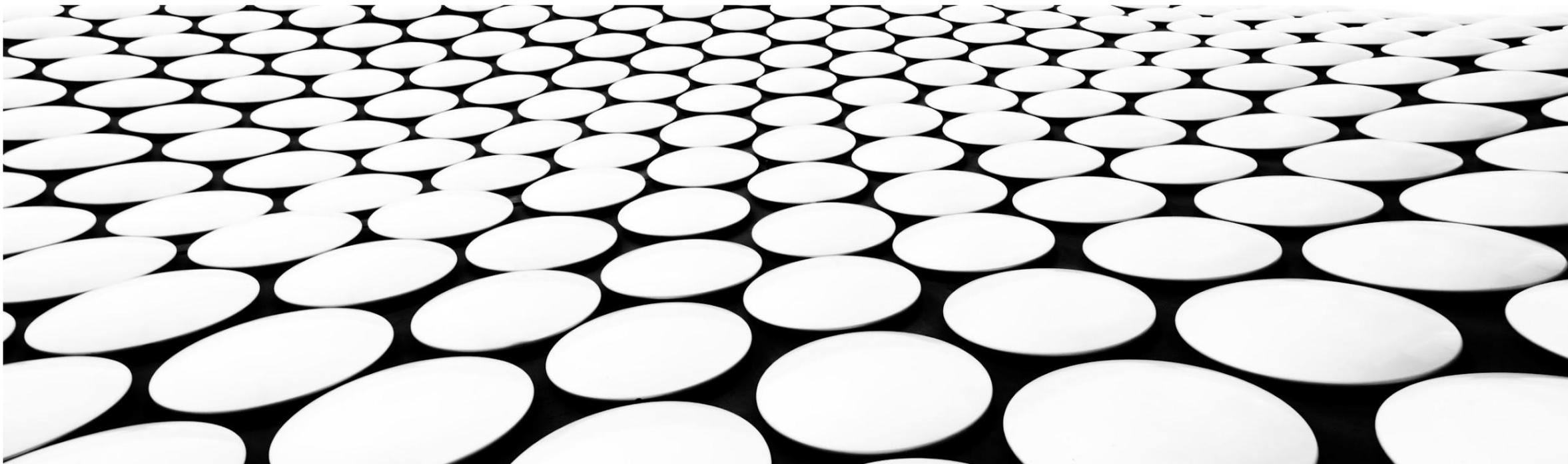


---

# ОПРЕДЕЛИТЕЛИ



# МАТРИЦА И ЕЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Матрица – таблица, определитель – число.

---

# ОБОЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

$$\Delta = \det A = |A|$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

## Вычисление определителей 2-го порядка

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель 2-го порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 2-ГО ПОРЯДКА

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) = -12 + 2 = -10.$$

$$\Delta_1 = |B| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 20 - 2 = 18.$$

$$\Delta_2 = |C| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 12 = 18.$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 3-ГО ПОРЯДКА

## Правило треугольников (Правило Саррюса)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} - \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 3-ГО ПОРЯДКА

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 3-ГО ПОРЯДКА

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 - \\ - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 1) = -8 + 12 - 1 - (4 + 2 + 12) = \\ = 3 - 18 = -15.$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 3-ГО ПОРЯДКА

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 9 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 3-ГО ПОРЯДКА

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - \\ & - (3 \cdot 4 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1) = \\ & = 20 + 6 - 12 - (36 - 20 + 2) = 14 - 18 = -4. \end{aligned}$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 3-ГО ПОРЯДКА

$$\begin{aligned} |A| = \det A &= \begin{vmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 9 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \cdot (-1) + (-7) \cdot (-2) \cdot 4 + 9 \cdot 5 \cdot 8 - \\ &- (8 \cdot 3 \cdot 4 + (-7) \cdot 9 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 \cdot 6) = \\ &= -18 + 56 + 360 - (96 + 63 - 60) = 398 - 99 = 299. \end{aligned}$$

# СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1)  $\Delta = \Delta^T$       Свойство равноправия строк и столбцов определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta^T.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2; \quad \Delta^T = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2; \quad \Delta = \Delta^T.$$

# СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$2) \Delta = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = -\Delta$$

# СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = -\Delta, \quad \Delta_2 = -\Delta.$$

# СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$3) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta = -\Delta \Rightarrow 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0.$$

# СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$5) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$6) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

# СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$7) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -10 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 10 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

# МИНОР И АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = M_{ij}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{32} = -M_{32}$$

# МИНОР И АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}; M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 - 8 - 16 - 12 - 1 = -32.$$
$$A_{32} = -M_{32} = 32.$$

$$2) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2; A_{33} = M_{33} = 2.$$

# МИНОР И АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

- Вычислить определитель. Найти алгебраические дополнения элементов первой строки определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ 1-Й СТРОКИ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 8 - 3 - 9 + 4 - 4 = -26.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = M_{11} = -5; \quad A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) = -26.$$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ 2-ОЙ СТРОКИ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -26.$$
$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$
$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + (-2) \cdot 6 = -26.$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ 3-ГО СТОЛБЦА

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -26.$$
$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6;$$
$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2.$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 6 + (-1) \cdot 2 = -26.$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ (СТОЛБЦА)

Определитель (любого порядка) равен сумме произведений элементов любой его строки (любого его столбца) на их алгебраические дополнения.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ (СТОЛБЦА)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} =$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ $n$ -ГО ПОРЯДКА

1. Разложением по элементам строки или столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) - (-1) \cdot (-7) = -26.$$

2. Понижением порядка (накоплением нулей в строке или столбце)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-2); \cdot (3) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -26.$$

# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ $n$ -ГО ПОРЯДКА

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -26.$$


## 3. Приведением к треугольному виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = -26.$$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Треугольный определитель равен произведению своих диагональных элементов (т.е. элементов своей главной диагонали).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 8.$$

# УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4) \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot 1 = -12.$$

## ОТВЕТЫ

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-4) = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -11 & 0 & -10 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = -2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -11 & -10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 11 & 10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (11 - (-10)) = -2 \cdot 21 = -42. \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (20 + 1) = -42. \end{aligned}$$

# ОТВЕТЫ

$$2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

## ОТВЕТЫ

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-3) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ -7 & -11 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\
 & \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -7 & -11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \\ -18 & -11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & -8 & 5 \\ -18 & -15 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -18 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 18 & 15 \end{vmatrix} = \\
 & = 3 \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3(25 + 48) = 3 \cdot 73 = 219.
 \end{aligned}$$