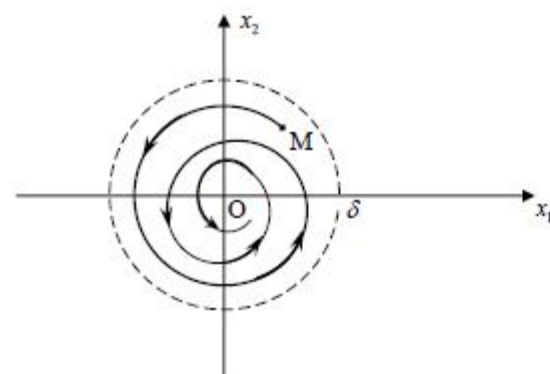


Рис. 9

Геометрическая иллюстрация этого определения – рис. 9: если тривиальное решение асимптотически устойчиво, то любая траектория, которая определяется начальной точкой  $M(x_1(t_0), x_2(t_0))$  в круге радиуса  $\delta$ , не только не выйдет из этого круга, но и будет стремиться к его центру  $O(0,0)$ .

Пусть имеем систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (1)$$

причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Точка  $x = 0$ ,  $y = 0$ , в которой правые части уравнений системы (1) обращаются в ноль, называется *точкой покоя системы* (1).

Для исследования точки покоя системы (1) надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

и найти его корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Возможны следующие случаи.

1. Корни  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения (2) вещественные и разные:
  - а)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел, рис. 32);
  - б)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел, рис. 33);
  - в)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Точка покоя неустойчива (седло, рис. 34).
2. Корни характеристического уравнения (2) комплексные:  $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$ :
  - а)  $p < 0, q \neq 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус, рис. 35);
  - б)  $p > 0, q \neq 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус, рис. 36);
  - в)  $p \geq 0, q \neq 0$ . Точка покоя устойчива (центр, рис. 37).
3. Корни  $\lambda_1 = \lambda_2$  кратные:
  - а)  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел, рис. 38, 39);
  - б)  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел, рис. 40, 41).

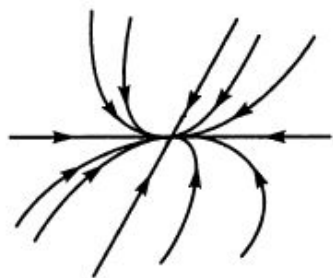


Рис. 32

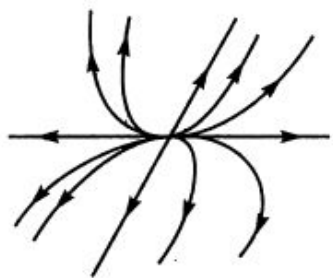


Рис. 33

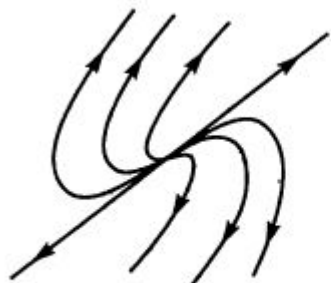


Рис. 40

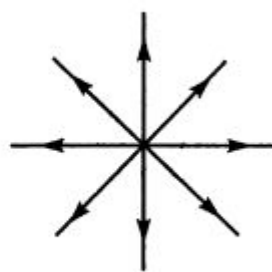


Рис. 41

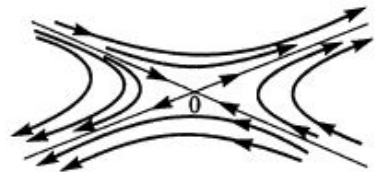


Рис. 34



Рис. 35



Рис. 36

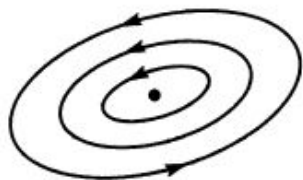


Рис. 37

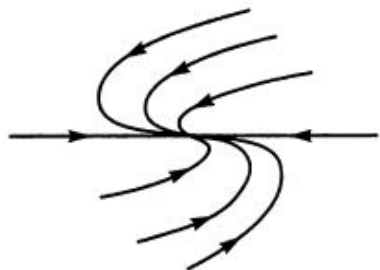


Рис. 38

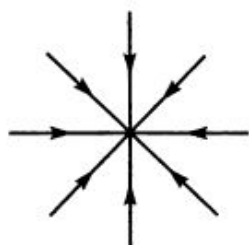


Рис. 39

З а м е ч а н и е                      Классификация  
точек покоя тесно связана с класси-  
фикацией особых точек

Действительно, в рассматриваемом  
случае система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

путем исключения  $t$  могла бы быть сведена к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \quad (4.12)$$

интегральные кривые которого совпадают с траекториями движения системы (4.6). При этом точка покоя  $x=0, y=0$  системы (4.6) является особой точкой уравнения (4.12).

$$962. y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}$$

$$962 \quad \begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = 12 + 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = -5 \quad \lambda_2 = -2}$$

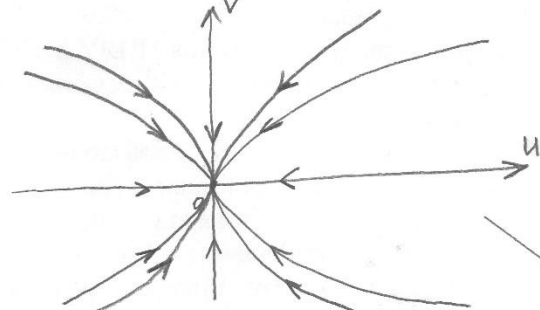
- устойчивый узел,  
асимптотические направления

$$\lambda_1 = -5: \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1 \quad -1}$$

$$\lambda_2 = -2: \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{2 \quad 1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{C_1 e^{-5t}}{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{C_2 e^{-2t}}{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

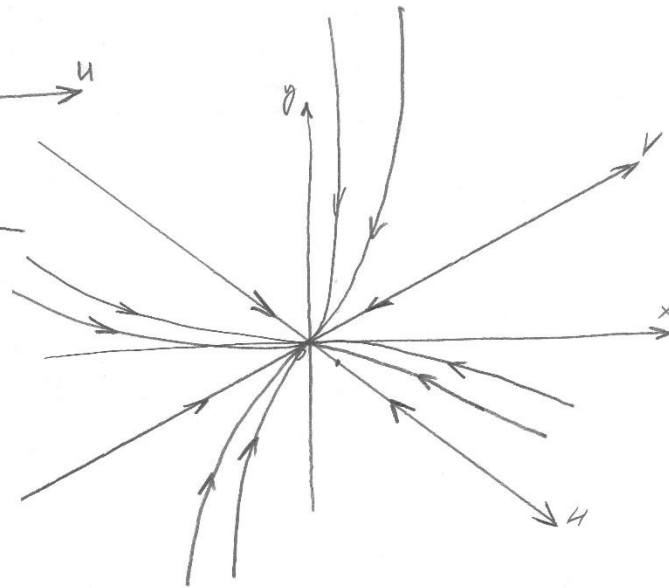
$$\begin{cases} u = C_1 e^{-5t} & e^{-t} = \frac{u^{1/5}}{C_1^{1/5}} \\ v = C_2 e^{-2t} & v = C_2 \frac{u^{2/5}}{C_1^{2/5}} \end{cases}$$



$$C_1 = 0: \begin{cases} u = 0 \\ v = C_2 e^{-2t} \end{cases} \quad v \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$C_2 = 0: \begin{cases} u = C_1 e^{-5t} \\ v = 0 \end{cases} \quad u \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{cases} u \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \\ v \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$





$$965. y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}$$

$$965 \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = -6 - \lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

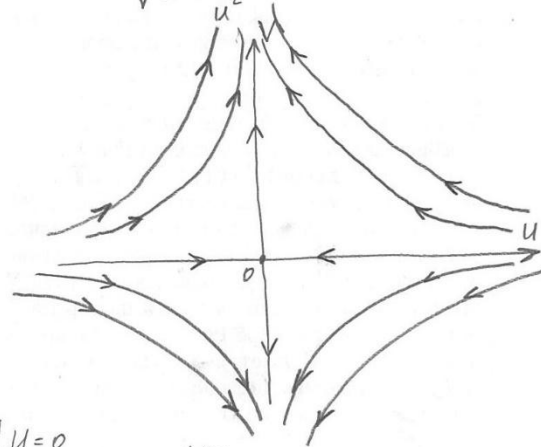
$$\boxed{\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2} \text{ - собственные значения}$$

$$\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim (1 \ -1) \quad \boxed{1 \ | \ 1}$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \sim (1 \ -4) \quad \boxed{4 \ | \ 1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 e^{-t}}_U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{C_2 e^{2t}}_V \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

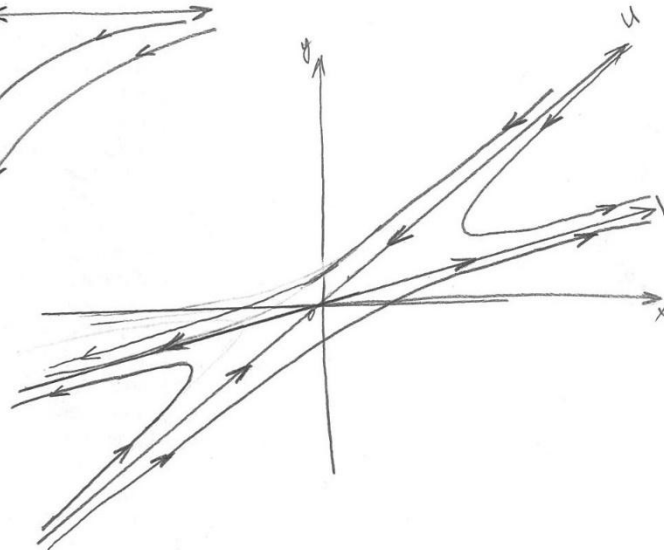
$$\begin{cases} U = C_1 e^{-t} & e^t = \frac{C_1}{U} \\ V = C_2 e^{2t} & V = \frac{C_1 C_2}{U^2} \end{cases}$$



$$C_1 = 0: \begin{cases} U = 0 \\ V = C_2 e^{2t} \end{cases} \quad V \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

$$C_2 = 0: \begin{cases} U = C_1 e^{-t} \\ V = 0 \end{cases} \quad U \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{cases} U \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \\ V \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pm \infty \end{cases}$$



975.  $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

075  $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$

$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 4 + 10 = \lambda^2 + 6 = 0$   
 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{6}i$  - центр, уст.

$\lambda_1 = \sqrt{6}i$ :  $\begin{pmatrix} -2-\sqrt{6}i & -5 \\ 2 & 2-\sqrt{6}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2-\sqrt{6}i \\ 2-\sqrt{6}i & -2 \end{pmatrix}$   $\begin{vmatrix} 2-\sqrt{6}i & -2 \end{vmatrix}$

$x_{1,2} = e^{\sqrt{6}it} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{6}i \\ -2 \end{pmatrix} = (\cos\sqrt{6}t + i\sin\sqrt{6}t) \begin{pmatrix} 2-\sqrt{6}i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\sqrt{6}t + \sqrt{6}\sin\sqrt{6}t \\ -2\cos\sqrt{6}t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin\sqrt{6}t - \sqrt{6}\cos\sqrt{6}t \\ -2\sin\sqrt{6}t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos\sqrt{6}t + \sqrt{6}\sin\sqrt{6}t \\ -2\cos\sqrt{6}t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin\sqrt{6}t - \sqrt{6}\cos\sqrt{6}t \\ -2\sin\sqrt{6}t \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = (2C_1 - \sqrt{6}C_2)\cos\sqrt{6}t + (\sqrt{6}C_1 + 2C_2)\sin\sqrt{6}t \\ y = -2C_1\cos\sqrt{6}t - 2C_2\sin\sqrt{6}t \end{cases}$

Покажем, что фазовые траектории - эллипсы.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2C_1 - \sqrt{6}C_2 & \sqrt{6}C_1 + 2C_2 \\ -2C_1 & -2C_2 \end{vmatrix} = -4C_1C_2 + 2\sqrt{6}C_2^2 + 2\sqrt{6}C_1^2 + 4C_1C_2 = 2\sqrt{6}(C_1^2 + C_2^2)$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & \sqrt{6}C_1 + 2C_2 \\ y & -2C_2 \end{vmatrix} = -2C_2x - (\sqrt{6}C_1 + 2C_2)y \Rightarrow \cos\sqrt{6}t = \frac{\Delta_1}{\Delta}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2C_1 - \sqrt{6}C_2 & x \\ -2C_1 & y \end{vmatrix} = (2C_1 - \sqrt{6}C_2)y + 2C_1x \Rightarrow \sin\sqrt{6}t = \frac{\Delta_2}{\Delta}$

$\cos^2\sqrt{6}t + \sin^2\sqrt{6}t = 1$   
 $\frac{(2C_1x + (\sqrt{6}C_1 + 2C_2)y)^2}{(2\sqrt{6}(C_1^2 + C_2^2))^2} + \frac{(2C_1x + (2C_1 - \sqrt{6}C_2)y)^2}{(2\sqrt{6}(C_1^2 + C_2^2))^2} = 1$  - ур-ие линии второго порядка (1)

$x(t), y(t)$  - периодические ф-ции,  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \Rightarrow$  траектории замкнуты (2)

(1) + (2)  $\Rightarrow$  эллипсы

Найдем прямые, на которых расположатся оси эллисов.

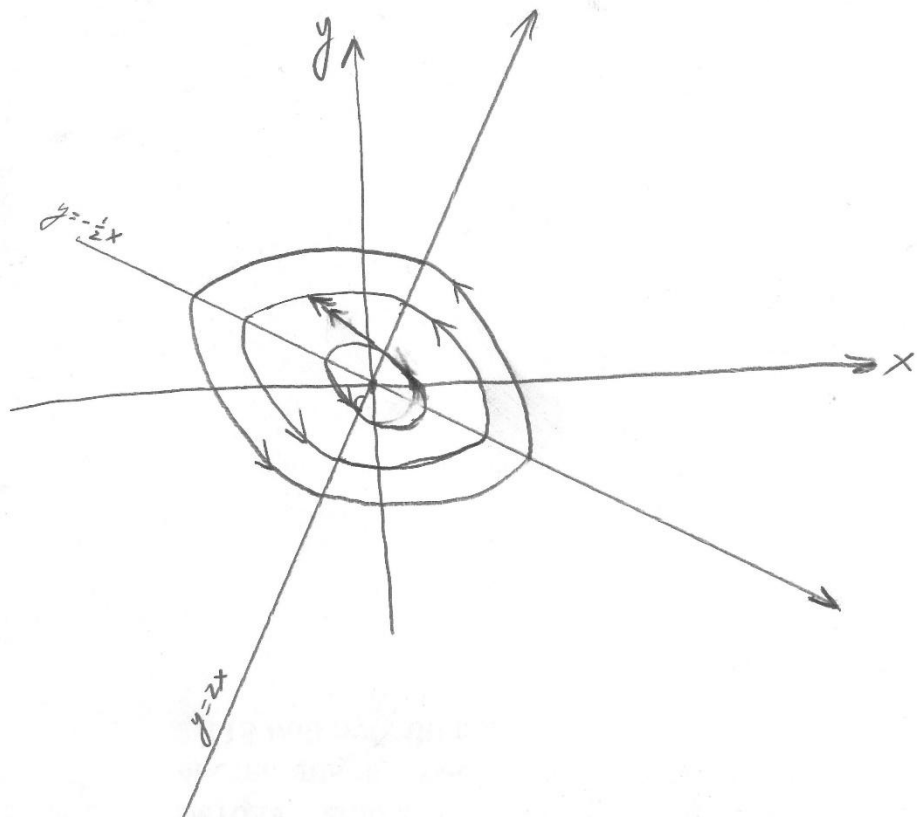
Найдем экстремум ф-ции:  $f(x, y) = x^2 + y^2 (=z^2)$

$$\frac{df}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2x(-2x - 5y) + 2y(2x + 2y) = -4x^2 - 10xy + 4xy + 4y^2 \equiv$$

экстремуми на прямой  $y = kx$

$$\equiv 4y^2 - 6xy - 4x^2 = 4k^2x^2 - 6kx^2 - 4x^2 = 2x^2(2k^2 - 3k - 2) = 0$$

$$k_1 = 2, -\frac{1}{2}$$



Найдем направление движения по траектории:

Вектор скорости:

$$\vec{V} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\} = \{-2x - 5y, 2x + 2y\}$$

$$\text{В т. } (1, 0) : \vec{V} = \{-2, 2\}$$

$$963. y' = \frac{y-2x}{y}$$

$$963 \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$D = 1 - 8 = -7$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

- гооржс  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow$  расх.

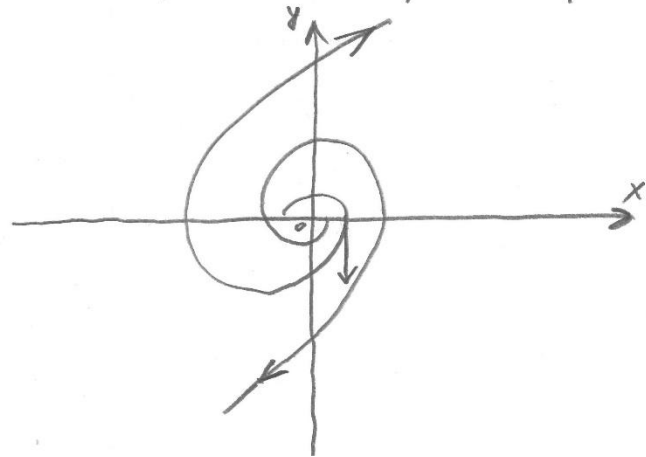
$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i & 1 \\ 2 & 1 + \sqrt{7}i \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 + \sqrt{7}i \end{vmatrix}$$

$$x_{1,2} = e^{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{7}i \end{pmatrix} = e^{\frac{t}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t + i \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{7}i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t \\ \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t + \sqrt{7} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t \end{pmatrix} + i e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t \\ \sqrt{7} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t + \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t \\ \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t - \sqrt{7} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t \end{pmatrix} + C_2 e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t \\ \sqrt{7} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t + \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t \end{pmatrix}$$



$$\bar{V} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\} = \{y, -2x + y\}$$

$$B.T. (1, 0) : \bar{V} = \{0, -2\}$$

$$976. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$$

$$976 \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 3-3\lambda-\lambda+\lambda^2+1 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = 2$  - вырожденный узел,  
кули.

$$X_{1,2} = (\alpha + \beta t) e^{2t}$$

$$\dot{X} = (\lambda \alpha + \lambda \beta t + \beta) e^{2t} = A(\alpha + \beta t) e^{2t}$$

$$\begin{cases} A\beta = \lambda\beta \\ A\alpha = \lambda\alpha + \beta \end{cases}$$

1)  $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2)  $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

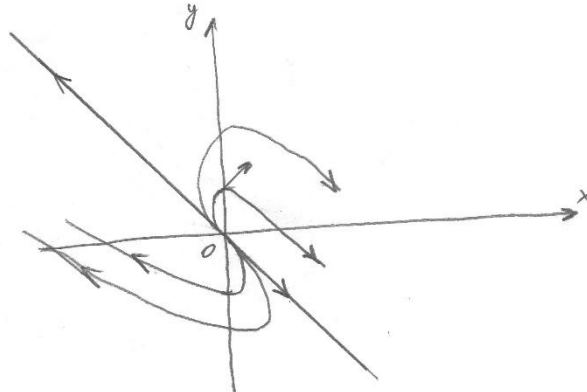
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] e^{2t} = (C_1 + C_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{cases} x = e^{2t} (C_1 + C_2 + C_2 t) \\ y = e^{2t} (-C_1 - C_2 t) \end{cases}$$

$$C_2 = 0: \begin{cases} x = C_1 e^{2t} \\ y = -C_1 e^{2t} \end{cases} \quad y = -x$$

$\tau(1, 0) \quad \bar{V} = \{3, -1\}$

$\tau(0, 1) \quad \bar{V} = \{1, 1\}$



$$969. y' = \frac{y}{x}.$$

$$969 \quad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

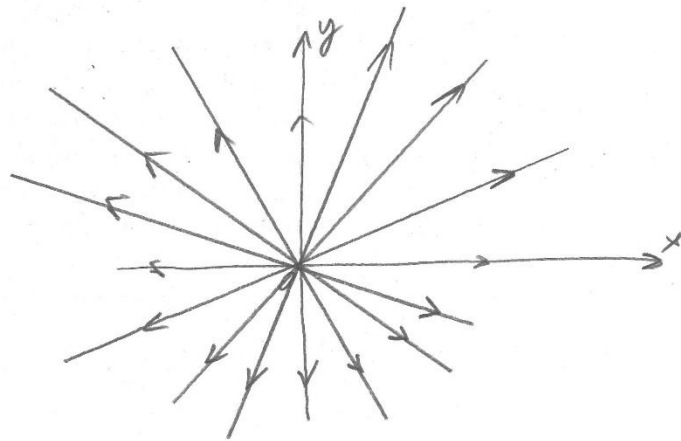
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^2 - \text{дискретический узел, неуст.}$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

1	0
0	1

$$\begin{cases} x = C_1 e^t \\ y = C_2 e^t \end{cases}$$

$$y = \frac{C_2}{C_1} x$$



$$977. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -6x + 4y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 12 + \lambda^2 - 7\lambda - 12 = \lambda(\lambda - 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7 \quad \text{неуст}$$

$$\lambda_1 = 0 : \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \sim (3 \quad -2)$$

$$\boxed{2 \mid 3}$$

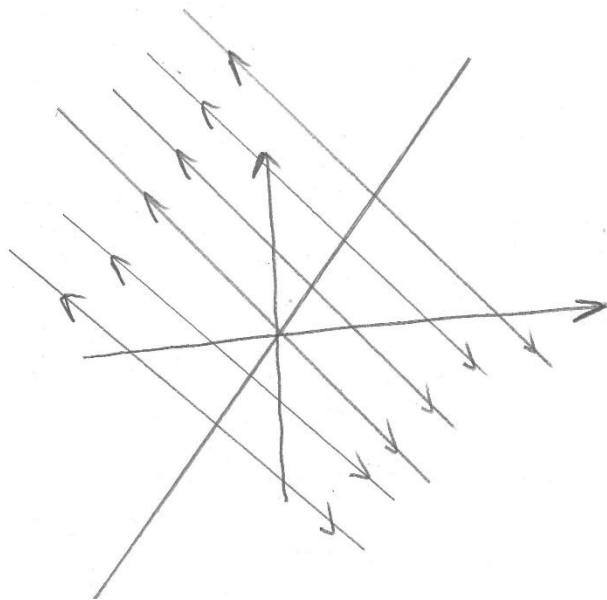
$$\lambda_2 = 7 : \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \sim (2 \quad 1)$$

$$\boxed{1 \mid -2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{7t}$$

$$\begin{cases} x = 2C_1 + C_2 e^{7t} \\ y = 3C_1 - 2C_2 e^{7t} \end{cases}$$

$$y = 7C_1 - 2x$$



978.  $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 \quad \lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 : \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \sim (-2 \ 1) \quad \boxed{1 \ 2}$$

$$x_{1,2} = \alpha + \beta t$$

$$\dot{x} = \beta = A(\alpha + \beta t)$$

1)  $\beta = 0, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \beta = A\alpha \\ 0 = A\beta \end{cases}$$

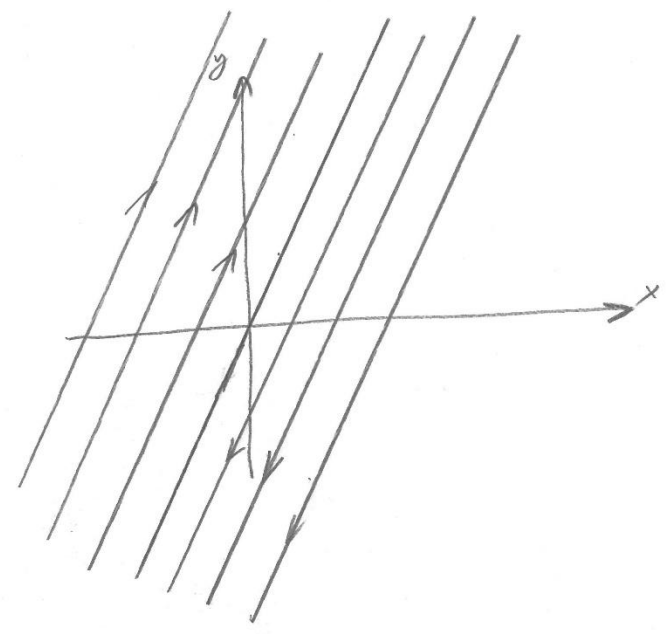
2)  $\beta \neq 0; \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim (-2 \ 1 \ 1) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \right]$$

$$C_2 = 0 : \begin{cases} x = C_1 \\ y = 2C_1 \end{cases} \text{ - точки покоя ; } y = 2x$$

$$C_2 \neq 0 : \begin{cases} x = C_1 + C_2 t \\ y = 2C_1 + C_2 + 2C_2 t = 2x + C_2 \end{cases}$$





# Домашнее задание

961-978 (остальные)