Лекция 11

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия – раздел математики, в котором геометрические задачи решаются средствами алгебры на основе метода координат и введения произвольной (переменной) точки объекта в Декартовой системе координат.

§1. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Прямая

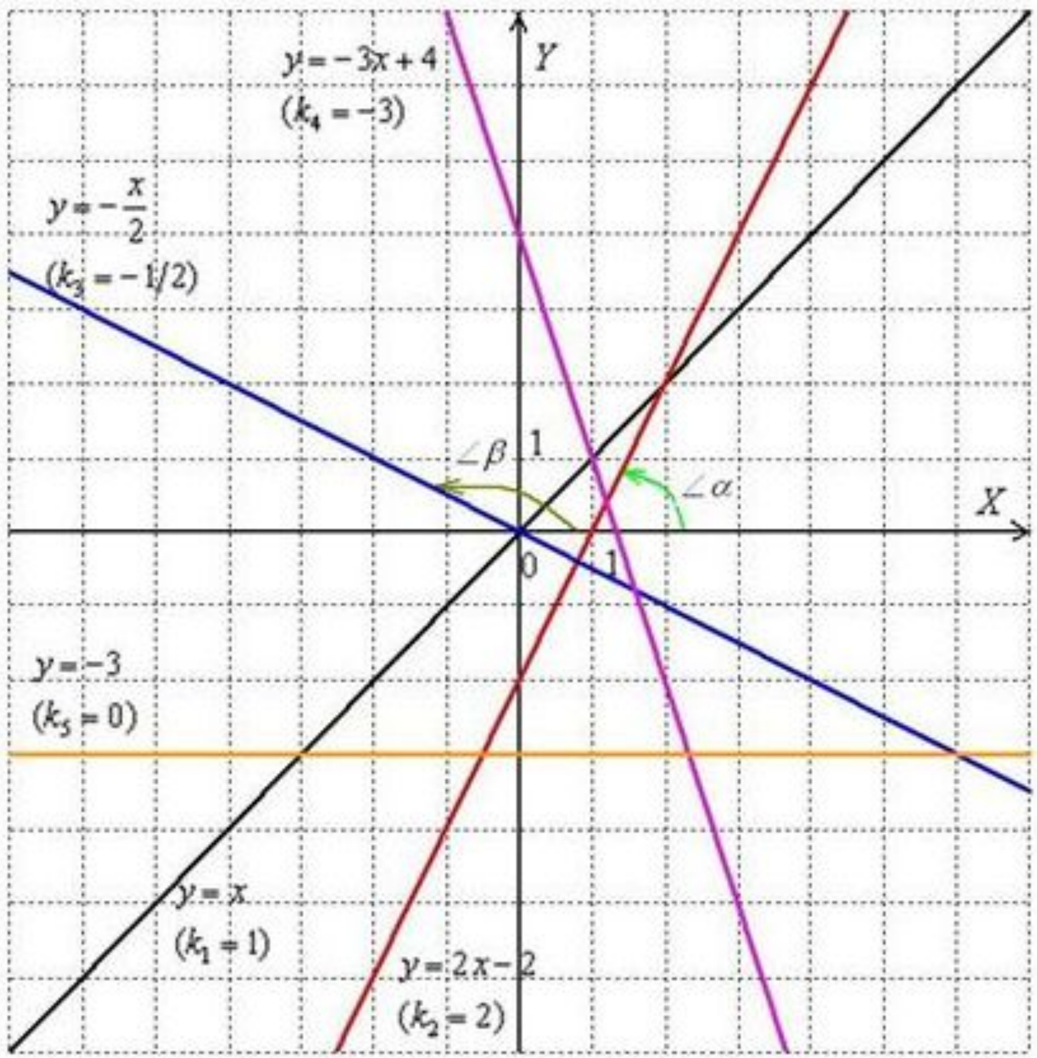
Определение. Выражение $F(x, y) = 0$ называется уравнением данной линии, если ему удовлетворяют все точки, лежащие на данной линии и не удовлетворяет ни одна точка, не принадлежащая данной линии.

Всем известный «школьный» вид уравнения прямой, который называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом.***

$$y=kx+b$$

Например, если прямая задана уравнением $y=2x-2$, то её угловой коэффициент: $k=2$.

Рассмотрим геометрический смысл данного коэффициента и то, как его значение влияет на расположение прямой:



Чем больше угловой коэффициент по модулю, тем круче идёт график прямой.
Обратно: чем меньше угловой коэффициент по модулю, тем прямая является более пологой.

Если $k>0$, прямая идет снизу вверх, если $k<0$ – сверху вниз.

Чем больше b, тем выше пересекает прямая ось $0Y$

Как составить уравнение прямой с угловым коэффициентом?

Если известна точка $M(x_0,y_0)$, принадлежащая некоторой прямой, и угловой коэффициент k этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой: $y-y_0=k(x-x_0)$

Общее уравнение прямой

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется общим уравнением прямой на плоскости, где A,B,C – некоторые числа. При этом коэффициенты A,B *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

$$y = kx + b \longrightarrow y - kx - b = 0 \longrightarrow kx - y + b = 0$$

$A=k$

$B=-1$

$C=b$

Направляющий вектор прямой

Вектор, который параллелен прямой, называется ***направляющим вектором данной прямой***.

Очевидно, что у любой прямой бесконечно много направляющих векторов, причём все они будут коллинеарны (сонаправлены или нет – не важно).

Направляющий вектор будем обозначать : $\overline{p} = (p_1, p_2)$

Но одного вектора недостаточно для построения прямой, вектор является свободным и не привязан к какой-либо точке плоскости.

Поэтому дополнительно необходимо знать некоторую точку $M(x_0,y_0)$, которая принадлежит прямой.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

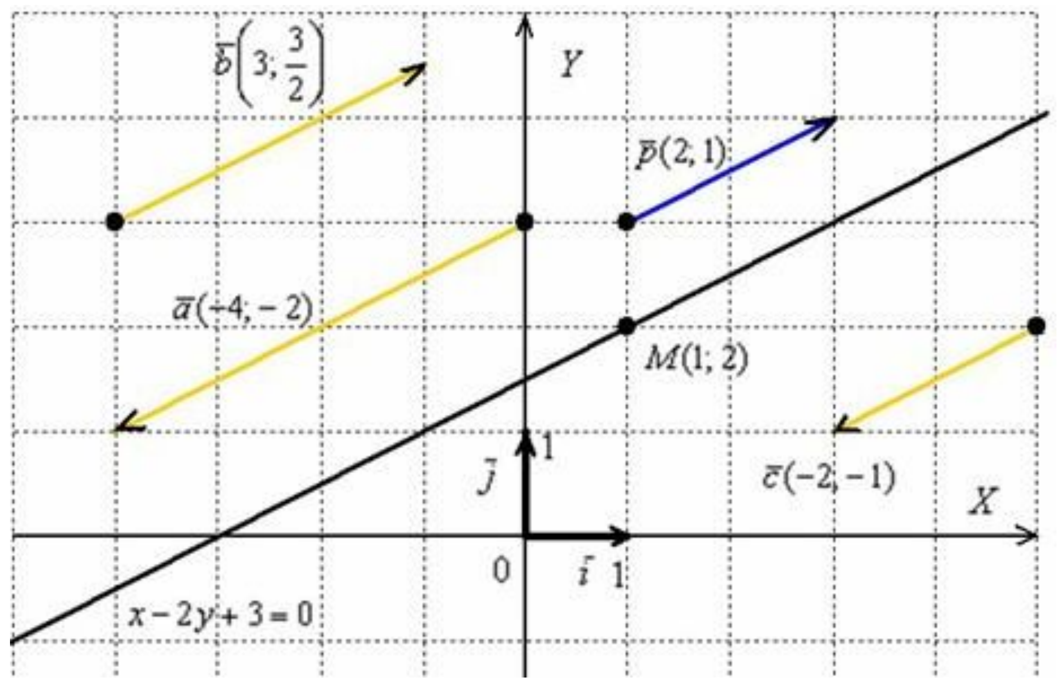
Иногда его называют ***каноническим уравнением прямой***.

<u>Пример 1.</u> Составить уравнение прямой по точке *M(1,2)* и направляющему вектору ***p***= *(2,1)*

Подставим координаты направляющего вектора ***p(2,1)*** и точки *M(1,2)* в уравнение $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$; $1(x-1) = 2(y-2)$; $x - 2y + 3 = 0.$

Чертежа в таких примерах, как правило, делать не нужно, но в качестве пояснения:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$



Как найти направляющий вектор по общему уравнению прямой? Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ в прямоугольной системе координат, то вектор ***p****(-B,C)* является направляющим вектором данной прямой.

Примеры нахождения направляющих векторов прямых:

1) $5x+7y-1=0 \Rightarrow \quad \overline{p}(-7;5)$

2) $2y+3=0 \quad (0\cdot x+2y+3=0) \Rightarrow \quad \overline{p}(-2;0)$

3) $5x-2=0 \quad (5x+0\cdot y-2=0) \Rightarrow \quad \overline{p}(0;5)$

В том случае, если одна из координат направляющего вектора нулевая: $\dfrac{x-x_0}{p_1}=\dfrac{y-y_0}{p_2}$ $\quad p_2(x-x_0)=p_1(y-y_0)$

Как составить уравнение прямой по двум точкам?

Если известны две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через данные точки, можно составить по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Поскольку вектор $\overline{M_1M_2}$ будет направляющим вектором данной прямой.

Примечание: *точки можно «поменять ролями» и использовать формулу* .

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$

<u>Пример 2.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(-2,-1)$, $M_2(3,1)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

<u>Решение:</u>

Подставим координаты точек $M_1(-2,-1)$, $M_2(3,1)$ в уравнение прямой.

$$\frac{x-(-2)}{3-(-2)}=\frac{y-(-1)}{1-(-1)};\ \frac{x+2}{5}=\frac{y+1}{2};\ 2(x+2)=5(y+1);\ 2x+4=5y+5$$

$$2x-5y-1=0$$

Необходима проверка – координаты исходных точек должны удовлетворять полученному уравнению:

$$2(-2)-5(-1)-1=0 \qquad 2\cdot 3-5\cdot 1-1=0$$

Задача решена верно.

Если в результате проверки тождества не получилось – надо все пересчитать.

Аналогично предыдущему случаю: если в $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

один из знаменателей (координата направляющего вектора) обращается в ноль, то переписываем её в виде .

$$(x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1)$$

Вектор нормали прямой (нормальный вектор)

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ в прямоугольной системе координат, то вектор ***n***(*A,B*) является вектором нормали данной прямой.

Вектор нормали ***n***(*A,B*) всегда ортогонален направляющему вектору прямой ***p****(-B,C)*. Убедимся в ортогональности данных векторов с помощью **скалярного произведения**:

$$\overline{p}\cdot\overline{n}=-B\cdot A+A\cdot B=0\Rightarrow\overline{p}\perp\overline{n}$$

Приведем примеры с теми же уравнениями, что и для направляющего вектора:

$$1)\ 5x+7y-1=0 \Rightarrow \quad \bar{n}(5;7)$$

$$2)\ 2y+3=0 \ \ (0\cdot x+2y+3=0) \Rightarrow \quad \bar{n}(0;2)$$

$$3)\ 5x-2=0 \ \ (5x+0\cdot y-2=0) \Rightarrow \quad \bar{n}(5;0)$$

Если известна некоторая точка *$M(x_0,y_0)$*, принадлежащая прямой, и вектор нормали ***n***(n_1,n_2) этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

$$n_1(x-x_0)=n_2(y-y_0)$$

<u>Пример 3.</u> Составить уравнение прямой по точке *M(-1,-3)* и вектору нормали ***n****(3,-1)*. Найти направляющий вектор прямой.

<u>Решение.</u> Используем формулу.

$$n_1\cdot(x-x_0)+n_2\cdot(y-y_0)=0$$

$$3\cdot(x-(-1))-1\cdot(y-(-3))=0$$

$$3\cdot(x+1)-(y+3)=0$$

$$3x+3-y-3=0$$

$$3x-y=0$$

Выполним проверку: Вектор нормали ***n****(3,-1)* совпадает с коэффициентами *A*, *B*. Точка *M(-1,-3)* лежит на прямой.

$$3\cdot(-1)-(-3)=0$$

$$-3+3=0$$

$$0=0$$

Верное равенство.

Уравнение составлено правильно. Вытаскиваем направляющий вектор прямой:

$$\bar{p}(-B;A)=\bar{p}(1;3)$$

На чертеже ситуация выглядит следующим образом: