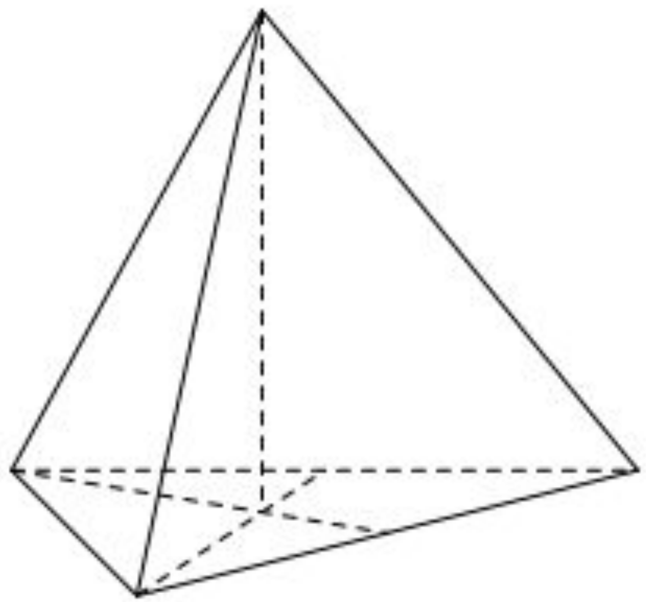
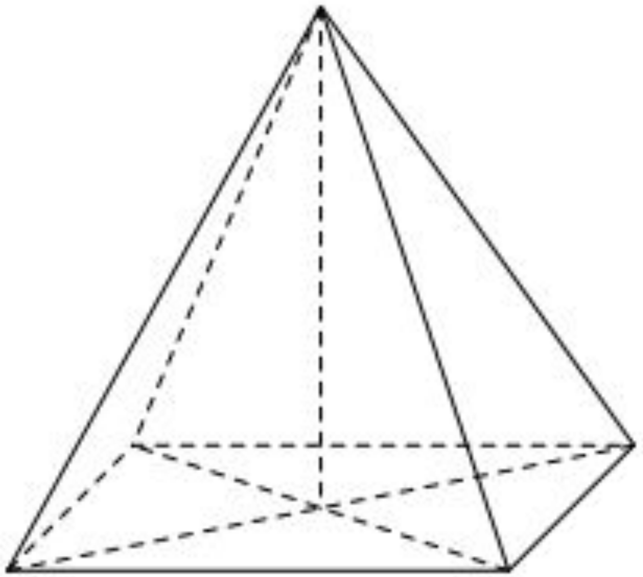
Стереометрия

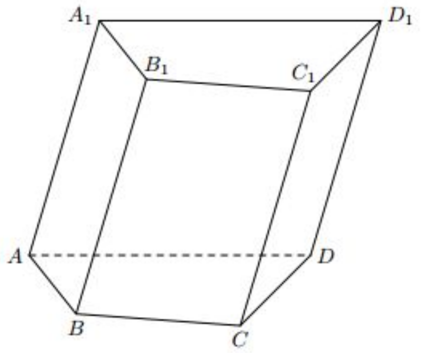
Базовые понятия
Определения

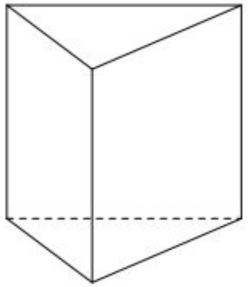
- **Правильная пирамида** — это пирамида, у которой боковые рёбра равны, а в основании лежит правильный n-угольник
- **Правильный тетраэдр** — это треугольная пирамида, все рёбра которой равны.
- **Объём пирамиды** вычисляется по формуле: $V = 1/3\ Sh$, где S — площадь основания, h — высота пирамиды
- **Прямая призма** — это призма, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскостям оснований.
- **Правильная n-угольная призма** — это прямая призма, основанием которой служит правильный n-угольник.
- **Параллелепипед** — это призма, основанием которой служит параллелограмм.
- **Объём призмы** вычисляется по формуле: $V = Sh$, где S — площадь основания призмы, h — её высота.

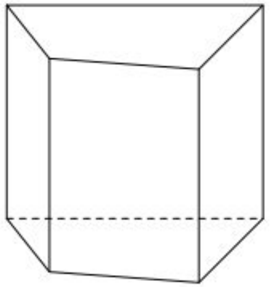
Как будем это рисовать?

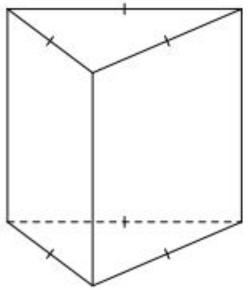


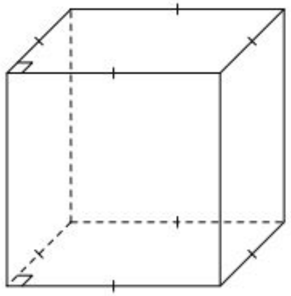



A_1
D_1
B_1
C_1
A
D
B
C









Как будем это рисовать? Алгоритм

- 1) рисуем основание пирамиды;
- 2) строим центр основания, проводя медианы треугольника или диагонали квадрата;
- 3) из центра ведём вверх высоту и отмечаем на ней вершину пирамиды;
- 4) соединяем вершину пирамиды с вершинами основания.

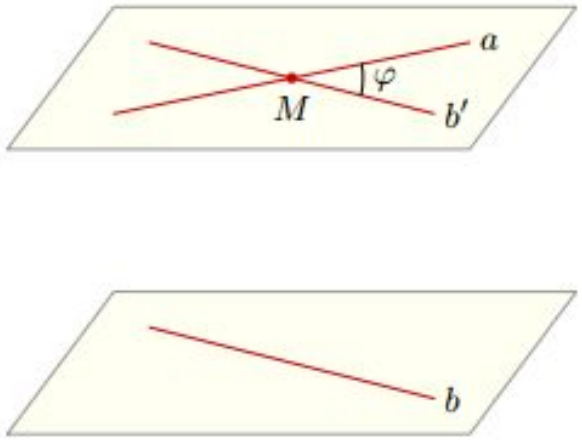
Взаимное расположение прямых в пространстве

Существует три варианта взаимного расположения двух прямых в пространстве: прямые могут быть

- пересекающимися,
- параллельными
- скрещивающимися.

Угол между скрещивающимися прямыми

- Скрещивающиеся прямые не пересекаются. Можно ли в таком случае говорить об угле между ними?



угол между скрещивающимися прямыми a *и* b *— это угол между прямой* a *и прямой* b', *параллельной* b *и пересекающей* a.

Пример

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми: а) A_1C_1 и BD; б) A_1B и B_1C.

Параллельность прямой и плоскости

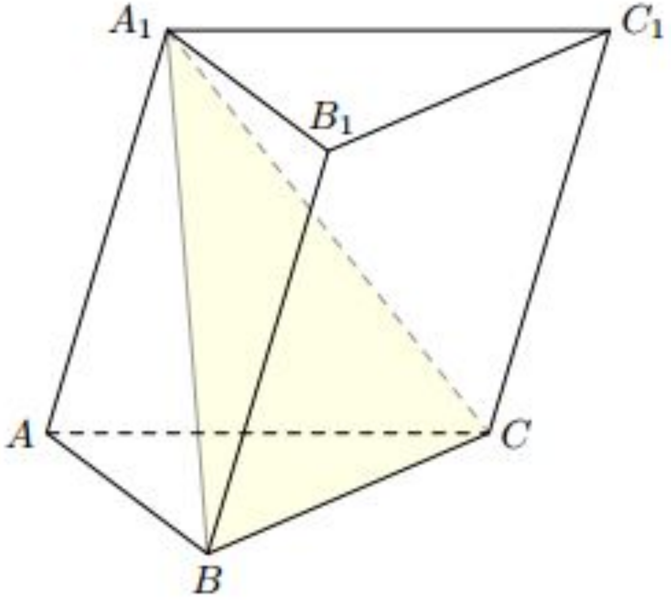
Как распознать случай параллельности прямой и плоскости?

- Для этого имеется замечательно простое утверждение.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая l параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то прямая l параллельна этой плоскости.

Давайте посмотрим, как работает этот признак.

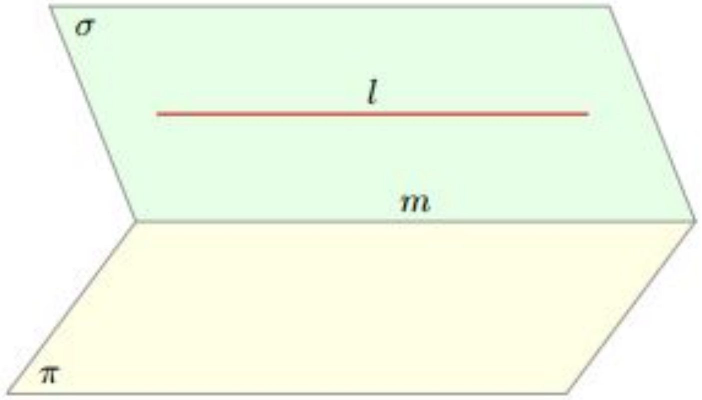
- Пусть ABCA1B1C1 — треугольная призма, в которой проведена плоскость A1BC



ОЧЕНЬ ВАЖНАЯ ТЕОРЕМА

- Теорема о пересечении двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.

Теорема. Пусть прямая l параллельна плоскости π. Если плоскость σ проходит через прямую l и пересекает плоскость π по прямой m, то $m \parallel l$



Для чего она нужна?

Пример

- В правильной четырёхугольной пирамиде ABCDS (с вершиной S) точка M — середина ребра SC. Постройте сечение пирамиды плоскостью ABM

Перпендикулярность прямой и плоскости

- Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Мы же не будем перебирать все прямые?!

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

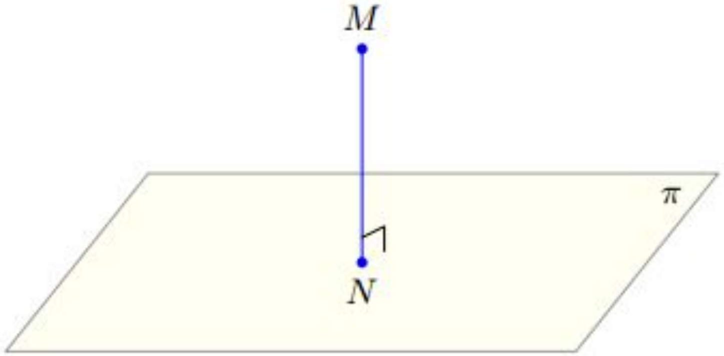
- Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Пример

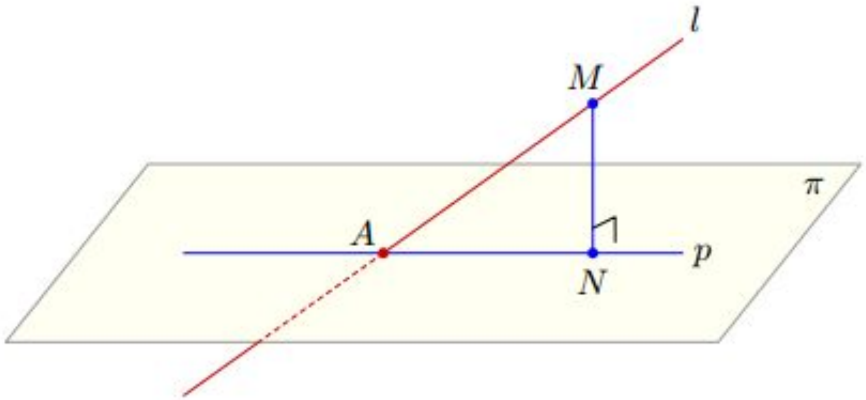
- Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны.

Рассказываю алгоритм)

Теорема о трёх перпендикулярах

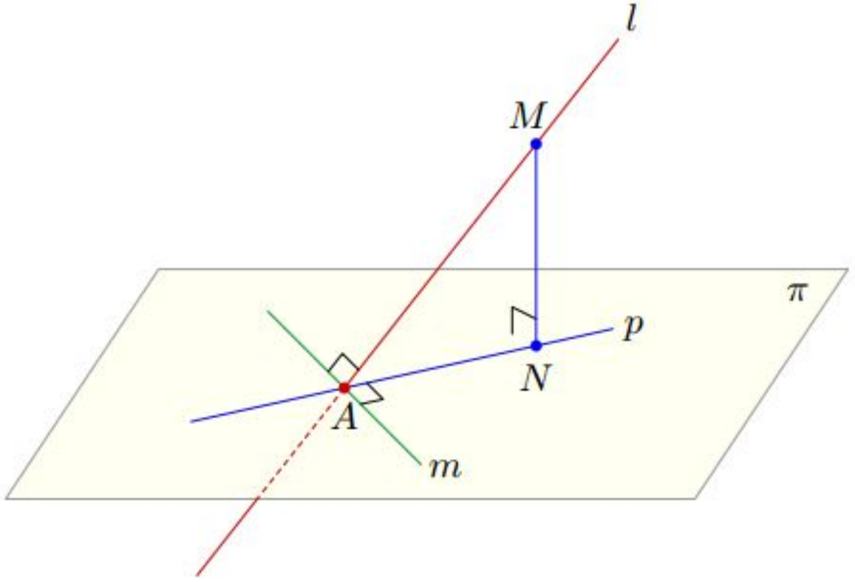


Перпендикуляр



Наклонная и проекция наклонной

Теорема о трёх перпендикулярах. Прямая на плоскости перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной.



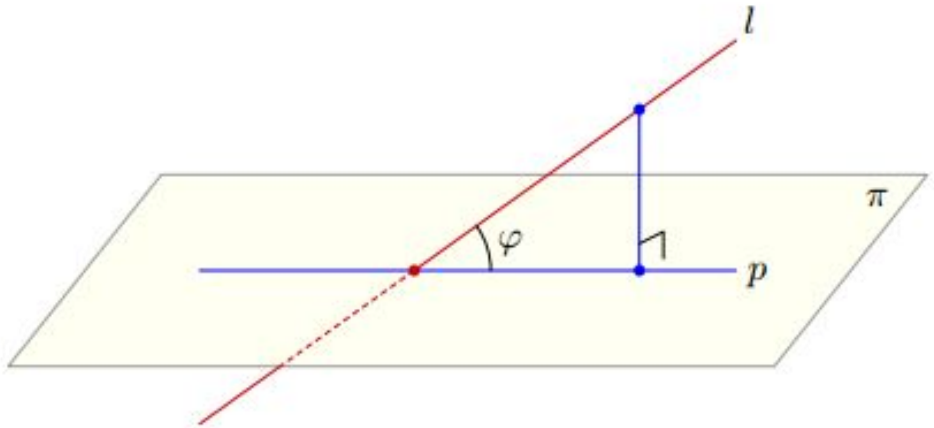
1. *Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна проекции наклонной.* Символически: $m \perp l \Rightarrow m \perp p$.

2. *Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной.* Символически: $m \perp p \Rightarrow m \perp l$.

Задача

- Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны.

Угол между прямой и плоскостью



если прямая является наклонной,

то **угол между прямой и плоскостью есть угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.**

Задача

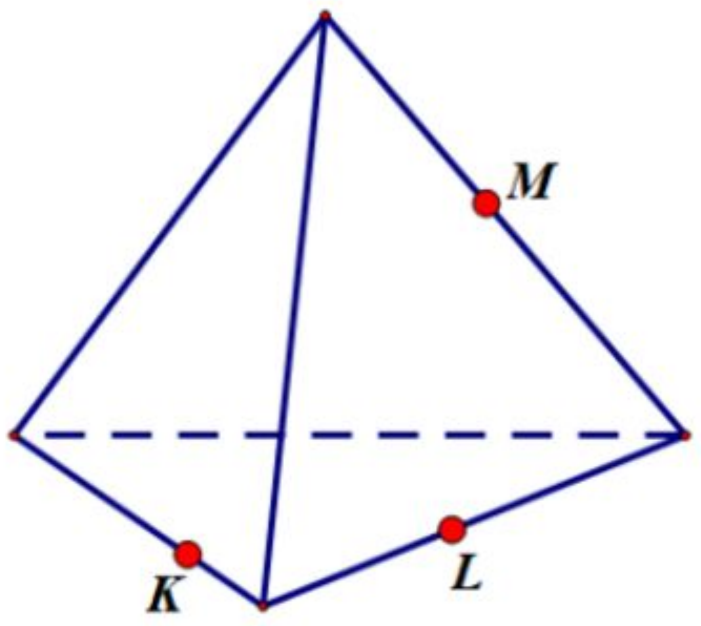
- В правильном тетраэдре найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания

Подходим к сечению

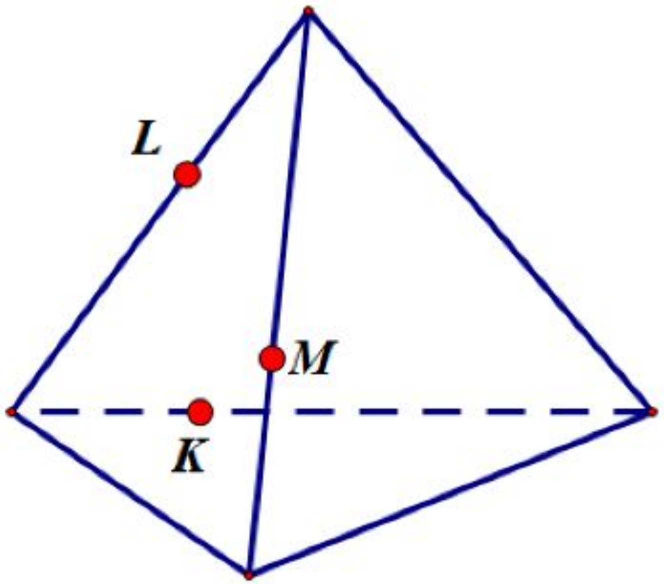
- 1
- 2
- 3

Постройте сечения, проходящие через точки $K, \ L, \ M$.

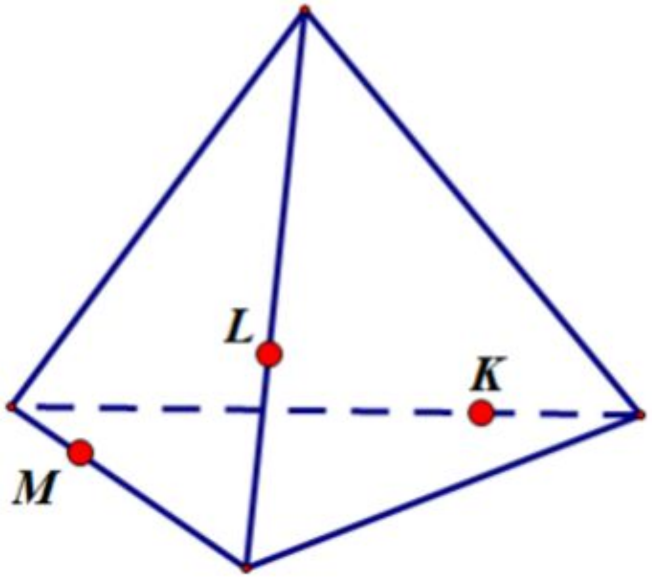
Задание 1:

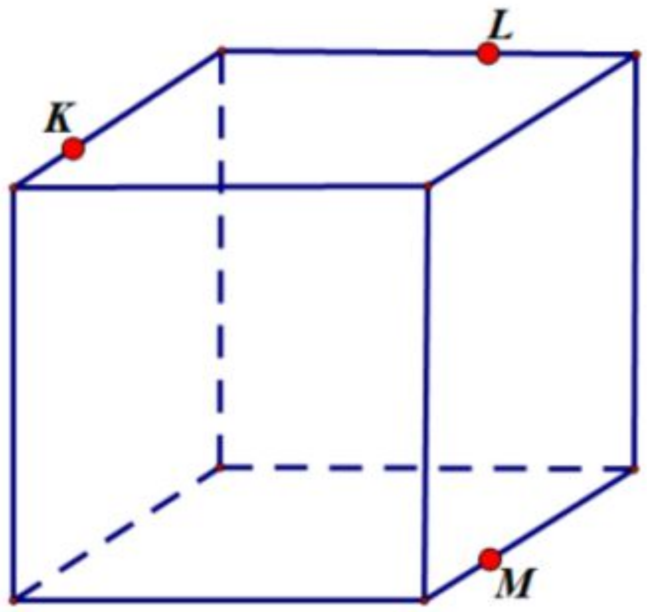


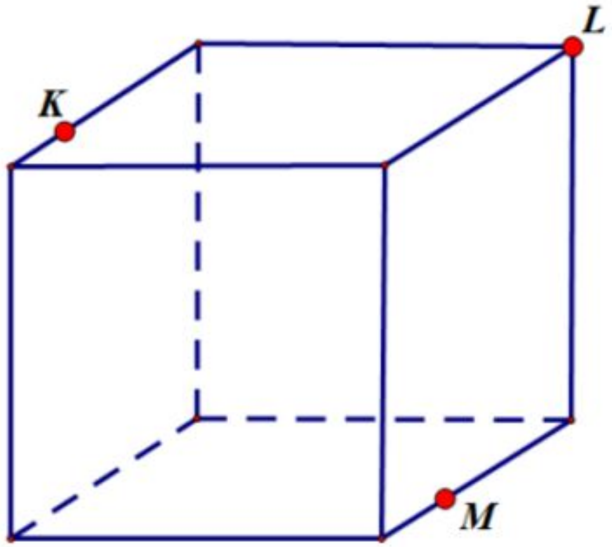
Задание 2:

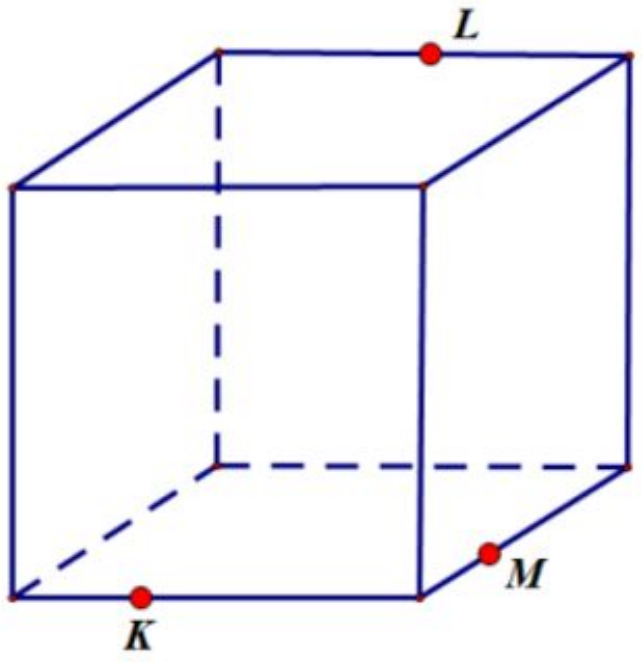


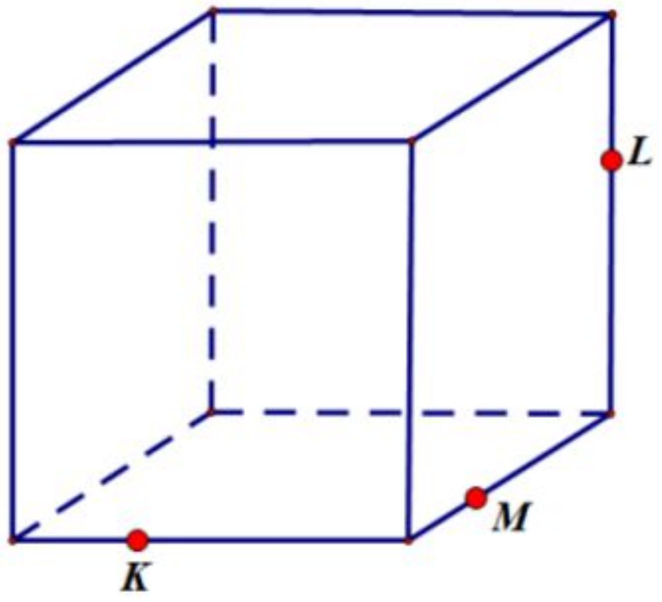
Задание 3:

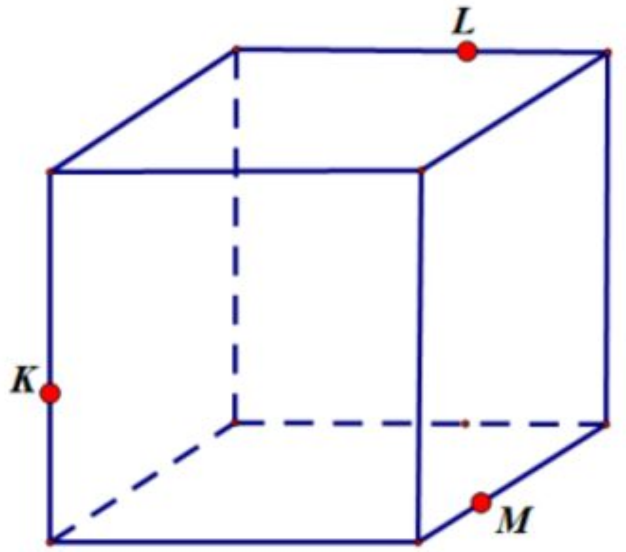



L
K
M


K
L
M


L
M
K


L
M
K

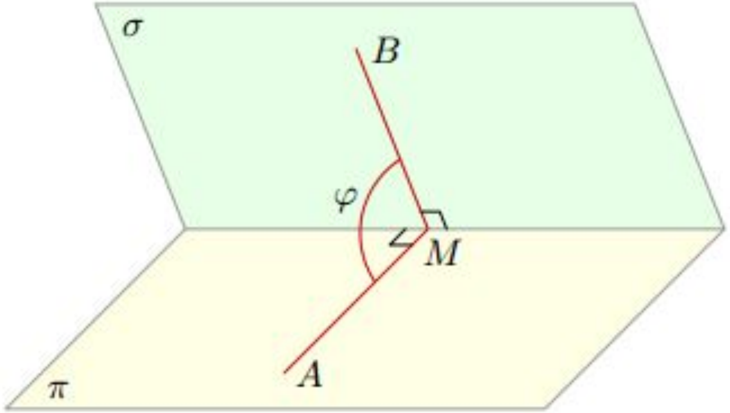

L
K
M

Выводы по сечениям

Тоже оч важно

- если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Угол между плоскостями (острый)



Полученный угол AMB — это *линейный угол двугранного угла*. Угол $\varphi = \angle AMB$ как раз и является угловой величиной нашего двугранного угла.

Определение. Угловая величина двугранного угла — это величина линейного угла данного двугранного угла.

Задача

- Найдите угол между двумя гранями правильного тетраэдра.

Расстояния - это перпендикуляры