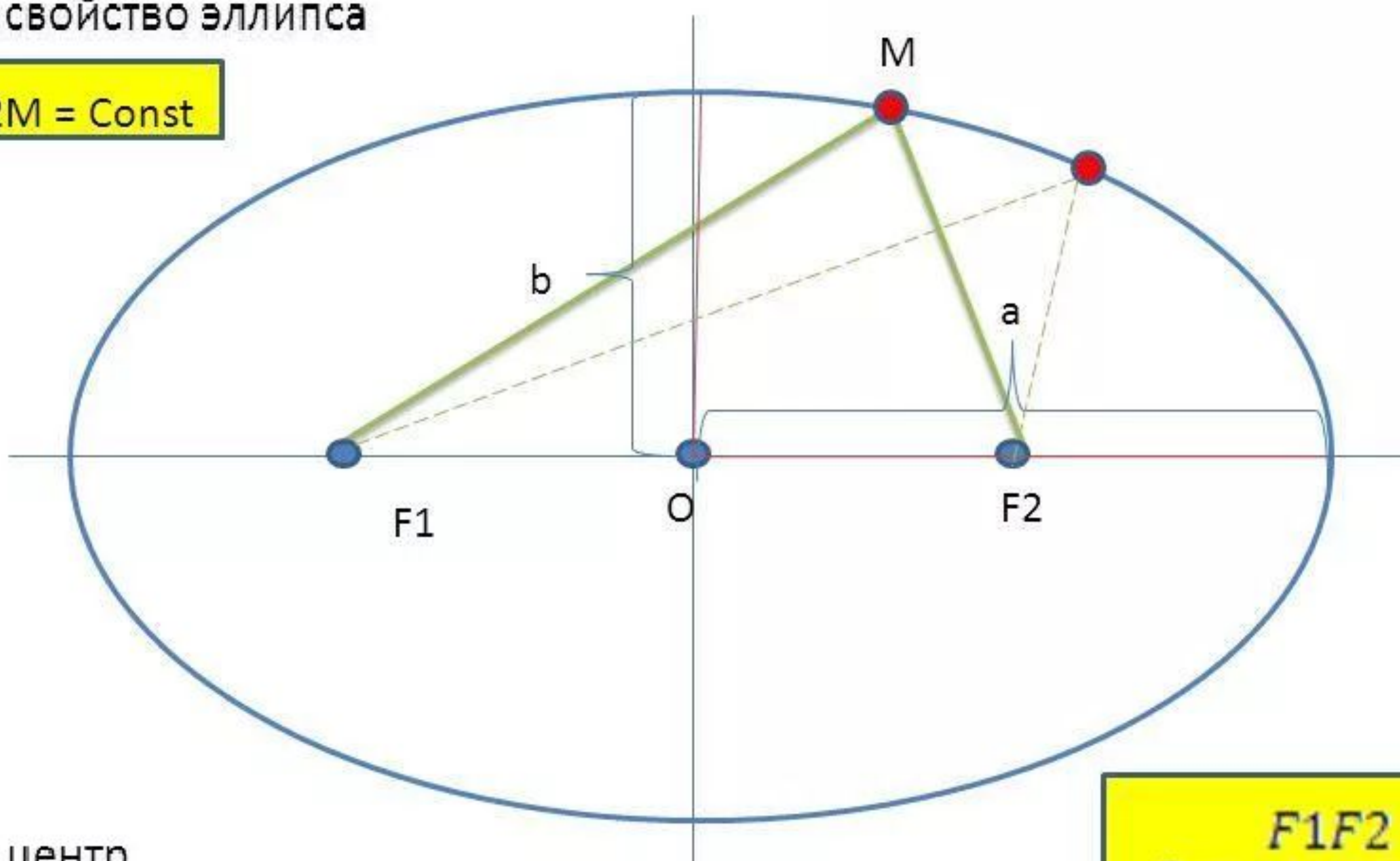
Динамика движения материальной точки по окружности. Тяготение.

Эллипс

Главное свойство эллипса

F1M +F2M = Const



O– центр

a – большая полуось

b – малая полуось

F1 и F2 – фокусы эллипса

$$\varepsilon = \frac{F1F2}{a}$$

эксцентриситет

Особая категория движения – это движение по окружности. Согласно второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}_ц$. Для сообщения центростремительного ускорения должна присутствовать сила, сообщающая телу это ускорение. Это может быть сила упругости нити, сила трения (при повороте автомобиля), сила упругости (при повороте поезда) и т.д. Особый вид движения по окружности – движение под действием силы тяготения.

В 1609-1619 гг. великий немецкий ученый Иоганн Кеплер, изучая движение Марса, по наблюдениям своего учителя Тихо Браге сформулировал три закона движения планет:

1. Орбиты, по которым движутся планеты, представляют собой эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. Радиус – вектор планеты, проведенный из Солнца, очерчивает за одинаковые промежутки времени одинаковые площади (см. рис. 1).

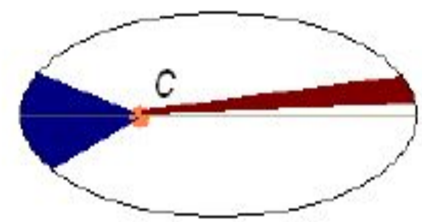


Рис. 1

3. Для всех планет отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси эллиптической орбиты имеет одно и то же значение. $\frac{T^2}{a^3} = const$

Данные законы справедливы для описания движения любых тел (включая искусственные спутники) в поле тяготения.

На основании его работ великий английский физик Исаак Ньютон в 1687 г. сформулировал закон всемирного тяготения, которому было абсолютно ясно, что для подобного движения должна существовать сила, которая удерживает тела на орбите.

Две материальные точки притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ *(1)*

Можно показать, что подобная формулировка справедлива и для расчета силы притяжения между сферическими телами, как будто бы их масса была сосредоточена в их центрах.

Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной. Ее значение зависит от выбора системы единиц. В СИ $G=6{,}673*10^{-11}$ Н*м^2/кг^2. Экспериментально значение G получил в 1798 г. английский ученый Кавендиш. Суть его гениального опыта состоит в следующем :

На тонкой кварцевой нити 1 (рис. 2), на которой подвешен легкий стержень 2, жестко закреплено небольшое зеркальце 3. Луч света 4, падая на зеркальце, отражается от него, и попадает на шкалу 5. При повороте стержня луч света, перемещаясь по шкале, регистрирует угол закручивания нити. На концах стержня закреплены

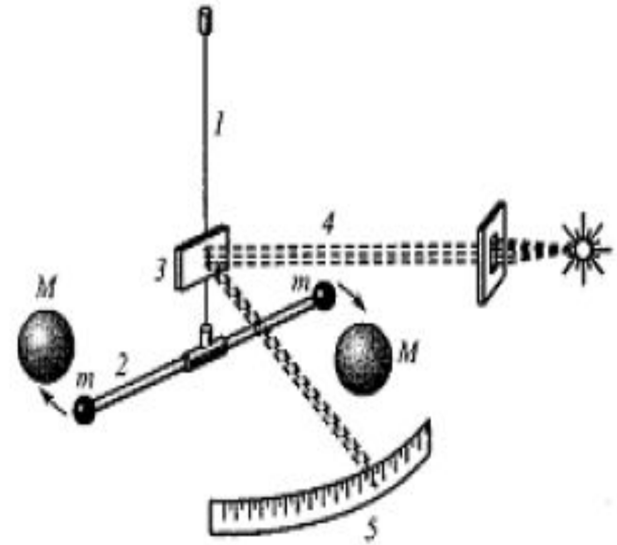


Рис 2

два свинцовых шара с массами m каждый. К ним подносят два симметрично расположенных шара массами М каждый. При этом стержень начинает поворачиваться до тех пор, пока сила упругости нити не уравновесит силу гравитационного притяжения шаров. Данный способ измерения позволяет измерять очень малые деформации нити, и вместе с тем малые силы, так как чувствительность прибора зависит от расстояния от зеркальца до шкалы, увеличивая его, повышается точность измерения углов.

Мы видим, что сила всемирного тяготения пропорциональна массам тел. Определить массу тела можно по силе притяжения к другому телу, например к Земле. Способ определение прост – взвешивание. Определенная таким образом масса называется гравитационной. Но масса определяется из второго закона Ньютона, и является мерой инертностью. Совпадение инертной и гравитационной масс многократно подтверждено опытом, хотя в классической механике их совпадение не имеет физического смысла и является случайным. В созданной Эйнштейном релятивисткой теории тяготения равенство гравитационной и инертной масс является принципиальным и положено в основу общей теории относительности.

Сила тяжести.

Силой тяжести материальной точки называется сила $F_т$, равная векторной сумме между силой тяготения ($F_г$) и центробежной силой инерции ($F_и$), обусловленной участием материальной точки в суточном вращении Земли) (рис. 6).

$$F_Г = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$F_и = m\omega^2 R_з \cos\varphi$ (φ- географическая широта места, ω- угловая скорость суточного вращения Земли, $R_з$- ее радиус). В проекцию на нормаль к поверхности Земли:

$F_и = m\omega^2 R з \cos^2 \varphi$

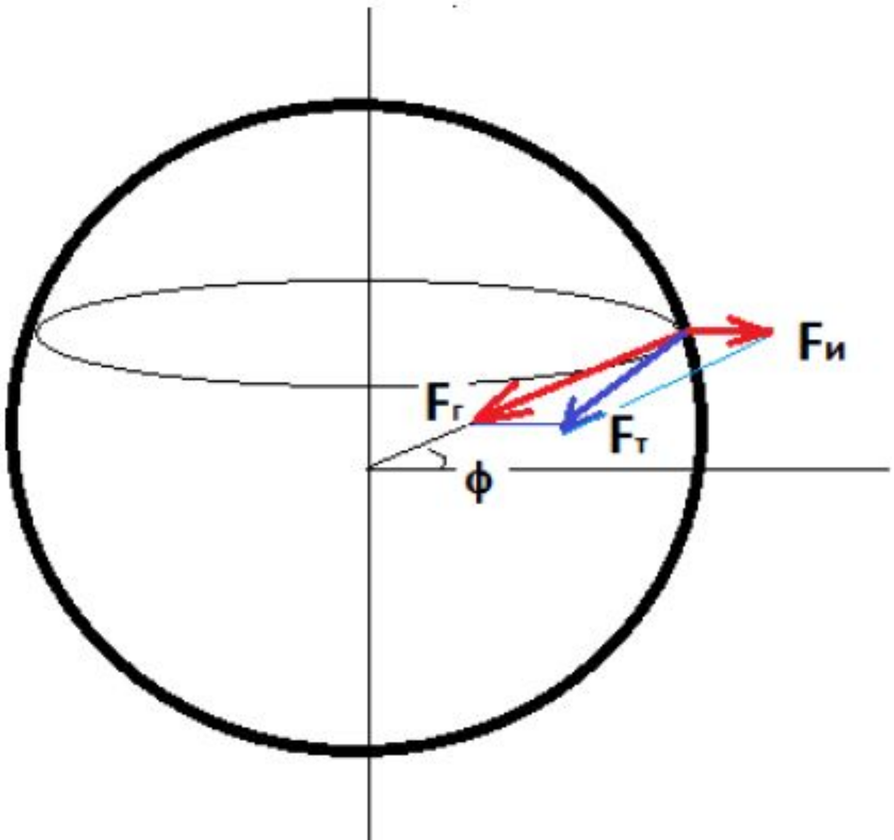


Рис. 6

Свободное падение.

Если тело движется вблизи поверхности Земли, только под действием силы тяжести, то такое движение называют *свободным падением*. Применим второй закон Ньютона F=ma , где F – сила всемирного тяготения масса тела, M – масса земли, $R_з$ – радиус Земли:

$F_T = mg$ Отсюда ускорение свободного падения $g = \dfrac{\vec{F}_Г + \vec{F}_и}{m}$

Приближенно можно считать, что $g = G\dfrac{M}{R^2_з}$ Ускорение свободного падения неодинаково в различных точках Земли и лежит в пределах от $g \approx 9{,}78$ м/с^2 на экваторе до $g \approx 9{,}83$ м/с^2 на полюсах. Это объясняется вращение Земли (будем говорить на следующей лекции), сплюснотостью Земли возле полюсов, от плотности залегающих в этом месте пород (это используется геологами для поиска полезных ископаемых). Величина ее так же зависит от высоты над уровнем моря. На широте Москвы будем принимать значение $g=9{,}8$ м/с^2 или округлять до 10 м/с^2 при решении задач. Точка приложения силы тяжести тела, то есть точка приложения равнодействующей сил тяжести всех частиц тела, называется центром тяжести.

Экспериментально центр тяжести для плоского тела можно найти следующим способом: подвесим тел за любую точку и после установления равновесия проведем вертикальную линия через точку подвеса. Центр тяжести лежит на этой линии, так в силу условия равновесия сумма всех сил, а это натяжение нити и сила тяжести, равна 0. То есть $m\vec{g} = -\vec{N}$ Линии действия сил лежат на одной прямой, которая проходит через центр тяжести. Повторяя опыт, изменяя точку подвеса, проводим вторую линию, точка их пересечения и будет центром тяжести.

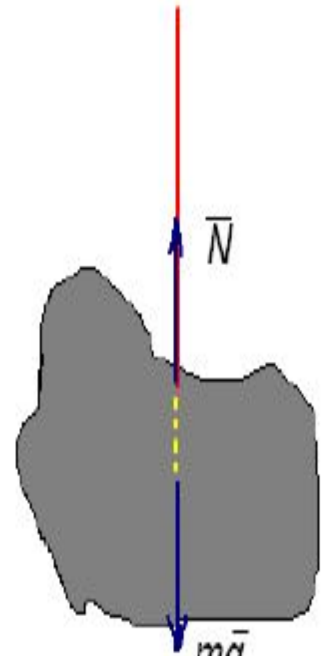


Рис 3

Вес тела.

Сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или растягивает подвес, называется весом тела.

Вес тела приложен не к самому телу а к опоре или подвесу! То есть вес является частным случаем силы упругости. Если тело и опора неподвижны относительно Земли или движутся без ускорения, то вес равен силе тяжести. Рассмотрим случай движения с ускорением. Пуст тело находится в лифте, движущемся с ускорением **а** вниз (рис 4). Напишем второй закон Ньютона в проекции на ось Y: $mg - N = ma$ Так как по третьему

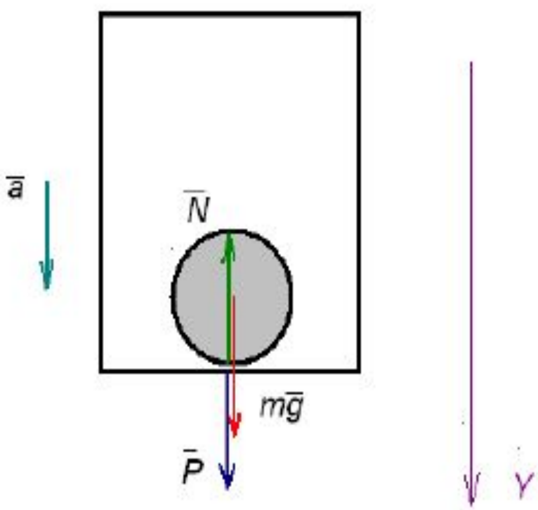


Рис .4

закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, то можно выразить величину веса тела P=m(g-a). Мы видим, что вес тела в данном случае меньше силы тяжести и при $\vec{a} = \vec{g}$ вес равен 0 (невесомость). Аналогично легко показать, при движении ускорением, направленном вверх P=m(g+a). Такие перегрузки испытывают, например космонавты при старте ракеты. Интересно отметить, что для того, чтобы вес изменялся не обязательно движение должно быть вдоль одной прямой. Эффект уменьшения или увеличения веса можно наблюдать и при движении по окружности.

Первая космическая скорость.

Скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником планеты, называют первой космической скоростью.

По второму закону Ньютона $ma = G\frac{Mm}{(R+H)^2}$, где R+H - радиус орбиты спутника (H – высота над поверхности Земли). Так a=V^2/(R+H), то $V = \sqrt{G\frac{M}{R+H}}$ скорость зависит от радиуса орбиты. Рассчитаем значение первой космической скорости вблизи поверхности Земли (H=0). $\frac{v^2}{R} = G\frac{M}{R^2}; \quad \frac{v^2}{R} = g; \quad v_1 = \sqrt{Rg}; \quad R = 6{,}4\cdot10^5\ м; отсюда \quad v \approx 8 км/с$

Однако реально движения на малых высотах невозможно из-за сильного сопротивления воздуха. Высота над Землей должна превышать 200 км. При движении по орбите космонавты испытывают состояние невесомости, так движение происходит с центростремительным ускорением равным g (для данной высоты).

Пример решения задачи на законы Кеплера.

Определить период обращения спутника по эллиптической орбите, апогей которой равен трем радиусам Земли, а перигей равен радиусу Земли. Найти отношение скоростей в апогее и перигее.

Решение:

Для ответа на первый вопрос применим третий закон Кеплера: $\dfrac{T_1^{\ 2}}{a_1^{\ 3}} = \dfrac{T_2^2}{a_2^3}$ T_1-период обращения по данной орбите, a_1=2R_3 – большая полуось данной орбите.

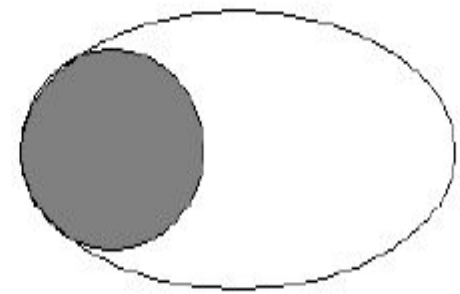


Рис 5

Для сравнения можно взять параметры T_2 и a_2 для любой произвольной орбиты, удобно для орбиты равной радиусу Земли, тогда a_2=R_3,

$$T_2 = \frac{2\pi R_3}{v_1} = \frac{2\pi R_3}{\sqrt{R_{3_{зз}}\, g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_3}{g}}$$ подставляя в исходную формулу получим $T_1 = 4\pi\sqrt{\dfrac{2R_3}{g}}$.

Для ответа на второй вопрос используем второй закон Кеплера: площадь сектора, очерчиваемый спутником вблизи апогея за малый промежуток времени t равен $3R_3 v_\alpha t$. За то же самое время в перигее спутник очертит площадь $R_3 v_\pi t$. Так как площади равны, то $\dfrac{v_\alpha}{v_\pi} = \dfrac{R_\pi}{R_\alpha} = \dfrac{1}{3}$

Вторая космическая скорость.

Второй космической скоростью называется скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно преодолела притяжение Земли и стало спутником Солнца.

Получим значение второй космической скорости для запуска ракеты с поверхности Земли. По закону всемирного тяготения: $F = G\frac{Mm}{R^2}$. F→0 если R→∞. Следовательно, на бесконечности полная механическая энергия тела должна быть неотрицательной. По закону сохранения механической энергии $\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} \geq 0$. Минимальная скорость:

$v = \sqrt{2G\frac{M}{R_з}}$ или $v = v_I\sqrt{2}$

V_{II}= 11,2 км/с

Третья космическая скорость

Скорость относительно Земли, которую необходимо сообщить ракете, чтобы она навсегда покинуло пределы Солнечной системы, называется третьей космической скоростью. Она минимальна, если это направление совпадает с направлением орбитального движения Земли вокруг Солнца, и максимальна, когда эти направления противоположны. Орбитальная скорость Земли равна:

$$v_3 = \sqrt{\frac{GM_C}{R_{ЗС}}} \approx 30 \text{ км/с}.$$

Здесь M_C – масса Солнца, $R_{ЗС}$ - радиус орбиты Земли. Для полета в бесконечность с орбиты Земли нужна вторая «солнечная» космическая скорость:

$$v_{2C} = \sqrt{\frac{2GM_C}{R_{ЗС}}} = \sqrt{2}v_3 = 42.1 \text{ км/с}.$$

Дополнительно к скорости Земли ракете нужно сообщить скорость, равную 42 – 30 = 12 км/с. Ракета при старте с Земли должна набрать скорость

$$v = \sqrt{(11.2)^2 + (12)^2} = 16.4 \text{ км/с}.$$